МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
НЕВИННОМЫССКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ФИЛИАЛ) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ по дисциплине

«Математический анализ»

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Профиль подготовки	Цифровые технологии химических производств

Невинномысск - 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью освоения дисциплины является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 **Информационные системы и технологии**, путем освоения возможностей:

- демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовностью применять аналитические и численные методы решения поставленных задач, использовать современные информационные технологии, проводить обработку информации с использованием прикладных программных средств сферы профессиональной деятельности;
- выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат;
- планировать и проводить физические и химические эксперименты, проводить обработку результатов и оценивать погрешности.

Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам, необходимым для глубокого изучения общенаучных, общеинженерных, технических и специальных дисциплин;
- развитие логического и алгоритмического мышления, общего уровня математической культуры;
- выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса;
- обучение навыкам выдвигать гипотезы и устанавливать границы их применения, применять методы математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования;
- привитие студентам умений самоорганизации и самостоятельного изучения учебной литературы по математике и ее приложениям.

Перед выполнением заданий студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в данных указаниях. В них же даются также некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров.

В процессе самостоятельного изучения материала студент может решить предложенный в методическом указании набор заданий. Это позволит студенту судить о степени усвоения соответствующего раздела курса, укажет на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление работы, поможет сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. В результате освоения дисциплины «Математический анализ» у студента должны быть сформированы следующие компетенции:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-1** выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает методологию и основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, основные методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем, инструментальные средства моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-2** осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Способен применять на практике математические модели, методы и средства проектирования и автоматизации систем на практике
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-3** определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Обеспечивает решение задач моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем;
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в	**ИД-1** знаком с основами естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Понимает разделы: введение в математический анализ, теория пределов числовых последовательностей, теория пределов функций одной вещественной переменной; неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы

профессиональной деятельности		
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-2** анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы	Умеет анализировать непрерывность функций одной вещественной переменной; использовать разделы: теория пределов, непрерывность, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-3** применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Владеет навыками использования дифференциального исчисления функций одной вещественной переменной, кратных интегралов, криволинейных и поверхностных интегралов

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции одной переменной».

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции нескольких переменных».

Цель: Целью освоения тем «Математический анализ. Функции одной переменной» и «Математический анализ. Функции нескольких переменных» является формирование универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Математический анализ. Функции нескольких переменных» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

Пример 1. Найти полярные координаты точки $M\left(\sqrt{3};\ -1\right)$ (Рисунок 1).

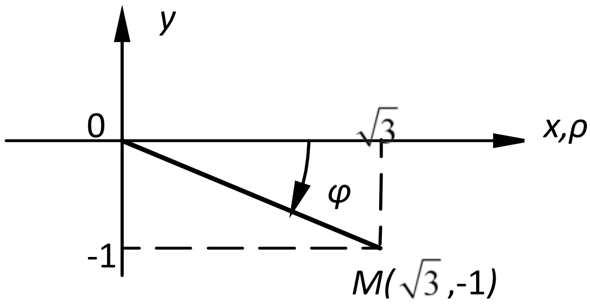


Рисунок 1

Решение. Используя формулы, находим полярный радиус и полярный угол точки M: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $tg\varphi = y/x = -\sqrt{3}/3$,

$\varphi = -arctg(\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, так как точка M лежит в IV четверти.

Пример 2. Построить по точкам график функции $\rho = 2sin\varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox – с полярной осью. Определить вид кривой.

Решение. Так как полярный радиус не отрицателен, т.е. $\rho \geq 0$, то $\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$; значит вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin\varphi$	0	0.38	0.71	0.92	1	0.92	0.71	0.38	0
$\rho = 2\sin\varphi$	0	0.76	1.24	1.84	2	1.84	1.42	0.76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = \rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (Рисунок 2).

