МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал) СКФУ

# Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине **«Методы решения задач электроэнергетики и электротехники»**

Направление подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) подготовки – Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов

Невинномысск, 2024

## Содержание

## Введение

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» изучается студентами направления подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника (профиль подготовки – «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов») на 1-м курсе, когда закладываются базовые знания. Так как, кроме освоения теоретического материала, требуется закрепление полученных знаний, поэтому в учебном процессе высших учебных заведений наряду с теоретическим обучением значительное место отводится выполнению практических работ. Правильное сочетание теоретических знаний с практическими работами обеспечивает высокое качество подготовки выпускников.

Основной целью дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» является формирование у студентов практических навыков по планированию, проведению, анализу и оптимизации результатов исследования сложных процессов профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

Задачами курса являются: изучение методов теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, применение математического аппарата численных методов при решении задач электроэнергетики и электротехники.

## *Практическое занятие №1*

## *Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме*

1. Комплексным числом Z называется выражение вида $Z = x + iy$, где $x$ и $y$ – действительные числа, а $i$ – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом $x$. Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается $x = \mathrm{Re}Z$, а y – мнимой частью Z и обозначается $y = \mathrm{Im}\, Z$. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях $x$ и $y$ выполняются равенства:

а) $x\,(2 - i) + y\,(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)\,x - (1 - 2i)\,y = 2 + 2i$ ?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$2x - y - xi + 2yi = 4 - 5i$

$(2x - y) + (-x + 2y)\,i = 4 + (-5)i$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \dfrac{x-5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$

$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i,$ откуда

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x-2) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

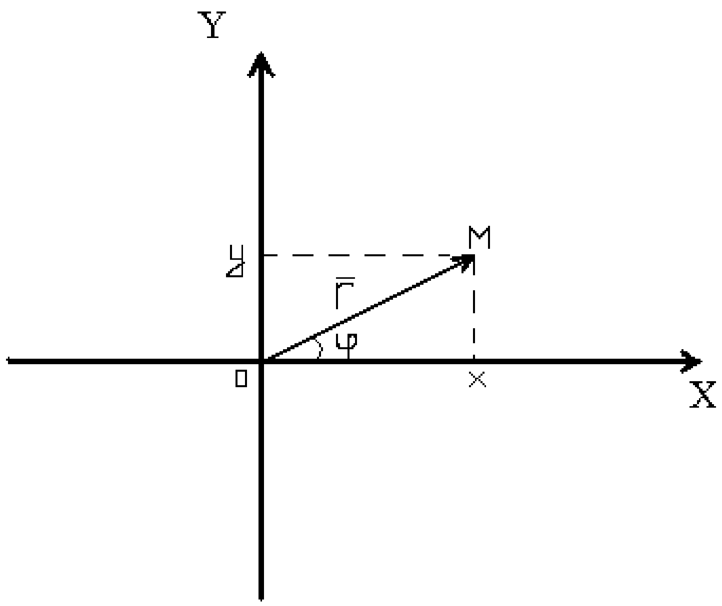
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными.**

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой M(x;y) плоскости Oxy такой, что $x$ = ReZ, $y$ = ImZ. Ось OX называется действительной, ось OY-мнимой. И, наоборот, каждую точку M(x;y) координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа Z = $x + iy$. Комплексное число Z можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.




Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

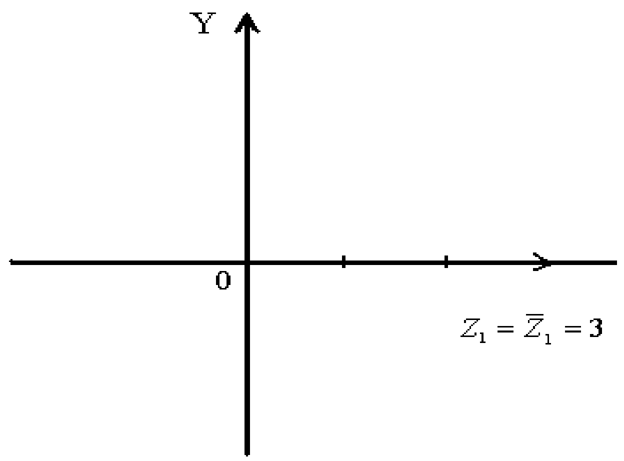
Решение:

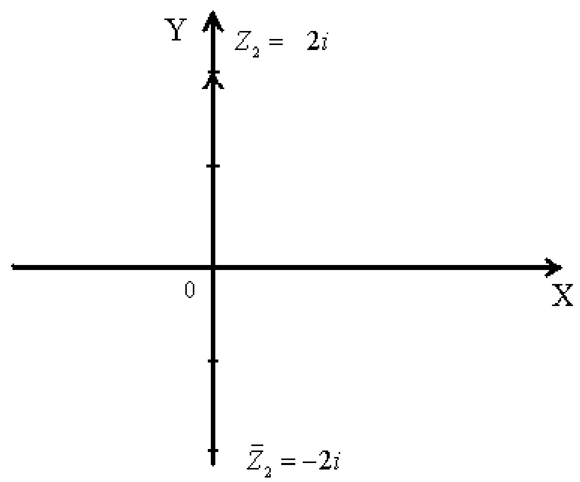
а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$\overline{Z_1} = 3 - 0i = 3$, т.е. $Z_1 = \overline{Z_1}$.

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$\overline{Z_2} = 0 - 2i = -2i$.



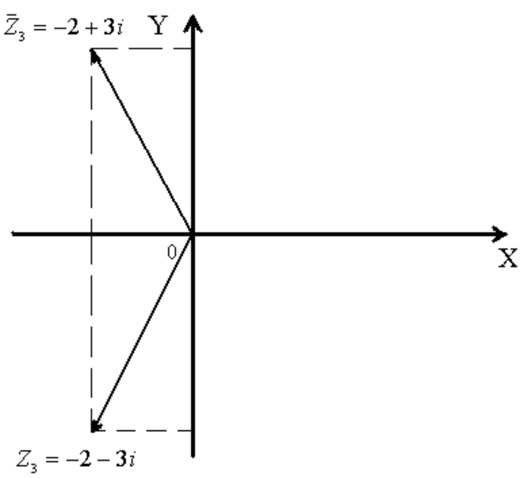



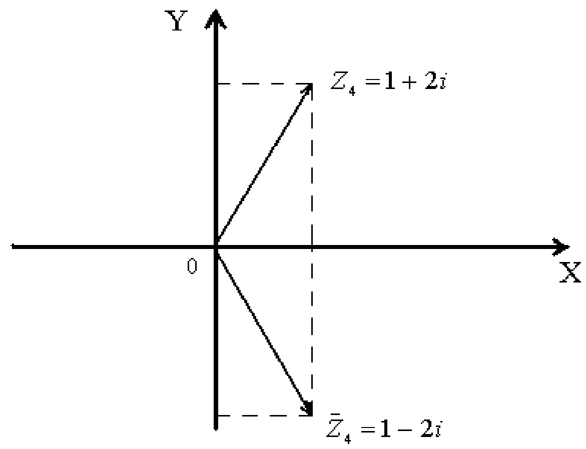

в) $Z_3 = -2 - 3\mathrm{i}$

$\overline{Z_3} = -2 + 3i$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$\overline{Z_4} = 1 - 2i$




5. Длина вектора $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : r = $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается Arg Z или $\varphi$. Arg Z = arg Z + $2\pi\kappa$, $\kappa$- любое целое число ; arg Z – главное значение аргумента,

-$\pi$< arg Z ≤ $\pi$. Аргумент $\varphi$ определяется из формулы: tg $\varphi = \frac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \le \pi$, то из формулы: $tg\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{Для внутренних точек I, IV четвертей} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \text{Для внутренних точек II четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то arg Z можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; б) –3i.

Решение:

а) $Z_1=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $|Z_1|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$\arg Z_1 = arctg\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=arctg(-1)=-arctg1=-\dfrac{\pi}{4}$ - главное значение аргумента, т.к. $-\pi<-\dfrac{\pi}{4}<\pi$.

б) $Z_2=-3i=0-3i$

$|Z_2|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

Из изображения числа $Z_2$ следует, что $\arg Z_2=-\dfrac{\pi}{2}$ - главное значение, т.к. $-\pi<-\dfrac{\pi}{2}<\pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z=Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

а) $Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$

b) $(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3)$.

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1=x_1+iy_1, Z_2=x_2+iy_2$, то

$$Z=Z_1-Z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1=x_1+iy_1$ и $Z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \overline{Z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.

b) $(Z_1 \cdot Z_2)\cdot Z_3 = Z_1(Z_2 \cdot Z_3)$

c) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$(2-3i)(-5+4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\frac{1+3i}{2+i}$.

Решение: $\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$

Пример 5. Выполните указанные действия:

а) (2 – 3i) – (i – 2);

б) (2 – i) (i + 1) – (1,5i + 1) 4i;

в) $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i}$;

г) $\frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i}(2-i)$;

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.

Решение:

а) $(2-3\mathrm{i})-(\mathrm{i}-2)=\ 2-3\mathrm{i}-\mathrm{i}+2=4-4\mathrm{i}$;

$$б)\quad (2-i)\cdot(i+1)-(1{,}5i+1)\cdot 4i=2i-i^2+2-i-6i^2-4i=$$
$$=2i+1+2-i+6-4i=9-3i;$$

$$в)\quad \frac{1}{1+2i}+\frac{i}{2-i}=\frac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)}=\frac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)}=\frac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)}=$$
$$=\frac{0}{(1+2i)(2-i)}=0;$$

$$г)\quad \frac{2}{1+i}-\frac{1-i}{1+2i}\cdot(2-i)=\frac{2}{1+i}-\frac{2-2i-i+i^2}{1+2i}=\frac{2}{1+i}-\frac{2-2i-i-1}{1+2i}=$$
$$=\frac{2}{1+i}-\frac{1-3i}{1+2i}=\frac{2(1+2i)-(1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)}=\frac{2+4i-(1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2}=$$
$$=\frac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2}=\frac{-2+6i}{-1+3i}=\frac{2(-1+3i)}{(-1+3i)}=2;$$

$$д)\quad (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2}+(i\sqrt{2})^2=2+2\cdot 2i+i^2\cdot 2=2+4i-2=4i$$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z=\dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2}$,

если известно $Z_1=(6+8i)$ Ом; $Z_2=8i$ Ом.