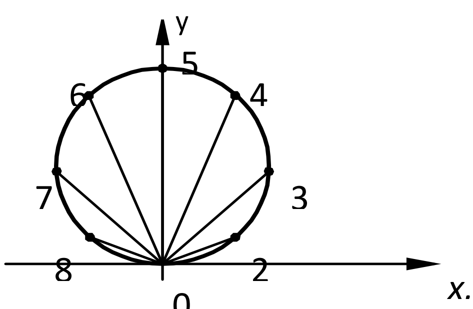


Рисунок 2

Найдем уравнение кривой $\rho = 2sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y по формулам:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2y\Big/\sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad x^2+y^2 = 2y\,.$$

Окончательно имеем $x^2+(y-1)^2=1$, т.е. уравнение выражает окружность с центром в точке $(0;\,1)$ и единичным радиусом.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе – бесконечно малую функцию:

$$\lim_{x\to 3} ctg(x-3)=\infty, \qquad \lim_{x\to 3}\ln(4-x)=0. \qquad \text{Поэтому} \quad \lim_{x\to 3}\frac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}=\infty.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида ∞/∞. Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на x^4. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^3}{-4+7/x^4}=\frac{-12+0}{-4+0}=-3,$$

поскольку при $x\to\infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{ln(1-x^2)}$.

Решение. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида $0/0$ используем метод замены бесконечно малых эквивалентными. Так как при $x\to 0$

$1-\cos 4x = 2sin^2 2x \sim 8x^2$, $\quad ln(1-x^2)\sim -x^2$, то находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2}=-8.$$

Пример 6. Найти первую производную функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\ln(1-t) \\ y=(t-1)^2 \end{cases}.$$

Решение. Дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t: $x'_t=\dfrac{-1}{1-t}$,

$y'_t = 2(t-1)$. Искомая производная от у по х равна отношению производных от $y(t)$ и $x(t)$ по t:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(t-1)}{\left[\dfrac{-1}{(1-t)}\right]} = 2(t-1)^2 .$$

Пример 7. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = z\sqrt{x^3} - ye^z$.

Решение. Считая функцию u функцией только одной переменной x, а переменные y и z рассматривая как постоянные, находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{xz}$. Аналогично, считая u функцией только y, а затем только z, получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{x^3} - y$.

Вопросы и задания

Задание 1. Построить графики функций:

Номер вар.	Функции
1	$y = -3x^2 + 10x - 3,\ y = ln(-x) + 1,\ y = cos\frac{x}{2} - 1,\ y = x^2 + \|x\|.$
2	$y = -2x^2 + 5x - 1,\ y = ln(x-2),\ y = cos2x + 2,\ y = x \cdot \|x-1\|.$
3	$y = -4x^2 + 17x - 4,\ y = ln(x+2),\ y = sin2x + 1,\ y = x^2 - \|x\|.$
4	$y = -5x^2 + 26x - 5,\ y = ln3x + 2,\ y = sin2x - 2,\ y = x \cdot \|x\|.$
5	$y = 2x^2 + 3x - 2,\ y = ln(2-2x),\ y = -cos2x,\ y = x \cdot \|x+1\|.$
6	$y = 3x^2 + 8x - 3,\ y = ln2x + 3,\ y = -sin2x,\ y = x + 2\|x\| + 1.$
7	$y = 4x^2 + 15x - 4,\ y = ln\,x + 3,\ y = cos\frac{x}{2} + 1,\ y = \frac{\|x\|}{x^2}.$
8	$y = 5x^2 + 24x - 5,\ y = ln(-3x) + 1,\ y = sin\frac{x}{2} - 2,\ y = e^{\|x\|}.$
9	$y = -2x^2 + 3x + 2,\ y = ln(x-4),\ y = sin\frac{x}{2} + 1,\ y = ln\|x\|.$
10	$y = -3x^2 + 8x + 3,\ y = ln(-x) + 2,\ y = cos\frac{x}{2} - 2,\ y = sin\|x\|.$
11	$y = 6x^2 - 5x + 1,\ y = -ln\,x + 2,\ y = -sin\frac{x}{2},\ y = e^{\|x+2\|}.$
12	$y = -2x^2 + 7x - 3,\ y = -ln\,x + 1,\ y = -cos\frac{x}{2},\ y = ln\|x-1\|.$

13	$y=-2x^2+11x-5,\ y=-ln(x-1),\ y=sin(2x-\frac{\pi}{4}),\ y=\lvert x^2-x\rvert.$
14	$y=3x^2-7x+2,\ y=2\ln x+2,\ y=-sin(x+\frac{\pi}{3}),\ y=\frac{1}{\lvert x+2\rvert}.$
15	$y=-3x^2+13x-4,\ y=-\ln x-2,\ y=-cos(x-\frac{\pi}{3}),\ y=x\lvert x\rvert+4.$
16	$y=-3x^2+13x-4,\ y=-\ln x-2,\ y=\frac{-x+2}{2x-2},\ y=x\lvert x\rvert+4.$
17	$y=3x^2-7x+2,\ y=-e^{-x}+2,\ y=-sin(x+\frac{\pi}{3}),\ y=\frac{1}{\lvert x+2\rvert}.$
18	$y=-2x^2+11x-5,\ y=\frac{3x-4}{x+2},\ y=-e^{x+2},\ y=-ln(x-1).$
19	$y=-2x^2+7x-3,\ y=cos\frac{x}{2},\ y=\frac{3x+3}{x+1},\ y=ln\lvert x-1\rvert.$
20	$y=6x^2-5x+1,\ y=-sin\frac{x}{2},\ y=-e^{x}+1,\ y=e^{\lvert x+2\rvert}.$

Задание 2. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики.

Вариант	Функции
1	1) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-4\rvert}{x-4}$; 3) $y=\begin{cases} x^2 & -\infty<x\le -2 \\ -x+2 & 0<x\le 0 \\ 3x & 0<x<\infty \end{cases}$
2	1) $y=\dfrac{x^2-10x+9}{x-9}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x+0{,}8\rvert}{x+0{,}8}$; 3) $y=\begin{cases} 2x+5 & -\infty<x\le 0 \\ 2x+3 & 0<x<2 \\ 7 & 2\le x<\infty \end{cases}$
3	1) $y=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 2x+5\rvert}{2x+5}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2+1 & -\infty<x\le 0 \\ x+1 & 0<x<2 \\ 4 & 2\le x<\infty \end{cases}$
4	1) $y=\dfrac{x^2+7x+6}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-\sqrt{2}\rvert}{x-\sqrt{2}}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2 & -\infty<x\le -2 \\ 4x+4 & -2<x\le 0 \\ 5 & 0<x<\infty \end{cases}$
5	1) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x+6\rvert}{x+6}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2+2 & -\infty<x\le -1 \\ 3x+2 & -1<x\le 0 \\ 2 & 0<x<\infty \end{cases}$
6	1) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x+3\rvert}{x+3}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2 & -\infty<x\le 0 \\ 2x+1 & 0<x\le 1 \\ 3 & 1<x<\infty \end{cases}$
7	1) $y=\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x+5\rvert}{x+5}$; 3) $y=\begin{cases} -3x+1 & -\infty<x\le 0 \\ x^2+1 & 0<x\le 1 \\ 2x & 1<x<\infty \end{cases}$
8	1) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-6\rvert}{x-6}$; 3) $y=\begin{cases} 2x+2 & -\infty<x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<1 \\ 3 & 1\le x<\infty \end{cases}$
9	1) $y=\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-7\rvert}{x-7}$; 3) $y=\begin{cases} 4x+1 & -\infty<x<0 \\ (x+1)^2 & 0\le x<1 \\ 4 & 1\le x<\infty \end{cases}$
10	1) $y=\dfrac{x^2-5x-6}{x-6}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-8\rvert}{x-8}$; 3) $y=\begin{cases} x^2+1 & -\infty<x\le 0 \\ x & 0<x\le 1 \\ x+1 & 1<x<\infty \end{cases}$