Решение:

$$Z=\frac{(6+8i)\cdot 8i}{6+8i+8i}=\frac{48i+64i^2}{6+16i}=\frac{-64+48i}{6+16i}=\frac{-32+24i}{3+8i}=$$
$$=\frac{(-32+24i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)}=\frac{-96+72i+256i-192i^2}{9+64}=$$
$$=\frac{-96+328i+192}{73}=\frac{96+328i}{73}\approx(1{,}32+4{,}5i)\,Ом\ .$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

а) $\left|Z-2i\right|=3$;

б) $\mathrm{Re}\left(Z^2\right)=1$;

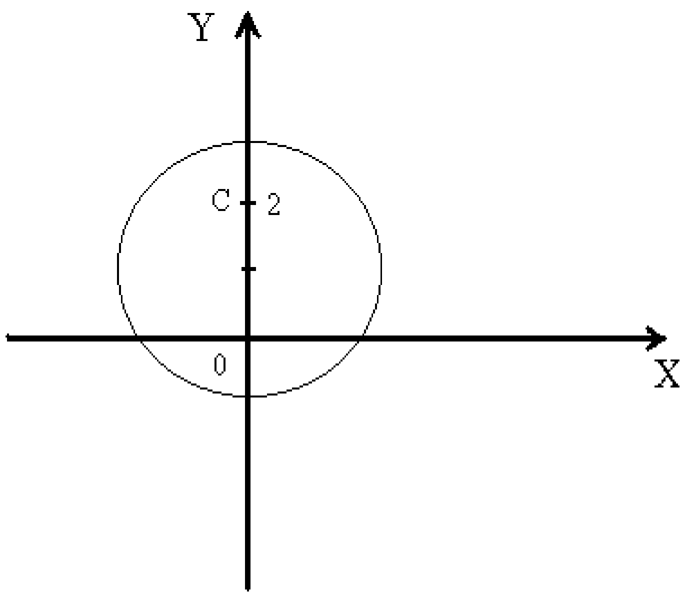
в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $2\operatorname{Re} Z - \left(JmZ\right)^2 = 1$.

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. Z = x + iy, то Z – 2i = x + iy – 2i = x + i(y – 2).

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$, $x^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



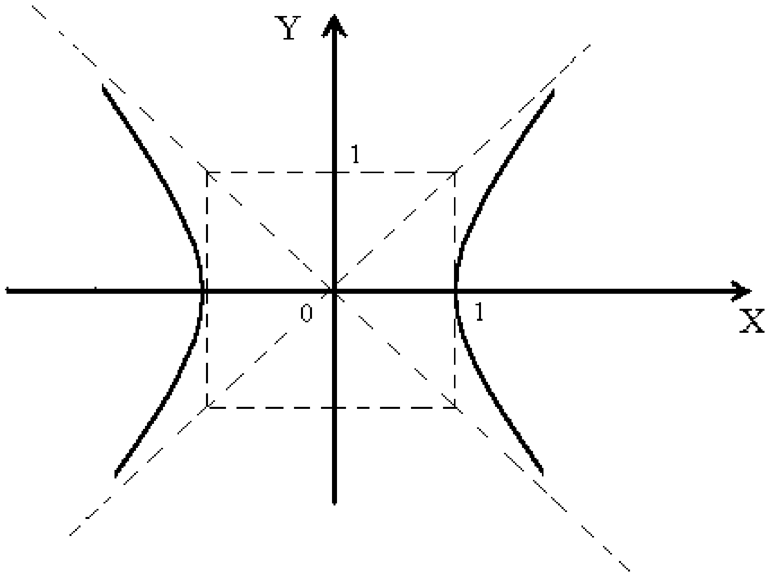

б) $\operatorname{Re}\left(Z^2\right) = 1$.

Т.к. Z = $x + iy$, то

$Z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$

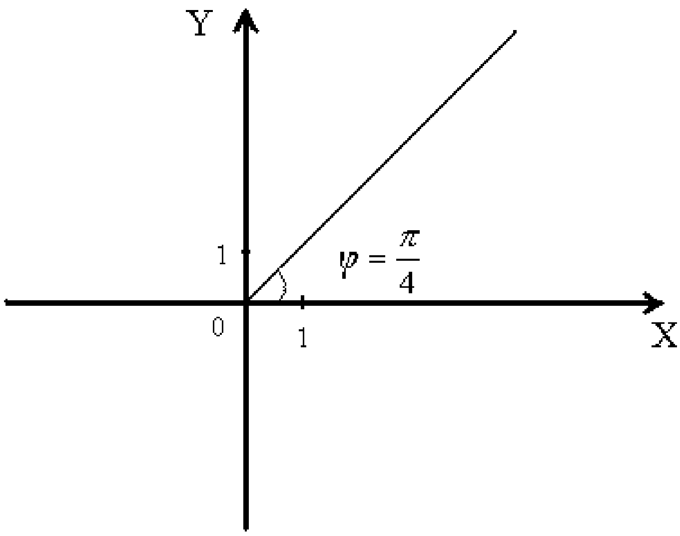
По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы. Вершина находится в начале координат, полуоси: а = в = 1.




в) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\dfrac{y}{x}$, то $arctg\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой y = x, лежащие только в I четверти.

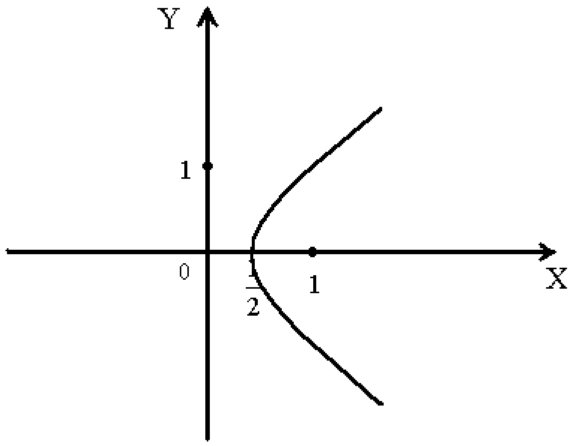



г) $2\operatorname{Re} Z - (JmZ)^2 = 1$.

Т.к. Z=$x$+$iy$, то ReZ=x, ImZ=y, тогда

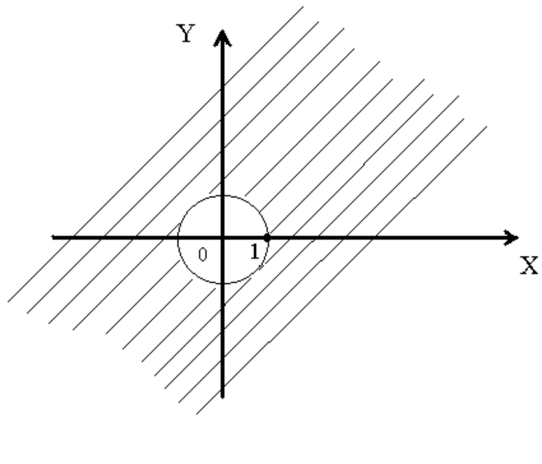
$$2x - y^2 = 1, \qquad 2x = y^2 + 1, \qquad x = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};0\right)$, ось OX – ось симметрии.




Пример 8. Изобразите области, заданные условиями:а) $|Z| \geq 1$; б) $|Z+2-i| \lhd 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z-1+i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$.Т.к. Z = x + iy, $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$, то




$\sqrt{x^2+y^2} \geq 1, x^2+y^2 \geq 1.$

б) $|Z+2-i| < 3$;

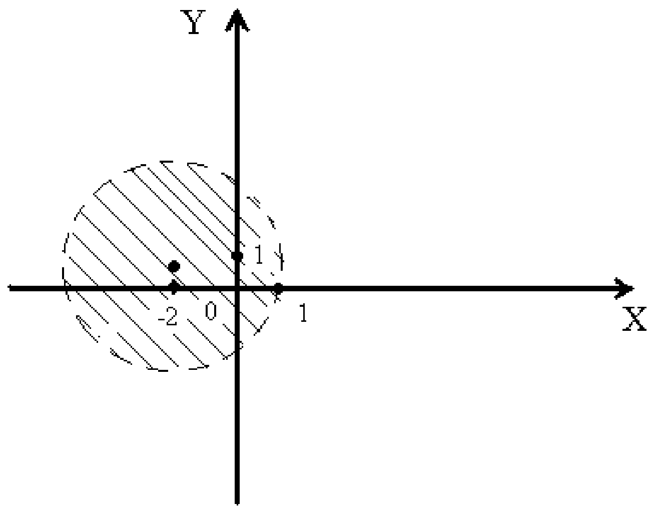
Т.к. Z = $x + iy$, то $Z+2-i = x+iy+2-i = (x+2)+(y-1)i$

Найдем $\left|Z+2-i\right|=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}.$

По условию $\left|Z+2-i\right|<3,$ т.е.

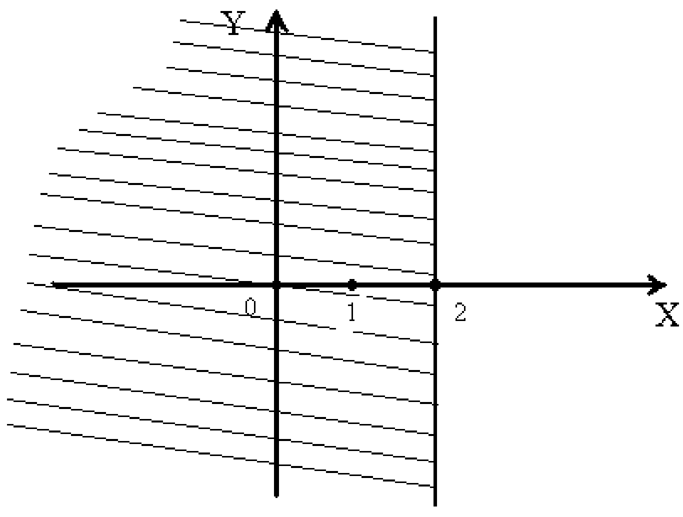
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}<3$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2<9.$$




в) $\operatorname{Re} Z \le 2.$

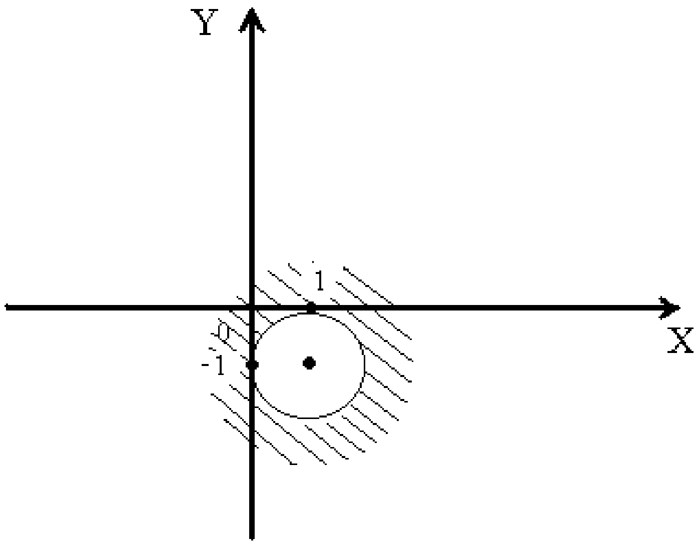
Т.к. Z = $x + iy,$ Re Z $=x$, то $x \le 2$.