11	1) $y=\frac{x^2+6x+8}{x+4}$; 2) $y=\frac{\lvert x-9\rvert}{x-9}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2+2 & -\infty<x\le 0\\ x+2 & 0<x\le 2\\ 5 & 2<x<\infty\end{cases}$
12	1) $y=\frac{x^2+8x+12}{x+6}$; 2) $y=\frac{\lvert x-10\rvert}{x-10}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2 & -\infty<x<0\\ x & 0\le x\le 3\\ 2x+1 & 3<x<\infty\end{cases}$
13	1) $y=\frac{x^2-8x+12}{x-6}$; 2) $y=\frac{\lvert 2x-1.\rvert}{2x-1}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2 & -\infty<x<0\\ x & 0\le x<3\\ 2x+1 & 3\le x<\infty\end{cases}$
14	1) $y=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$; 2) $y=\frac{\lvert 3x-1.\rvert}{3x-1}$; 3) $y=\begin{cases}3x+5 & -\infty<x\le 0\\ (x-5)^2 & 0<x\le 5\\ 1 & 5<x<\infty\end{cases}$
15	1) $y=\frac{x^2-10x+16}{x-2}$; 2) $y=\frac{\lvert x-3\rvert}{x-3}$; 3) $y=\begin{cases}2x+1 & -\infty<x\le 0\\ (x-1)^2 & 0<x\le 1\\ 2 & 1<x<\infty\end{cases}$
16	1) $y=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$; 2) $y=\frac{\lvert x-\sqrt{3}\rvert}{x-\sqrt{3}}$; 3) $y=\begin{cases}4x+5 & -\infty<x\le 0\\ 5 & 0<x<2\\ x+1 & 2\le x<\infty\end{cases}$
17	1) $y=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$; 2) $y=\frac{\lvert 4x+1\rvert}{4x+1}$; 3) $y=\begin{cases}4x-1 & -\infty<x<0\\ x^2-1 & 0<x\le 1\\ 0 & 1<x<\infty\end{cases}$
18	1) $y=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$; 2) $y=\frac{\lvert 5x-1\rvert}{5x-1}$; 3) $y=\begin{cases}2x+3 & -\infty<x<0\\ (x-3)^2 & 0\le x<1\\ 4 & 1\le x<\infty\end{cases}$
19	1) $y=\frac{x^2-8x+15}{x-3}$; 2) $y=\frac{\lvert 6x+1\rvert}{6x+1}$; 3) $y=\begin{cases}2x+2 & -\infty<x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<1\\ 4 & 1\le x<\infty\end{cases}$
20	1) $y=\frac{x^2+8x+15}{x+5}$; 2) $y=\frac{\lvert 2x+3\rvert}{2x+3}$; 3) $y=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ 2x^2 & 0\le x<3\\ 5x+1 & 3\le x<\infty\end{cases}$

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Номер вар.	Функция, отрезок
1	$f(x) = x^3 - 12x + 7, \qquad [0,3].$
2	$f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2, \qquad [0,2].$
3	$f(x) = (\sqrt{3}/2)x + \cos x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
4	$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2, \qquad [-3,1].$
5	$f(x) = x^3 - 3x + 1, \qquad [1/2, 2].$
6	$f(x) = x^4 + 4x, \qquad [-2,2].$
7	$f(x) = (\sqrt{3}/2)x - \sin x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
8	$f(x) = 81x - x^4, \qquad [-1,4].$
9	$f(x) = 3 - 2x^2, \qquad [-1,3].$
10	$f(x) = x - \sin x, \qquad [-\pi, \pi].$
11	$f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}, \qquad [-5,5].$
12	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$
13	$f(x) = \frac{x-3}{x^2+16}, \qquad [-5,5].$
14	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \qquad \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$
15	$f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}, \qquad [-3,7].$
16	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right].$
17	$f(x) = \frac{x-5}{x^2+11}, \qquad [-3,7].$
18	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \qquad \left[-2\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$
19	$f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}, \qquad [-4,6].$
20	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[-2\pi, -\frac{3}{2}\pi\right]$

Практическое занятие по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Цель: Целью освоения тем «Интегральное исчисление функции одной переменной»

является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Интегральное исчисление функции одной переменной» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

1. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

$1^0.\ \int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1, \quad u = u(x)$ - дифференцируемая функция

$2^0.\ \int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

$3^0.\ \int a^u du = \dfrac{a^u}{lna} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$

$4^0.\ \int sin\, u\, du = cos\, u + C.$

$5^0.\ \int cos\, u\, du = sin\, u + C.$

$6^0.\ \int \dfrac{du}{cos^2 u} = -tg\, u + C.$

$7^0.\ \int \dfrac{du}{sin^2 u} = -ctg\, u + C.$

$8^0.\ \int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\ arctg\ \dfrac{u}{a} + C.$