г) $1 \le \left|Z-1+i\right|^2 \le 4.$

Т.к. Z = x + iy, Z – 1 + i = x + iy – 1 + i = (x – 1) + (y + 1) i,

$|Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}, |Z-1+i|^2=(x-1)^2+(y+1)^2,$ то $1\le(x-1)^2+(y+1)^2\le 4.$




д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \le 2 \\ 0 \le \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

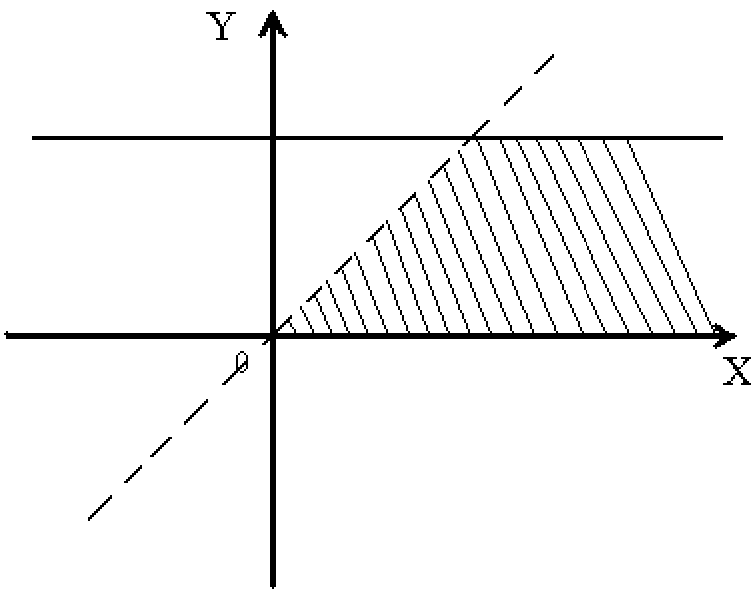
$JmZ \le 2.$

Т.к. Z = $x + iy$, ImZ = y, то $y \le 2$ , $0 \le \arg Z < \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = arctg\dfrac{y}{x}$, то $0 \le arctg\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{4}$; $tg0 \le \dfrac{y}{x} < tg\dfrac{\pi}{4}$

$0 \le \dfrac{y}{x} < 1$; $0 \le y < x$.

Т.о., $\begin{cases} y\le 2 \\ 0\le y \lhd x \end{cases}$




*Решите задачи*

**1.1**. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; -$i$; -2; 3 – 2$i$; 1 + 2$i$; - 1 – $i$.

**1.2**. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел $Z_1$ и $Z_2$, если:

1) $Z_1 = 4 + 5i; Z_2 = 3 - 2i.$

2) $Z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i; Z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i.$

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел $Z_1$ и $Z_2$, если:

1) $Z_1 = 3 + 4i; \quad Z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i.$

2) $Z_1 = 1 - 2i; \quad Z_2 = 0{,}6.$

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i; \quad Z_2 = \sqrt{5} - 2i.$

1.3. Найдите мнимую часть Z, если:

1) $$Z = (2-i)^3 \cdot (2+11i).$$

2) $$Z = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6.$$

3) $$Z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

1) $$i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$$

2) $$2i \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i).$$

3) $$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$$

4) $$\frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}.$$

5) $$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

6) $$(7+i) \cdot (2-i) - (3+5i) \cdot (-i).$$

7) $$i(3-i) - (2+3i) \cdot (1-i).$$

8) $$\frac{3}{i} + \frac{5-i}{2} - \frac{10+i}{1+i.}$$

**1.6**. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

а) $Z_1 = 2i\,(x + 2yi) + 3x$ и $Z_2 = 1 - 2i$ ;

б) $Z_2 = y^2 - 7y + 9xi$ и $Z_2 = -12 + 20i + x^2 i$

равны.

**1.7**. Найдите модуль комплексного числа Z:

1) Z = -4;

2) Z = -*i;*

3) $Z = -5 - 2\sqrt{6}\,i;$

4) $Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i;$

5) $Z = \dfrac{2-i}{1+i}.$

**1.8**. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

1) $|Z+1| = 1;$

2) $|Z-2| + |Z+2| = 26;$

3) $|Z-2|^2 + |Z+2|^2 = 26;$

4) $|Z|^2 + 3Z + 3Z = 0;$

5) $|2i - Z|^2 = 1;$

6) $\operatorname{Im}Z^2 = 4;$

7) $\arg Z = \dfrac{3\pi}{4};$

8) $(\operatorname{Im}Z)^2 = 4 - \operatorname{Re} Z.$

**1.9.** Изобразите области, заданные условиями:

1) $|Z + 2i - 1| \le 2;$

2) $|Z - i| < |Z + i|;$

3) $\lg|Z - 10i| < 2;$

4) $1 \le \operatorname{Re} Z \le 4;$

5) $|Z + i| \le 1;$

6) $\dfrac{\pi}{6} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4};$

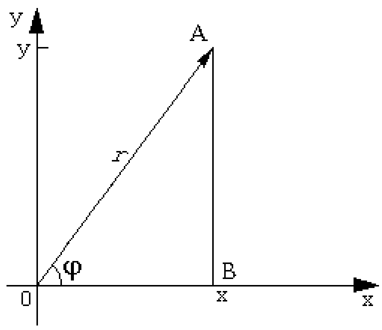
7) $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg Z \le \dfrac{\pi}{2};$

8) $\begin{cases} 1 < \operatorname{Re} Z < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$

***Практическое занятие № 2***

***Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Показательная функция комплексного переменного***

**1.** Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме:




$z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$.Рассмотрим $\Delta AOB$, где $B(x,0)$.

Пусть r - модуль комплексного числа z; -один из его аргументов (любой). Тогда из $\Delta AOB$ следует, что $x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z.

*Пример 1.* Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а $\varphi_1 = arctg\frac{y}{x} - \pi = arctg\frac{-1}{-1} - \pi = arctg1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$, то $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ - один из аргументов $z_3$, получаем $|z_3| = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$\varphi_4 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{4}{-3} + \pi \approx 2{,}21424\,рад \approx 126^o 52'$,

получаем $z_4 = 5(\cos(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}))$

или $z_4 = 5(\cos 126^o 52' + i\sin 126^o 52'))$.

*Пример 2*. Записать числа в тригонометрической форме

$z_1 = 2\cos\frac{7\pi}{4} - 2i\sin\frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos\frac{\pi}{17} - i\sin\frac{\pi}{17}$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4})$, а $-\sin\frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для $z_1$: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$. Аналогично учитывая, что $-\cos\frac{\pi}{17} = \cos(\pi - \frac{\pi}{17}) = \cos\frac{16\pi}{17}, \sin\frac{\pi}{17} = \sin(\pi - \frac{\pi}{17}) = \sin\frac{16\pi}{17}$,

получаем $z_2 = \cos\frac{16\pi}{17} - i\sin\frac{16\pi}{17}$.

**2**. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$,

то-

гда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_1(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

*Пример 3*. Найти произведение чисел

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$ и $z_2 = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}$.

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8})$ или $z_1 \cdot z_2 = 4\cos(\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8})$.

*Пример 4*. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = \dfrac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}$.

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргумент $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z| = \dfrac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \dfrac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

а аргумент $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi$.

Следовательно, $z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{11\pi}{12}) + i\sin(-\frac{11\pi}{12}))$.

**3**. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathrm{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3}-i)^9$ .

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3}-i)^9 = 2^9(\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i\sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

**4**.**Корнем n-ой степени** из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + \pi k}{n}\right)$ (1), где k=0,1,2,…,n-1.

*Пример 6*.Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$.

Решение: а) запишем число Z=-16 в тригонометрической форме

$Z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) = i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right)$$, где k=0,1,2,3.

Следовательно,

$$W_0 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\cdot$$

б) Модуль числа $i$ равен единице, а аргумент равен $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1) = 2}$,

$$\varphi = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Поформуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2}\right)\right), \text{ где } k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i,$$

$$W_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}i\,.$$

*Пример7.* Записать число $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ в алгебраической форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5+12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i}=x+iy$, тогда $5+12i=x^2+2xyi-y^2$ и, следовательно, $x$ и $y$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3;2)$ и $(-3;-2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i}=-3-2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i}=-3+2i$. Таким образом, $Z=\dfrac{-3-2i-(-3+2i)}{-3-2i+(-3+2i)}=\dfrac{2}{3}i$.

**5.** Пусть $z=x+iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной.**

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w, то w есть функция комплексной переменной z. Функции комплексного аргумента обозначают w=f(z) или w=w(z)

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2)$$

Свойства показательной функции:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

2. $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

3. $(e^z)^m = e^{mz}$ где $m$ – целое число

4. $e^{z+2\pi i} = e^z$

Если в формуле (2) положим $x$=0, то получим $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ перейти к показательной форме $z = re^{i\varphi}$ где r - модуль числа z, а $\varphi$- его аргумент.

а) Если $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$,

то $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, (3)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (4)$$

б) Если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$ (5)

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi K}{n})i}$, где к=0,1,2,3,4,5...,n-1.

*Пример 8.* Представить в показательной форме комплексное число $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$.

Решение. Находим модуль числа $|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ и один из его аргументов $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$., откуда, $z = \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

*Пример 9.* Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3}+i, \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}, i-1$ представим в показательной форме

$$-\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12} = \cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}) = e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i}e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

*Пример 10.* Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Решение: $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}}$ (к=0,1,2,3).

## Решите задачи

**2.1**. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z = -\sqrt{3} + i$,

2) $Z = -1$,

3) $Z = -\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$,

4) $Z = 1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\dfrac{10\pi}{9}$,

5) $Z = \mathrm{tg}1 - i$.