$9^0.\ \int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C.$

$10^0.\ \int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \dfrac{u}{a} + C.$

$11^0.\ \int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + b}\right| + C.$

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\begin{aligned} &\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C; \\ &\int f(x+b)dx = F(x+b) + C, \end{aligned} \qquad (1)$$

где a и b – некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\ d(\varphi(x)), \qquad (2)$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

3) Формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (3)$$

Обычно выражение *dv* выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых затруднений. За *u*, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к её упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P(x) \cdot ln(x)$, $P(x) \cdot arcsin\, x$, $P(x) \cdot arctg\, x$, где $P(x)$ - многочлен от *x*.

2. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) \leq 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например, $b = \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x = b$), то по определению полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_b^a f(x)dx, \quad (6)$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (7)$$

Интегралы в левых частях равенств (6) и (7) называются несобственными интегралами. Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел в правой части равенств (6) и (7).

Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

4. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси *Ox*. Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Теорема 1. Если 1) функция *f*(*x*,*y*) интегрируема в правильной в направлении *Oy* области *S*: $\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \tag{1}$$

Теорема 2. Если :1) функция *f*(*x*,*y*) интегрируема в правильной в направлении *Ox* области $S: \{\ c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ есть дифференцируемое преобразование области *P* из плоскости O_1uv на область *S* из плоскости Oxy. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \iint\limits_P f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|J(u,v)\right| dudv. \tag{3}$$

Переход в двойном интеграле к полярным координатам

Формулы

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \tag{4}$$

преобразуют полярные координаты ρ, φ точки в декартовы координаты этой точки и переводят область $P_0: \left\{0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \rho < \infty\right\}$ на всю плоскость Oxy.

Обратное преобразование декартовых координат в полярные осуществляется по формулам: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arcctg} x/y + \pi \cdot \delta(y),\ \delta(y) = \begin{cases} 0, \text{ при } y > 0, \\ 1, \text{ при } y < 0. \end{cases}$

Фиксируя в последних формулах ρ и φ, получим координатные линии из разных семейств: окружность с центром в точке $O(0;0)$ и луч, исходящий из точки $O(0;0)$.

<u>Пример 1</u>. Найти $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}.$

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$ то, используя формулы (1), получим:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{2(2x-3)} + C.$$

Проверка: $$\left(-\frac{1}{2(2x-3)} + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Пример 2. Найти $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx.$.

Решение. Так как $\cos x\, dx = d(\sin x),$ то по формуле (2) находим:

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x \cdot \cos 2x\, dx.$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u = x, \quad dv = \cos 2x\, dx;$ тогда $du = dx, \quad v = (1/2)\sin 2x.$ используя формулу (3), имеем:

$$\int x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx.$.

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x} = t,$ откуда $dx = 2t\, dt.$ Найдем пределы интегрирования по переменной *t*: при $x = 4$ имеем $t = 2$, а при $x = 9$ имеем $t = 3.$ Переходя в сходном интеграле к новой переменной *t* и применяя формулу Ньютона-Лейбница (5), получаем:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1} 2t\, dt = (t^2 - 4t + 4\ln|t+1|)\Big|_2^3 = (9 - 12 + 4\ln 4) - (4 - 8 + 4\ln 3) = 2.15.$$

Пример 5. Вычислить плоской фигуры, ограниченной кривыми

$y_1 = \sin x + 2, \quad y_2 = -1, \quad x = 0, \quad x = \pi$ (Рисунок 1)

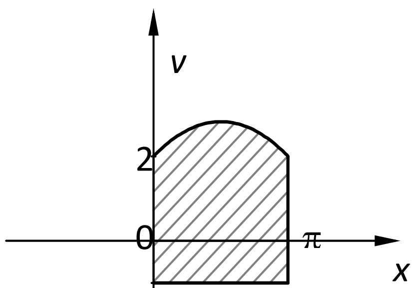


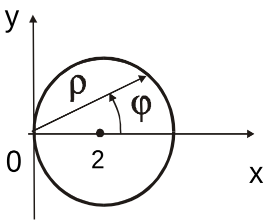
Рисунок 1

Решение. $S = \int\limits_0^{\pi} (y_1 - y_2) dx = \int\limits_0^{\pi} (\sin x + 2 + 1) = 2 + 3\pi$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; $f(x) = 1/\sin^2 x$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0.$ Согласно определению (7), получаем: $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (tg\, x)\Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} tg\, \varepsilon = 1,$

т.е. этот несобственный интеграл сходится.

Пример 6. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_S (y+2) dxdy$, S – множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \le 4x$.



∇ Границей области является линия $x^2 + y^2 = 4x$ или $(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке $C(2;0)$ (рисунок 2).

Наличие в уравнении границы комбинации $x^2 + y^2$ наводит на мысль, что для вычисления двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Уравнение границы $x^2 + y^2 - 4x = 0$ переходит в уравнение $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 4\rho\cos\varphi = 0$ или $\rho(\rho - 4\cos\varphi) = 0$. Отсюда ρ=0 (соответствует полюсу *O*) и $\rho = 4\cos\varphi$ – уравнение окружности. Так как всегда $\rho \ge 0$ (по смыслу ρ), то из $\rho = 4\cos\varphi$ следует $\cos\varphi \ge 0$, отсюда получаем $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Итак, в полярных координатах область интегрирования есть $P: \left\{ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi \right\}$. Тогда по формуле (5)

$$I = \iint\limits_S (y+2) dxdy = \iint\limits_P (\rho\sin\varphi + 2)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} (\rho^2\sin\varphi + 2\rho) d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \cdot \sin\varphi + \rho^2 \right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{64}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi + 16\cos^2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{64}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi d\cos\varphi + 8 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{16}{3} \cdot \cos^4\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$+8(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=8\cdot\#$$

Вопросы и задания

Задание 1.

Найти неопределенные интегралы.

Номер вар.	Интегралы
1	а) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt[8]{1-e^x}}$; б) $\int\frac{19\text{-}4x}{2x^2+x\text{-}3}dx$; в) $\int(5x\text{-}2)\ln x dx$; г). $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
2	а) $\int x\sqrt{3\text{-}x^2}dx$; б) $\int\frac{2x+9}{x^2+5x+6}dx$; в) $\int x\cdot\cos^2(2x)dx$; г) $\int\frac{dx}{\sin x+tgx}$.
3	а) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int\frac{x+9}{x^2+2x-3}dx$; в) $\int x\cdot\arcsin x dx$; г). $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$
4	а) $\int\sin 2x\sqrt{2\text{-}\cos^2 x}dx$; б) $\int\frac{2x+27}{x^2-x-12}dx$; в) $\int\ln(3+x^2)dx$; г). $\int\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}$
5	а) $\int\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$; б) $\int\frac{4x+31}{2x^2+11x+12}dx$; в) $\int(2-x)\sin x dx$; г) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.
6	а) $\int\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; б) $\int\frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$; в) $\int(1-\ln x)dx$; г) $\int\frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$.
7	а) $\int\frac{1-tgx}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$; в) $\int(3x+4)\cos x dx$; г) $\int\frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$.
8	а) $\int\frac{x^2}{8+x}dx$; б) $\int\frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$; в) $\int arcctg(4x)dx$; г) $\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.
9	а) $\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 x+3}dx$; б) $\int\frac{4x-27}{2x^2-x-6}dx$; в) $\int x\ln^2 x dx$; г) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

10	а) $\int \frac{x^2}{cos^2(x^3)}dx$; б) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}dx$; в) $\int x^2 \sin 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.
11	а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int arctg\sqrt{x}dx$; в) $\int \frac{x-101}{x^3+2x^2+101x}dx$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
12	а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x+tgx}$.
13	а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int x3^x dx$; в) $\int \frac{x^3+3x+3}{x^4+3x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.
14	а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.
15	а) $\int \frac{\cos 3xdx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 \sin 4xdx$; в) $\int \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x^4+2x^2}dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.
16	а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin \frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$.
17	а) $\int \frac{(x+arctgx)dx}{1+x^2}$; б) $\int x \ln(x^2+1)dx$; в) $\int \frac{x^3-3}{x^4+3x^2}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$.
18	а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int x \sin x \cos xdx$; в) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^4+2x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.
19	а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x^2e^{3x}dx$; в) $\int \frac{4x^2+3x+50}{x^3+2x^2+50x}dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.
20	а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x \ln^2 xdx$; в) $\int \frac{x^3+3x^2+5}{x^4+5x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

Задание 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж области.