**2.2**. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z = \dfrac{i\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}}$,

2) $Z = \dfrac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3} - i\sin\dfrac{4\pi}{3}}$,

3) $Z = \dfrac{1}{(1+i)^2}$,

4) $Z = \dfrac{-\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12} - i\sin\dfrac{13\pi}{12}}$,

5) $Z = \dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

**2.3**. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) $Z = \dfrac{5\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)i}{3\left(\cos 40^0 - i\sin 40^0\right)}$,

2) $Z = \dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

**2.4** . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z = \left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z = \left(\cos 31^0 + i\sin 31^0\right)^{-10}$,

3) $Z = -\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^6}$,

4) $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

**2.5**. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

1) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$,

2) $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3}i + 1}{i-1}\right)^6$,

3) $Z = \dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N$,

4) $Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4$,

5) $Z\left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

**2.6**. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

1) $Z = -1, n = 3$,

2) $Z = 8i, n = 3$,

3) $Z = 1, n = 5$,

4) $Z = 1 + i, n = 8$.

**2.7** . Решить уравнения:

1) $Z^3 = 1 + i$,

2) $Z^4 + 1 = 0$,

3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i$,

4) $Z^6 + 64 = 0$,

5) $Z^2 = \overline{Z}^3$.

**2.8** . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z = e^{2-i}$,

2) $Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i}$,

3) $Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi}{2}i}$.

**2.9**. Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z = -\sqrt{12} - 2i$,

2) $Z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

**2.10**. Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$,

2) $Z = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{-3}$,

3) $Z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$,

4) $Z = \dfrac{1}{\left(\cos 12^0 + i \sin 12^0\right)^5}$,

5) $Z = \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$.

**2.11**. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$ :

1) $Z = 1, n = 3$,

2) $Z = -1, n = 5$,

3) $Z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3$,

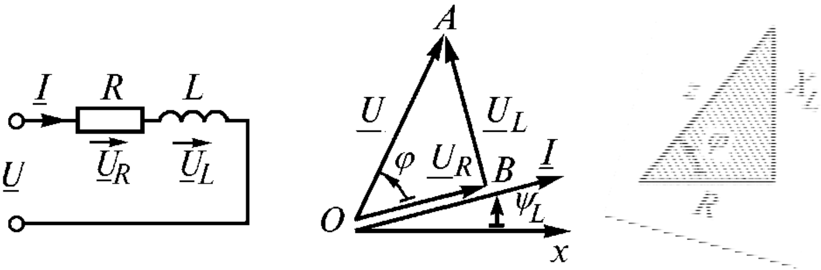
4) $Z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4$.

## *Практическое занятие №3*
### *Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока*

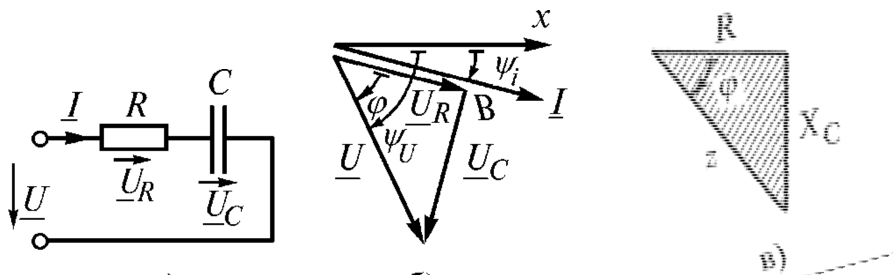
Цель занятия: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

Методика проведения занятия: Необходимы теоретические сведения

1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:

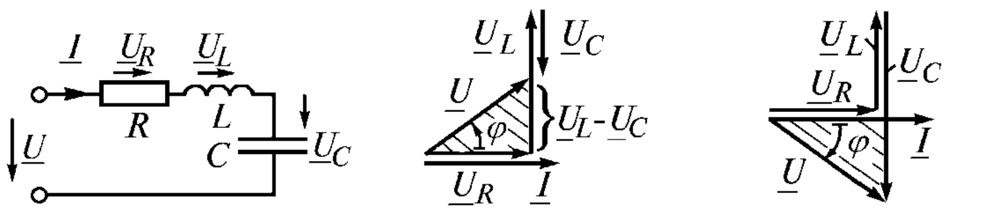



2. Цепь, содержащая резистор и конденсатор:

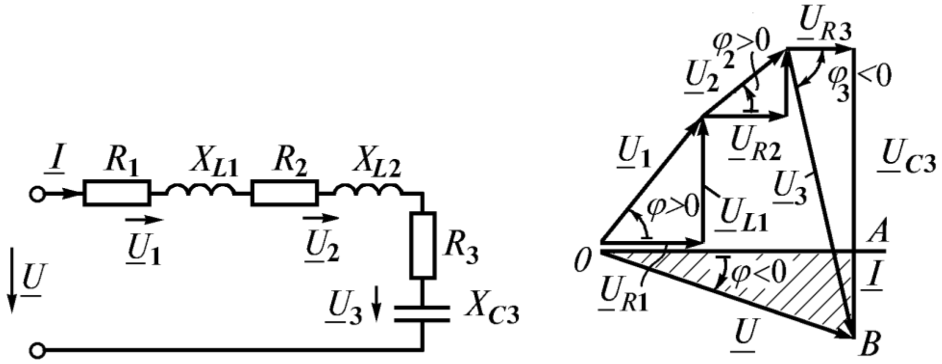



а) б) в)

3. Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и

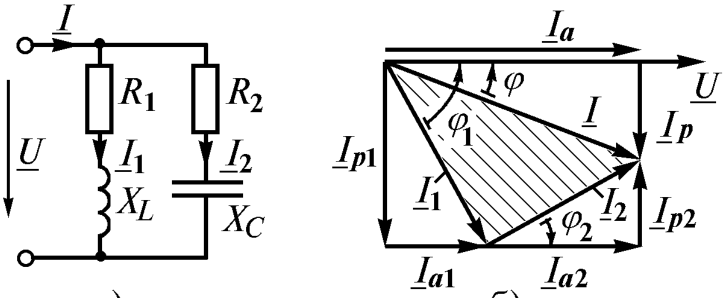



конденсатора:




а) б)

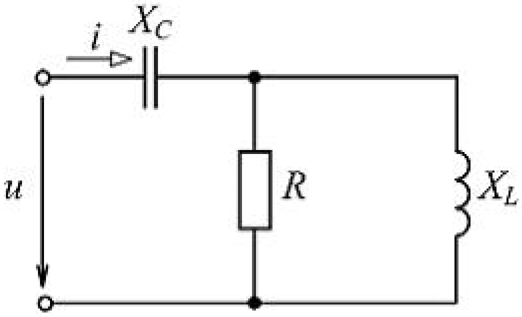
4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:




а) б)

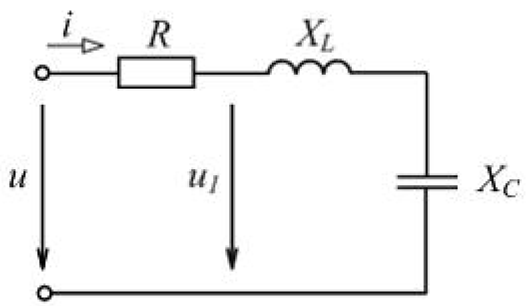
Примеры решения задач:

1. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**




При $R = X_L = X_C = 20\ Ом$ комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $\underline{Z}_{вх}$ равно ____ $Ом$, напряжение $u$ __________ по фазе от тока *i* на угол …

2. **Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями**




При $u = 282{,}8 \sin \omega t\ B,\ R = 6\ Ом,\ X_L = 10\ Ом,\ X_C = 2\ Ом$ действующее значение напряжения $U_1$ в цепи, показанной на рисунке, равно ___ *В*. Построить векторную диаграмму.

***Практическое занятие №4***
***Разложение аналитической функции в ряд Фурье***

Рядом Фурье периодической функции f(x) с периодом 2π, определенной на сегменте [–π, π], называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cosnx + b_n sinnx\right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx \; (n = 0,1,2, \dots), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx \; (n = 0,1,2, \dots), \tag{3}$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма S(x) есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. S(x+2π) = S(x).

**Теорема Дирихле.** Пусть функция f(x) на сегменте [–π, π] имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента [–π, π] и сумма этого ряда S(x) вычисляется:

1) S(x) = f(x) во всех точках неразрывности f(x), лежащих внутри сегмента [–π, π];

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0)] + f(x_0 + 0)$, где $x_0$ – точка разрыва 1-го рода функции f(x);

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(\pi - 0)] + f(\pi + 0)$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда f(x) – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свобоный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) cosnxdx \; (n = 0,1,2, \dots). \tag{5}$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx, \tag{6}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \tag{7}$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от $2\pi$. В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2\ell$, для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{8}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{9}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{10}$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{11}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\,. \tag{12}$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{13}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{14}$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты $a_n$ и $b_n$ по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких $x$ полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода $2\pi$, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

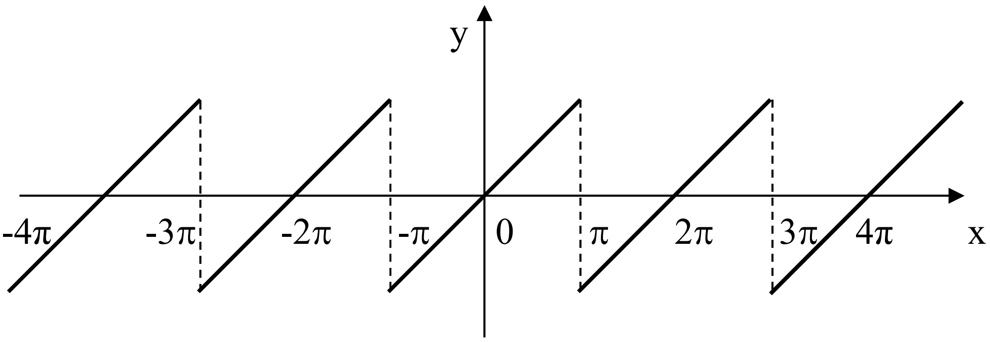



Рис. 1

**Решение.** Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты Фурье $\left( \text{интегрируем по частям} \left| \begin{matrix} x = u, & \sin nx\,dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| \right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[ \left. \frac{-x\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx}_{=0} \right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[ \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + \ldots \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