Номер вар.	Уравнения линий

1	$y=(x-2)^3,\, y=4x-8.$
2	$y=x\sqrt{9-x^2},\quad y=0,(0\le x\le 3).$
3	$y=4-x^2,\, y=x^2-2x.$
4	$y=\sin x\cos^2 x,\quad y=0,(0\le x\le \pi/2).$
5	$y=\sqrt{4-x^2},\quad y=0, x=0,\quad x=1.$
6	$y=x^2\sqrt{4-x^2},\quad y=0,(0\le x\le 2).$
7	$y=\cos x\sin^2 x,\quad y=0,(0\le x\le \pi/2).$
8	$y=\sqrt{e^x-1},\quad y=0, x=\ln 2.$
9	$y=\arccos x,\quad y=0, x=0.$
10	$y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3.$
11	$y=x\sqrt{36-x^2},\quad y=0,(0\le x\le 6).$
12	$x=\arccos y,\quad x=0, y=0.$
13	$y=\operatorname{arctg} x,\quad y=0, x=\sqrt{3}.$
14	$y=x^2\sqrt{8-x^2},\quad y=0,\left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right).$
15	$y=x\sqrt{4-x^2},\quad y=0,(0\le x\le 2).$
16	$x=\sqrt{e^y-1},\quad x=0, y=\ln 2.$
17	$x=(y-2)^3,\, x=4y-8.$
18	$y=\cos^5 x\sin 2x,\quad y=0,(0\le x\le \pi/2).$
19	$y=x^2\sqrt{16-x^2},\quad y=0,(0\le x\le 4).$
20	$x=4-(y-1)^2,\, x=y^2-4y+3.$

Практическое занятие по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель: Целью освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, содержащее независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y* и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) называется уравнением в общем виде.

Определение 2. Порядком уравнения называется порядок старшей производной,

входящей в уравнение.

Определение 3. Уравнение, разрешенное относительно старшей входящей в него производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

называется уравнением *n*-го порядка в нормальной форме.

Определение 4. Решением уравнения (1.1) (или (1.2)) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения на плоскости О*xy* называется интегральной кривой.

Однородное уравнение (ЛОДУ)

Линейным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x); \tag{5.1}$$

$p_i(x)\ (i = \overline{1,n})$ называются коэффициентами ДУ, $f(x)$ – правой частью (5.1).

Определение 1. Если при всех рассматриваемых значениях *x* функция ,
то уравнение (5.1) называется однородным (ЛОДУ); в противном случае оно называется неоднородным (ЛНДУ).

Теорема 1. Если коэффициенты $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (*a*,*b*), то для любых начальных условий (4.1) задача Коши имеет решение и оно единственно.

Всякое решение уравнения (5.1) является частным решением, так что особых решений оно не имеет.

Однородное линейное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{5.2}$$

(всегда) имеет нулевое решение $y \equiv 0$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $y = y' = ... = y^{(n-1)} = 0$ при $x = 0$ и оно единственно.

Теорема 2. Общее решение ЛОДУ есть линейная комбинация решений $y_1, y_2, ..., y_n$ его фундаментальной системы:

$$y_0 = C_1y_2 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \tag{5.3}$$

Определение 2. Фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (5.2) называется *n* его любых линейно-независимых частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$.

Замечание. Для любого ЛОДУ существует бесконечное число фундаментальных систем решений.

Определение 3. Система из *n* функций $y_1, y_2, ..., y_n$ называется линейно-независимой (на (*a*,*b*)) системой, если тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \overset{x}{\equiv} 0 \tag{5.4}$$

выполняется лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Теорема 3. Чтобы система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{5.5}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b).