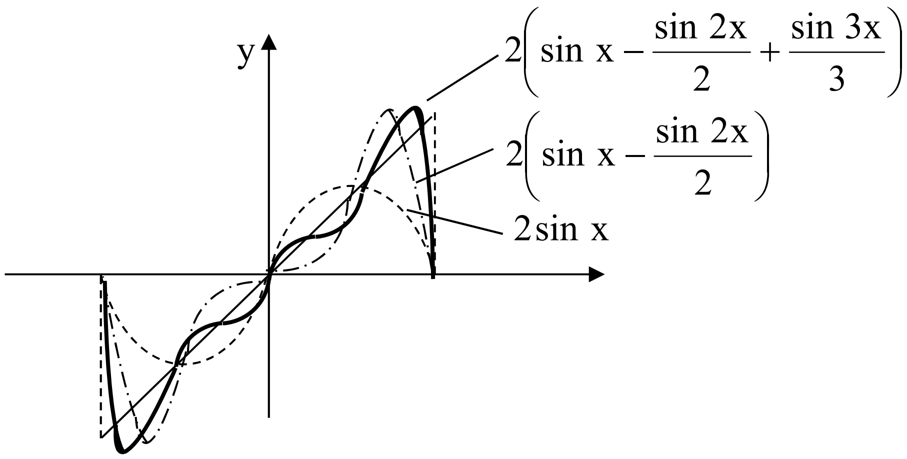



Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2\pi$, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0;\quad a<x\le\pi\\ 1, & 0<x<a\\ \frac{1}{2}, & x=0,\ x=a\end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

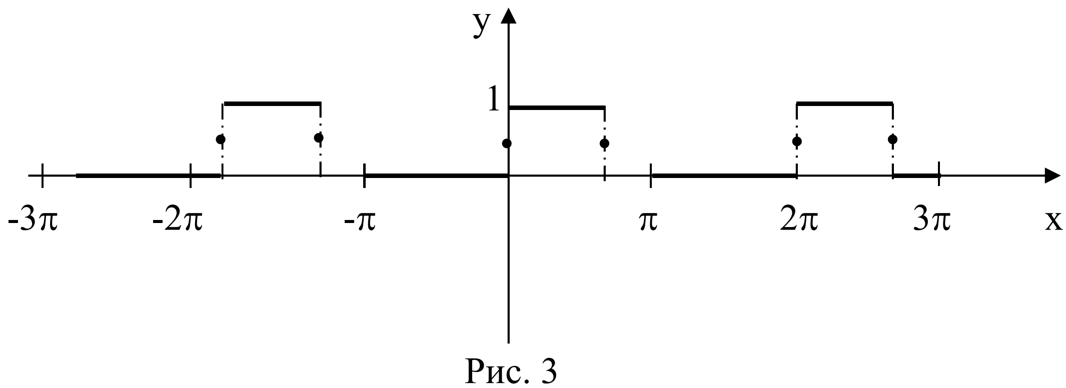



Рис. 3

**Решение.** Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a dx=\frac{x}{\pi}\Big|_0^a=\frac{a}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^a=\frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\sin\,nx\;dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\cos\,nx\right)\Big|_0^a = \frac{\cos\,nx}{\pi n}\Big|_0^a = \frac{1-\cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n\pi}\cdot\cos nx + \frac{1-\cos na}{n\pi}\cdot\sin na\,.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале $(0;4)$ формулой $f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$

Построим график функции (рис. 4).

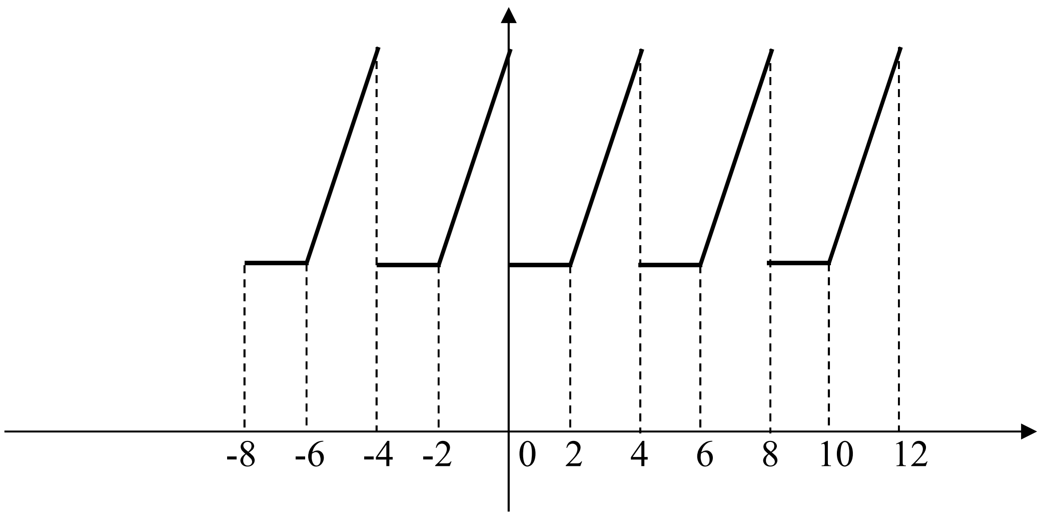



Рис. 4

**Решение.** Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 3x\,\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + 3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right] = \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right),\quad n \neq 0\,.$$

При а – четном $\cos\,n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos\,n\pi = -1$ и $a_n = \dfrac{12}{n^2\,\pi^2}$.

При n=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Big|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}dx}_{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos\pi n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12-\cancel{12\cos n\pi}+24+\cancel{12\cos n\pi}\right]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\dots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\dots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ - $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x) = |\,x\,|$ (рис. 5).

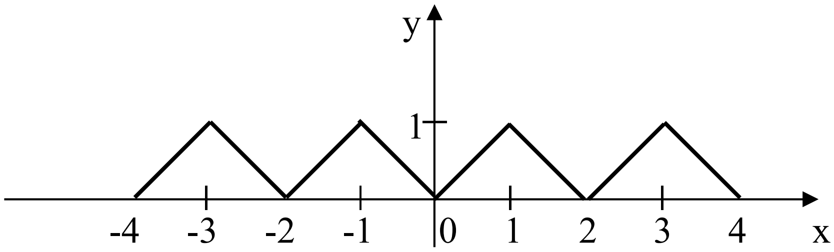



Рис. 5

**Решение.** Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2\int\limits_0^1 x\,dx = 2\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\left.\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

## ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2\pi$, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

**Ответ:** $f(x) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{10}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{12} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2\pi$, заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \dfrac{x}{2}$.

**Ответ:** $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2\pi$, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой $y=|\sin x|$.

**Ответ:** $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+...+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+...\right]$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2\pi$, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=\pi+x$.

**Ответ:** $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0\le x<1, \\ 2-x & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x).$$

**Ответ:** $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -3<x\le 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x<3, \end{cases} \qquad f(x+6)=f(x).$$

**Ответ:** $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$f(x)=10-x$ при $5<x<15$, $f(x+10)=f(x)$.

**Ответ:** $f(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

***Практическое занятие №5***

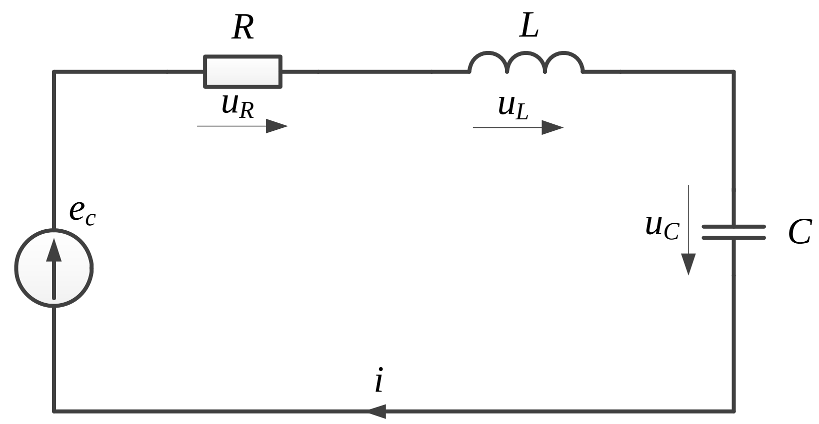
***Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока***

Цель: закрепить навыки использования комплексных чисел и рядов Фурье для анализа электрических цепей.

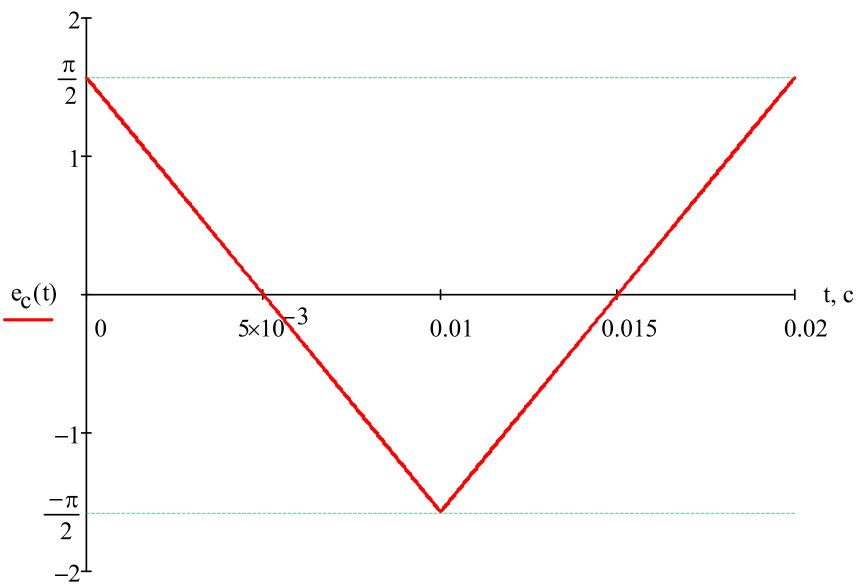
Задание: используя разложение в ряд Фурье сигналов (треугольного и однополупериодного выпрямления), рассчитать электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения источника несинусоидального напряжения, резистивного, емкостного и индуктивного элемента. При разложении в ряд Фурье ограничиться 7 первыми гармониками, построить временные зависимости тока, протекающего в электрической цепи, напряжений на резистивного, емкостного и индуктивного элементах.

Указания: параметры элементов L = 100 мГн; C = 100 мкФ; R = 30 Ом.
Частота основной (первой) гармоники 50 Гц.
Для расчета необходимо перейти от мгновенного значения каждой гармоники к комплексу ее действующего значения, рассчитать комплексное сопротивление элементов, произвести расчет для данной гармоники, произвести переход от комплекса действующего значения к мгновенному.

Схема цепи




Форма воздействующего напряжения




Частота воздействующего напряжения

$f = 50Гц \quad \omega = 2\pi f = 314.159 \cdot рад/с$

Разложение в ряд Фурье (пример 5 из ПЗ № 6 с заменой cosφ на sin(φ+π/2) )

$$e_c(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin\left[(2k+1)\cdot\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)^2}$$

Мгновенные значения первых гармоник

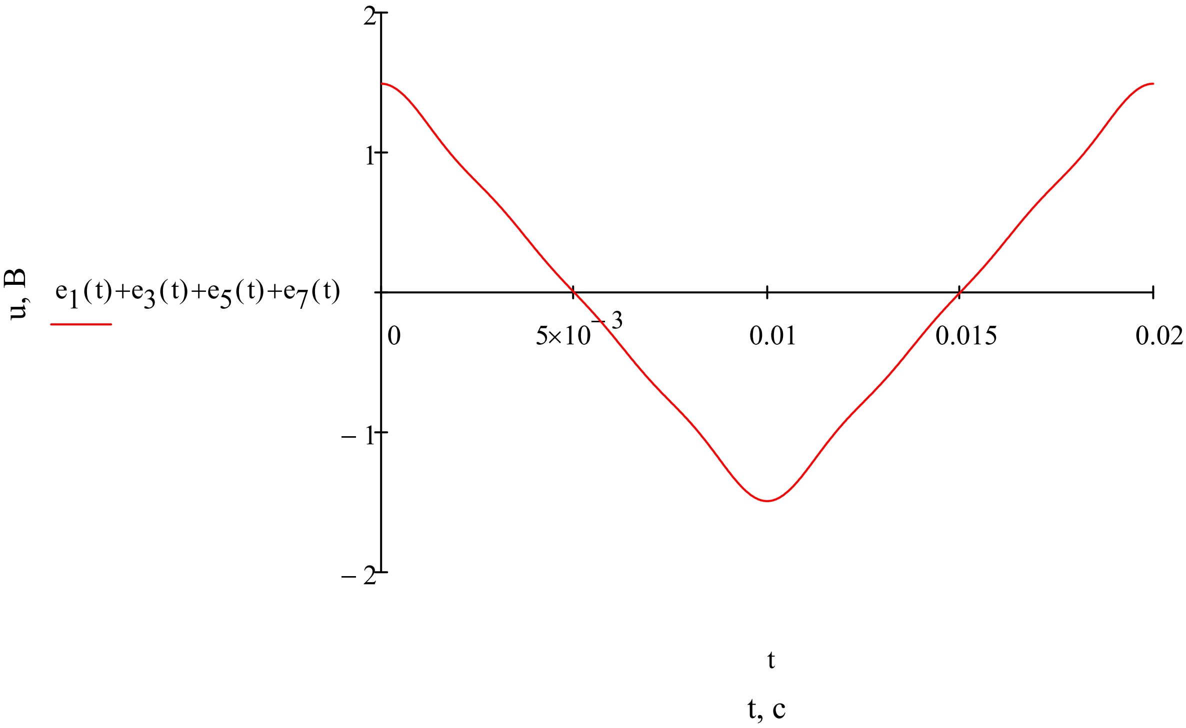
$$e_1(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) В$$

$$e_3(t) = \frac{4}{9\pi} \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) В$$

$$e_5(t) = \frac{4}{25\pi} \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) В$$

$$e_7(t) = \frac{4}{49\pi} \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) В$$

Исходный сигнал




Комплексы действующих значений первых гармоник

$$\underline{E_1} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.9j\cdot B$$

$$\underline{E_3} = \frac{4}{9\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.1j\cdot B$$

$$\underline{E_5} = \frac{4}{25\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.036j\cdot B$$

$$\underline{E_7} = \frac{4}{49\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 0.018j\cdot B$$

Параметры элементов

$C = 100\cdot10^{-6}Ф \quad L = 100\cdot10^{-3}Гн \quad R = 30Ом$

Сопротивления для гармоник, нулевая (постоянная составляющая) отстутствует

$$\underline{x_{C1}} = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C} = -31.831j\cdot Ом$$

$$\underline{x_{L1}} = j\cdot\omega\cdot L = 31.416j\cdot Ом$$

$$\underline{Z_1} = R + \underline{x_{C1}} + \underline{x_{L1}} = (30 - 0.415j)\cdot Ом$$

$$\underline{x_{C3}} = \frac{\underline{x_{C1}}}{3} = -10.61j\cdot Ом$$

$$\underline{x_{L3}} = \underline{x_{L1}}\cdot 3 = 94.248j\cdot Ом$$

$\underline{Z_3} = R + \underline{X_{C3}} + \underline{X_{L3}} = (30 + 83.637j) \cdot Ом$

$\underline{X_{C5}} = \dfrac{\underline{X_{C1}}}{5} = -6.366j \cdot Ом$

$\underline{X_{L5}} = \underline{X_{L1}} \cdot 5 = 157.08j \cdot Ом$

$\underline{Z_5} = R + \underline{X_{C5}} + \underline{X_{L5}} = (30 + 150.713j) \cdot Ом$

$\underline{X_{C7}} = \dfrac{\underline{X_{C1}}}{7} = -4.547j \cdot Ом$

$\underline{X_{L7}} = \underline{X_{L1}} \cdot 7 = 219.911j \cdot Ом$

$\underline{Z_7} = R + \underline{X_{C7}} + \underline{X_{L7}} = (30 + 215.364j) \cdot Ом$

Расчет для первой гармоники

$\underline{I_1} = \dfrac{\underline{E_1}}{\underline{Z_1}} = \left(-4.151 \times 10^{-4} + 0.03j\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_1}\right| = 0.03 \cdot A \qquad \psi 1 = \arg\left(\underline{I_1}\right) = 1.585 = 90.814 \cdot °$

$\underline{U_{R1}} = \underline{I_1} \cdot R = (-0.012 + 0.9j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R1}}\right| = 0.9 \cdot B \qquad \psi_{R1} = \arg\left(\underline{U_{R1}}\right) = 1.585 = 90.814 \cdot °$

$\underline{U_{L1}} = \underline{I_1} \cdot \underline{X_{L1}} = (-0.943 - 0.013j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{L1}}\right| = 0.943 \cdot B \qquad \psi_{L1} = \arg\left(\underline{U_{L1}}\right) = -3.128 = -179.221 \cdot °$

$\underline{U_{C1}} = \underline{I_1} \cdot \underline{X_{C1}} = (0.955 + 0.013j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{C1}}\right| = 0.955 \cdot B \qquad \psi_{C1} = \arg\left(\underline{U_{C1}}\right) = 0.01383 = 0.792 \cdot °$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{I_1}\right| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi 1) = 0.04244 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \;\; A$

$u_{R1}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{R1}}\right| \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \psi_{R1}\right) = 1.273 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \;\; B$

$u_{L1}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{L1}}\right| \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \psi_{L1}\right) = 1.333 \cdot \sin(314.2 \cdot t - 3.128) \;\; B$

$u_{C1}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|\underline{U_{C1}}\right| \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \psi_{C1}\right) = 1.351 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 0.01383) \quad B$

Расчет для третьей гармоники

$\underline{I_3} = \dfrac{\underline{E_3}}{\underline{Z_3}} = \left(1.06 \times 10^{-3} + 3.801j \times 10^{-4}\right) \cdot A$

$\left|\underline{I_3}\right| = 1.126 \times 10^{-3} \cdot A \quad \psi 3 = \arg\left(\underline{I_3}\right) = 0.3444 = 19.733 \cdot °$

$\underline{U_{R3}} = \underline{I_3} \cdot R = (0.032 + 0.011j) \cdot B$

$\left|\underline{U_{R3}}\right| = 0.034 \cdot B \qquad \psi_{R3} = \arg\left(\underline{U_{R3}}\right) = 0.3444 = 19.733 \cdot °$

$\underline{U_{L3}} = \underline{I_3}\cdot\underline{X_{L3}} = (-0.036 + 0.1j)\cdot B$

$\left|\underline{U_{L3}}\right| = 0.106\cdot B \qquad \psi_{L3} = \arg\left(\underline{U_{L3}}\right) = 1.915 = 109.721\cdot°$

$\underline{U_{C3}} = \underline{I_3}\cdot\underline{X_{C3}} = \left(4.033\times10^{-3} - 0.011j\right)\cdot B$

$\left|\underline{U_{C3}}\right| = 0.012\cdot B \qquad \psi_{C3} = \arg\left(\underline{U_{C3}}\right) = -1.226 = -70.245\cdot°$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_3(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_3}\right|\cdot\sin(300\pi\cdot t + \psi3) = 0.001592\cdot\sin(942.5\cdot t + 0.344{\cdot}A$

$u_{R3}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R3}}\right|\cdot\sin\left(300\pi\cdot t + \psi_{R3}\right) = 0.04776\cdot\sin(942.5\cdot t + 0.3444)\ B$

$u_{L3}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L3}}\right|\cdot\sin\left(300\pi\cdot t + \psi_{L3}\right) = 0.1501\cdot\sin(942.5\cdot t + 1.915)\ B$

$u_{C3}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C3}}\right|\cdot\sin\left(300\pi\cdot t + \psi_{C3}\right) = 0.01689\cdot\sin(942.5\cdot t - 1.226)\quad B$

Расчет для пятой гармоники

$\underline{I_5} = \frac{\underline{E_5}}{\underline{Z_5}} = \left(2.298\times10^{-4} + 4.575j\times10^{-5}\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_5}\right| = 2.344\times10^{-4}\cdot A \qquad \psi5 = \arg\left(\underline{I_5}\right) = 0.1965 = 11.259\cdot°$

$\underline{U_{R5}} = \underline{I_5}\cdot R = \left(6.895\times10^{-3} + 1.373j\times10^{-3}\right)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R5}}\right| = 7.031\times10^{-3}\cdot B \qquad \psi_{R5} = \arg\left(\underline{U_{R5}}\right) = 0.1965 = 11.259\cdot°$

$\underline{U_{L5}} = \underline{I_5}\cdot\underline{X_{L5}} = \left(-7.186\times10^{-3} + 0.036j\right)\cdot B$

$\left|\underline{U_{L5}}\right| = 0.037\cdot B \qquad \psi_{L5} = \arg\left(\underline{U_{L5}}\right) = 1.767 = 101.242\cdot°$

$\underline{U_{C5}} = \underline{I_5}\cdot\underline{X_{C5}} = \left(2.913\times10^{-4} - 1.463j\times10^{-3}\right)\cdot B$

$\left|\underline{U_{C5}}\right| = 1.492\times10^{-3}\cdot B \qquad \psi_{C5} = \arg\left(\underline{U_{C5}}\right) = -1.374 = -78.724\cdot°$

Мгновенные значения токов и напряжений

$i_5(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_5}\right|\cdot\sin(500\pi\cdot t + \psi5) = 0.0003314\cdot\sin(1571.0\cdot t + 0.1965)$

$u_{R5}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R5}}\right|\cdot\sin\left(500\pi\cdot t + \psi_{R5}\right) = 0.009943\cdot\sin(1571.0\cdot t + 0.1965)$

$u_{L5}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L5}}\right|\cdot\sin\left(500\pi\cdot t + \psi_{L5}\right) = 0.05206\cdot\sin(1571.0\cdot t + 1.767)$