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Решение. Приводим уравнение к виду (3.1). Имеем: $x^2 y^2 \dfrac{dy}{dx} = y - 1;$ $x^2 y^2 dy = (y-1)dx$. Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$: $\dfrac{y^2}{y-1} dy = \dfrac{dx}{x^2}$ – приходим к уравнению с разделенными переменными. Интегрируем обе части уравнения (применяем формулу (3.3)): $\displaystyle\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x^2} + \tilde{N};$ $\dfrac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\dfrac{1}{x} + C$. При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ – решение уравнения, а $x = 0$ – нет.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $(1+x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0$, зная, что соответствующее ЛОДУ имеет частное решение $y_1(x) = x$.

Решение. 1. Найдем общее решение ЛОДУ $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$. Найдем y_2 :

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int \frac{xdx}{1+x^2}}}{x^2} dx = x\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -x\int \frac{\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+x^2}.$$

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o} = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2}$.

2. Найдем общее решение ЛНДУ. а) очевидно, что $y=1$ есть частное решение и по формуле (5.7) общее решение ЛНДУ: $y = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2}+1$. б) найдем общее решение по методу вариации произвольных постоянных. Составляем систему (5.9), приведя исходное уравнение к виду (5.1):

$$\tilde{N}_1' x + \tilde{N}_2' \cdot \sqrt{1+x^2} = 0; \; C_1' + C_2' \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Решим систему алгебраически: $C_1' = -1,\ C_2' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Интегрируя, найдем: $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \sqrt{1+x^2} + C_2$ и общее решение ЛНДУ

$$y = (-x + C_1)x + (\sqrt{1+x^2} + C_2)\sqrt{1+x^2} = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1.$$

Задание 1
1)Найти общее решение дифференциального уравнения I порядка.
2)Найти частное решение дифференциального уравнения II порядка ,
удовлетворяющее начальным условиям .

.№ вар-та	Задания		
1	1)	;	2)
2	1)	;	2)
3	1)	;	2)
4	1)	;	2)
5	1)	;	2)
6	1)	;	2)
7	1)	;	2)
8	1)	;	2)
9	1)	;	2)
10	1)	;	2)

Практическое занятие по теме «Ряды»

Цель: Целью освоения темы «Ряды» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Ряды» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

…………..

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = S$.

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

Если частичная сумма S_n ряда (1.1) при неограниченном возрастании *n* не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется ***расходящимся***.

Если ряд ***сходящийся***, то значение S_n при достаточно большом ***n*** является приближенным выражением суммы ряда *S*.

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Пример 1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (1.2)$$

называется ***геометрическим*** $(a \neq 0)$.

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых *n* членов $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$. Очевидно: это *n*-ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

$|q| = 1$: $q = 1$.

Ряд (1.2) принимает вид:

$a + a + a + \ldots + a = a \cdot n = S_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot n = \infty$, ряд расходится;

$q = -1$

Ряд (1.2) принимает вид:

$a - a + a - a + \ldots$,

$$S_n = \begin{cases} a & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном} \quad (n = 2k+1), \\ 0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном} \quad (n = 2k). \end{cases}$$

S_n не имеет предела, ряд расходится.

$|q| < 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$ - конечное число, ряд сходится.

$|q| > 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \infty$ - ряд расходится.

Итак, данный ряд сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Вопросы и задания

Задачи 21-30

В задачах № 11-0 найти область сходимости степенного ряда.

В задачах № 11-20 исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

11. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

12. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n^3}{n^3+1}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{5^{n+1}}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{2n+1}$.

13. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{2^n+1}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+1}$.

14. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\sin n}}{\sqrt{n^3+3n}}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{\pi^n}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

15. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^5+3n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$.

16. а) $\sum_{2}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{n^3+3n}}$.

17. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\sin n}}{n\sqrt[3]{n+1}}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$.

18. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{2^n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n^2+1}$.

19. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n!}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{2n+1}$.

20. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{n+3^n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{(2n-1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n-1}}$.

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 с. — 978- 5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html

2.Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 с. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71688.html

3. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 с. — ISBN 978-5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71689.html

4. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 с. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71690.html

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.html