$u_{C5}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C5}}\right|\cdot\sin\left(500\pi\cdot t + \psi_{C5}\right) = 0.00211\cdot\sin(1571.0\cdot t - 1.374)$

Расчет для седьмой гармоники

$\underline{I_7} = \frac{\underline{E_7}}{\underline{Z_7}} = \left(8.369\times10^{-5} + 1.166j\times10^{-5}\right)\cdot A$

$\left|\underline{I_7}\right| = 8.45\times10^{-5}\cdot A \qquad \psi7 = \arg\left(\underline{I_7}\right) = 0.1384 = 7.93\cdot°$

$\underline{U_{R7}} = \underline{I_7}\cdot R = \left(2.511\times10^{-3} + 3.497j\times10^{-4}\right)\cdot B$

$\left|\underline{U_{R7}}\right| = 2.535\times10^{-3}\cdot B \qquad \psi_{R7} = \arg\left(\underline{U_{R7}}\right) = 0.1384 = 7.93\cdot°$

$$\underline{U_{L7}} = \underline{I_7}\cdot\underline{X_{L7}} = \left(-2.564\times10^{-3} + 0.018j\right)\cdot B$$

$$\left|\underline{U_{L7}}\right| = 0.019\cdot B \qquad \psi_{L7} = \arg\left(\underline{U_{L7}}\right) = 1.709 = 97.918\cdot{}^\circ$$

$$\underline{U_{C7}} = \underline{I_7}\cdot\underline{X_{C7}} = \left(5.301\times10^{-5} - 3.806j\times10^{-4}\right)\cdot B$$

$$\left|\underline{U_{C7}}\right| = 3.842\times10^{-4}\cdot B \qquad \psi_{C7} = \arg\left(\underline{U_{C7}}\right) = -1.432 = -82.048\cdot{}^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_7(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{I_7}\right|\cdot\sin(700\pi\cdot t + \psi7) = 0.0001195\cdot\sin(2199.0\cdot t + 0.1384)$$

$$u_{R7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{R7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{R7}\right) = 0.003585\cdot\sin(2199.0\cdot t + 0.1384)$$

$$u_{L7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{L7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{L7}\right) = 0.02628\cdot\sin(2199.0\cdot t + 1.709)$$

$$u_{C7}(t) = \sqrt{2}\cdot\left|\underline{U_{C7}}\right|\cdot\sin\left(700\pi\cdot t + \psi_{C7}\right) = 0.0005434\cdot\sin(2199.0\cdot t - 1.432)$$

Суммируем все гармоники

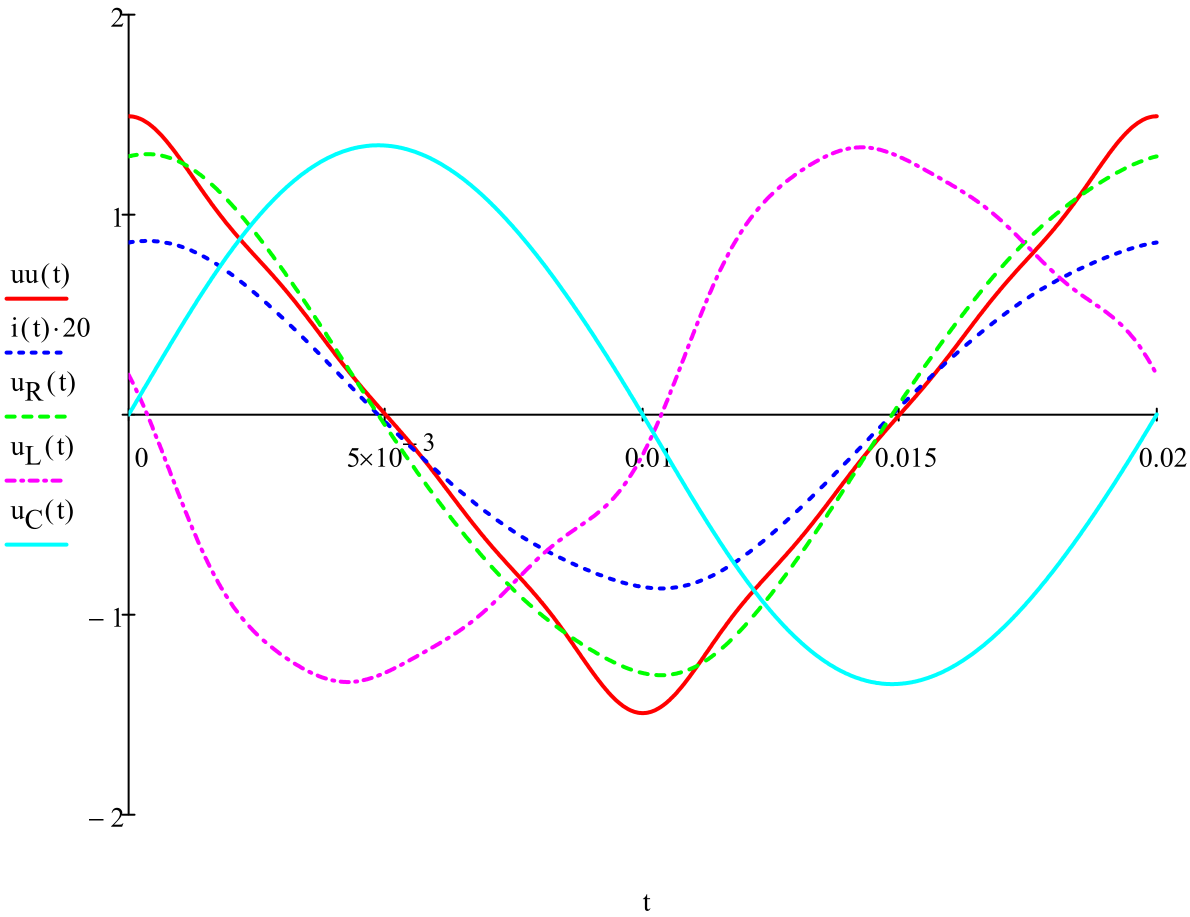
$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R3}(t) + u_{R5}(t) + u_{R7}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C3}(t) + u_{C5}(t) + u_{C7}(t)$$

$$u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L3}(t) + u_{L5}(t) + u_{L7}(t)$$

$$uu(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t)$$



## *Практическое занятие №6*
## *Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами*

Для того чтобы найти решение x(t) линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t), \tag{11}$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \tag{12}$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где X(p) – изображение искомого решения, F(p) – изображение функции f(t), а Q(p) – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0$, $x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x_0' = \cdots = x_0^{(n-1)} =$ $= 0$. Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n -$ характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для X(p), получим искомое решение x(t). Если считать $x_0,\ x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

**Пример 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

**Решение.** Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq p\,X(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2\,X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\dfrac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\dfrac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \dfrac{p^2 + p - 3}{(p-1)\left(p^2 + 4\right)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{6p + 11}{p^2 + 4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5}\,e^t + \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{11}{10}\sin 2t.$$

**Пример 2.** Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, \\ z' = z - x; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0{,}5; \quad z(0) = 0.$$

**Решение.** Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq p\,X$; $y' \doteq p\,Y - 0{,}5$; $z' \doteq p\,Z$.

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ \quad pY - Z = 0{,}5 + \dfrac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)\,(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq$$

$$\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2}\sin t.$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1} \doteq$$

$$\doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

**Ответ:** $\quad x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \dfrac{3}{2}\sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4}\cos t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t},$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4}\cos t - \frac{5}{4}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}.$$

Приведем еще несколько примеров.

**Пример 3.** Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t}\cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

**Решение.** В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1+\cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t}\cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 6t \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2+144} + \frac{p}{2(p^2+4)} - \frac{p}{2(p^2+36)} + \frac{3}{p}.$$

**Пример 4.** Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1,\ 3) \\ 0, & t \notin (1,\ 3) \end{cases}$$

**Решение.** Из рисунка 8 видно, что $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$; $f_1(t)=f_3(t-1)$; $f_2=f_4(t-3)$.

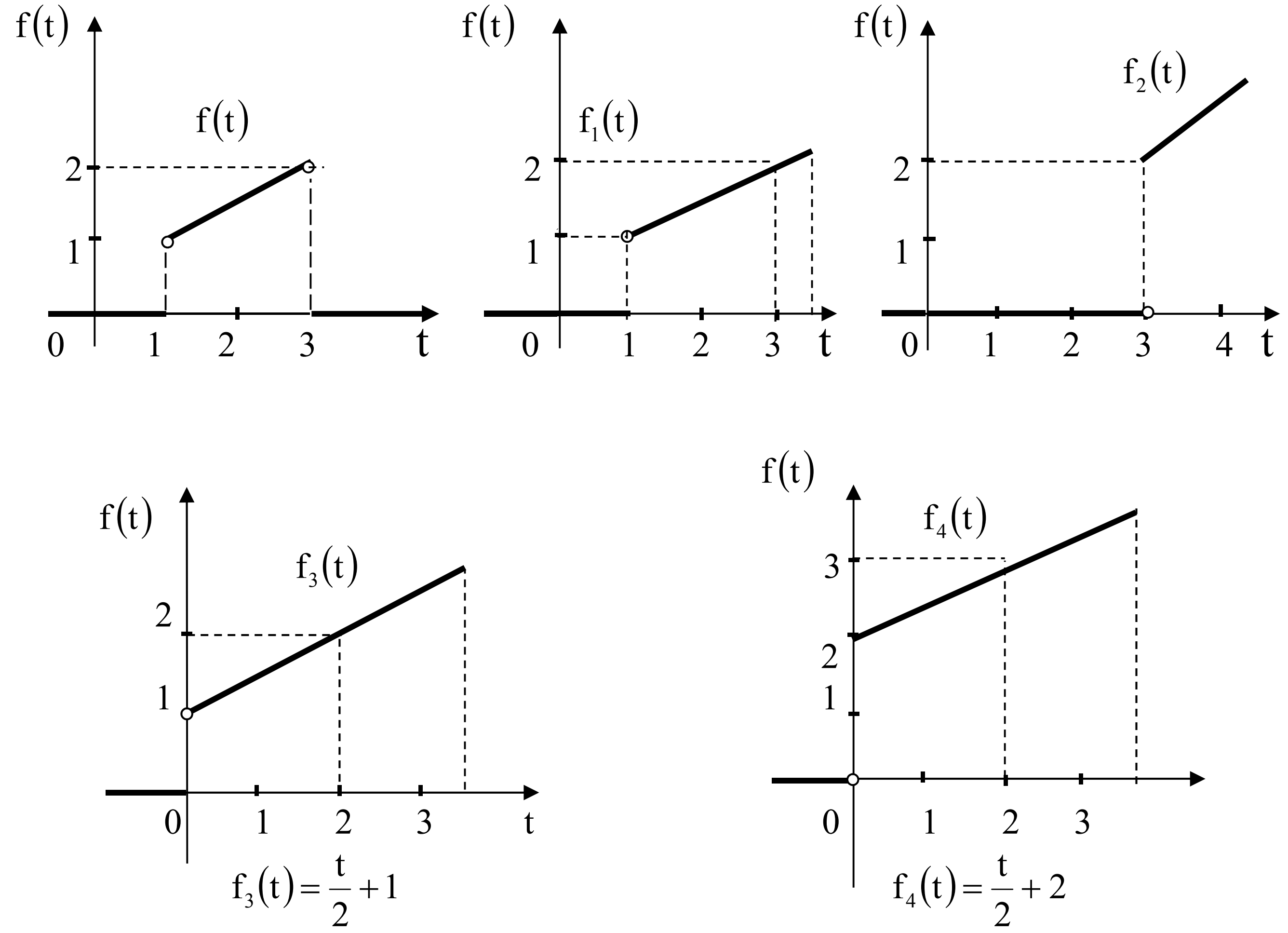



Рисунок 8

Так как $f_3(t)\doteq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{1}{p}$; $f_4(t)\doteq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала

получаем $$f(t)\doteq\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{2}{p}\right)e^{-3p}.$$

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

## Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x''+2x'-3x=e^{-t}, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases} \qquad x(0) = 2, \; y(0) = 1.$$

***Практическое занятие №7***

***Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации***

x = 1,54

Прямая интерполяционная формула Ньютона

$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q = \frac{x - x_0}{h},\ y_i = f_i$, а выражения вида $\Delta^k y_i$ — конечные разности.

Обратная интерполяционная формула Ньютона

$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q = \frac{x - x_n}{h}$

Решение в Excel приведено на следующей странице.

Результат 21,759.

Решение в Mathcad:

linterp – линейная интерполяция, interp – сплайн интерполяция, cspline – функция подбирающая коэффициенты для кубических сплайнов.

$$x := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2.718 \\ 3.320 \\ 4.055 \\ 4.953 \\ 6.049 \\ 7.389 \\ 9.025 \\ 11.023 \\ 13.464 \\ 16.445 \\ 20.086 \\ 24.533 \\ 29.964 \\ 36.598 \\ 44.701 \end{pmatrix}$$

linterp (x, y, 1.54) = 21.865

interp (cspline (x, y), x, y, 1.54) = 21.759

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | x | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | |
| 3 | 0,5 | ***2,718*** | ***0,602*** | ***0,133*** | ***0,030*** | ***0,005*** | ***0,006*** | ***-0,011*** | ***0,024*** | ***-0,044*** | ***0,071*** | ***-0,099*** | ***0,112*** | ***-0,077*** | ***-0,063*** | ***0,390*** | | |
| 4 | 0,6 | 3,320 | 0,735 | 0,163 | 0,035 | 0,011 | -0,005 | 0,013 | -0,020 | 0,027 | -0,028 | 0,013 | 0,035 | -0,140 | 0,327 | | | |
| 5 | 0,7 | 4,055 | 0,898 | 0,198 | 0,046 | 0,006 | 0,008 | -0,007 | 0,007 | -0,001 | -0,015 | 0,048 | -0,105 | 0,187 | | | | |
| 6 | 0,8 | 4,953 | 1,096 | 0,244 | 0,052 | 0,014 | 0,001 | 0,000 | 0,006 | -0,016 | 0,033 | -0,057 | 0,082 | | | | | |
| 7 | 0,9 | 6,049 | 1,340 | 0,296 | 0,066 | 0,015 | 0,001 | 0,006 | -0,010 | 0,017 | -0,024 | 0,025 | | | | | | |
| 8 | 1 | 7,389 | 1,636 | 0,362 | 0,081 | 0,016 | 0,007 | -0,004 | 0,007 | -0,007 | 0,001 | | | | | | | |
| 9 | 1,1 | 9,025 | 1,998 | 0,443 | 0,097 | 0,023 | 0,003 | 0,003 | 0,000 | -0,006 | | | | | | | | |
| 10 | 1,2 | 11,023 | 2,441 | 0,540 | 0,120 | 0,026 | 0,006 | 0,003 | -0,006 | | | | | | | | | |
| 11 | 1,3 | 13,464 | 2,981 | 0,660 | 0,146 | 0,032 | 0,009 | -0,003 | | | | | | | | | | |
| 12 | 1,4 | 16,445 | 3,641 | 0,806 | 0,178 | 0,041 | 0,006 | | | | | | | | | | | |
| 13 | 1,5 | 20,086 | 4,447 | 0,984 | 0,219 | 0,047 | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 1,6 | 24,533 | 5,431 | 1,203 | 0,266 | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 1,7 | 29,964 | 6,634 | 1,469 | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 1,8 | 36,598 | 8,103 | =B17-B16 | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 1,9 | 44,701 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | x= | 1,540 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | h= | 0,10 | =A4-A3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | t= | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | 10,4 | =(B18-A3)/B19 | |
| 21 | | | 10,4 | 97,76 | 821,18 | 6076,76 | 38891,3 | 2E+05 | 924057 | 3E+06 | 8E+06 | 1E+07 | 4E+06 | -3E+06 | 4E+06 | -1E+07 | =C21*(D20+1-D2) | |
| 22 | | 2,718 | 6,261 | 6,501 | 4,106 | 1,266 | 1,945 | -3,209 | 4,400 | -3,429 | 1,475 | -0,288 | 0,012 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | =C3*C21/ФАКТР(C2) | |
| 23 | | 21,75899 | =СУММ(B22:P22) | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | t= | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | -3,6 | =(B18-A17)/B19 | |
| 26 | | | -3,600 | 9,36 | -14,976 | 8,9856 | 3,59424 | 5,032 | 12,0766 | 41,061 | 180,67 | 975,6 | 6243,8 | 46204 | 388117 | 4E+06 | =C26*(D25+D2-1) | |
| 27 | | 44,701 | -29,1708 | 6,87492 | -0,6639 | 0,0176 | 0,00018 | -2E-05 | -1,4E-05 | -6E-06 | 5E-07 | 7E-06 | 1E-05 | 2E-05 | 2E-05 | 2E-05 | =C26*C16/ФАКТР(C2) | |
| 28 | | 21,75899 | =СУММ(B27:P27) | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

В задании в соответствии с вариантом выполнить:

а) пользуясь формулами интерполяции Ньютона (1-ой и 2-ой) . вычислить $e^x$ или sin(x) для заданных значений аргумента x в Excel;

б) полученные решения проверить интерполированием в MathCAD;

в) выполнить в MathCAD линейную регрессию (аппроксимацию). Для первых 10 вариантов найти значение $e^x$, для вторых 10 – sin(x). Значение Σ равно сумме двух последних цифр шифра зачетной книжки.

Таблица 7.1 - Значения аргументов интерполяционных многочленов

| Σ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,507 | 0,512 | 0,523 | 0,527 | 0,533 | 0,541 | 0,547 | 0,553 | 0,558 | 0,563 |

| Σ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1,151 | 1,218 | 1,345 | 1,421 | 1,538 | 1,609 | 1,732 | 1,849 | 1,929 |

Таблица 7.2 - Значения функции $y = e^x$

| x | $e^x$ | x | $e^x$ | x | $e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,50 | 1,6487 | 0,54 | 1,7160 | 0,58 | 1,7860 |
| 0,51 | 1,6653 | 0,55 | 1,7333 | 0,59 | 1,8040 |
| 0,52 | 1,6820 | 0,56 | 1,7507 | 0,60 | 1,8221 |
| 0,53 | 1,6989 | 0,57 | 1,7683 | - | - |

Таблица 7.3 - Значения функций y = sin(x)

| x | sinx | x | sinx | x | sinx |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 0,89121 | 1,5 | 0,99749 | 1,9 | 0,94630 |
| 1,2 | 0,93204 | 1,6 | 0,99957 | 2,0 | 0,90930 |
| 1,3 | 0,96356 | 1,7 | 0,99166 | - | - |
| 1,4 | 0,98545 | 1,8 | 0,97385 | - | - |

***Практическое занятие №8***

***Численные методы решения дифференциальных уравнений***

R = 5 Ом

C = $5 \cdot 10^{-6}$ Ф

E = 100 В

Подставим в уравнение $U'_C = E / (R \cdot C) – U_C /(R \cdot C)$ значения из задания, получим: $U'_C = 4 \cdot 10^6 – 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$

Найдем шаг Δt из условия что на графике будет отражено 20 точек и переходный процесс завершиться за 4·R·C, следовательно, $\Delta t = 4 \cdot R \cdot C / 20 = 5 \cdot 10^{-6}$.

Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$U_i = U_{i-1} + \Delta t \cdot U'_{i-1}$

$t_i = t_{i-1} + \Delta t$

Составим таблицу в Excel, при t=0 напряжение U=0, так как конденсатор заряжается.

| | | |
|---|---|---|
| U= | 0 | =B2+5*(10^-6)*B4 |
| t= | 0 | =B3+5*(10^-6) |
| U'= | =4*(10^6)-4*(10^4)*B2 | |

Вычислим 20 значений:

| № шага | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U= | 0 | 20 | 36 | 48,8 | 59,04 | 67,232 | 73,7856 | 79,02848 |
| t= | 0 | 0,000005 | 0,00001 | 0,000015 | 0,00002 | 0,000025 | 0,00003 | 0,000035 |
| U'= | 4000000 | 3200000 | 2560000 | 2048000 | 1638400 | 1310720 | 1048576 | 838860,8 |

| № шага | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U= | 83,22278 | 86,57823 | 89,26258 | 91,41007 | 93,12805 | 94,50244 | 95,60195 |
| t= | 0,00004 | 0,000045 | 0,00005 | 0,000055 | 0,00006 | 0,000065 | 0,00007 |
| U'= | 671088,6 | 536870,9 | 429496,7 | 343597,4 | 274877,9 | 219902,3 | 175921,9 |

| № шага | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| U= | 96,481563 | 97,1852502 | 97,7482 | 98,19856 | 98,55885 | 98,84708 |
| t= | 0,000075 | 0,00008 | 0,000085 | 0,00009 | 0,000095 | 0,0001 |
| U'= | 140737,49 | 112589,991 | 90071,99 | 72057,594 | 57646,08 | |

Вычислительный эксперимент:

Изменим, значение Е в 5, 10 и 50 раз, получим три новых дифференциальных уравнения:

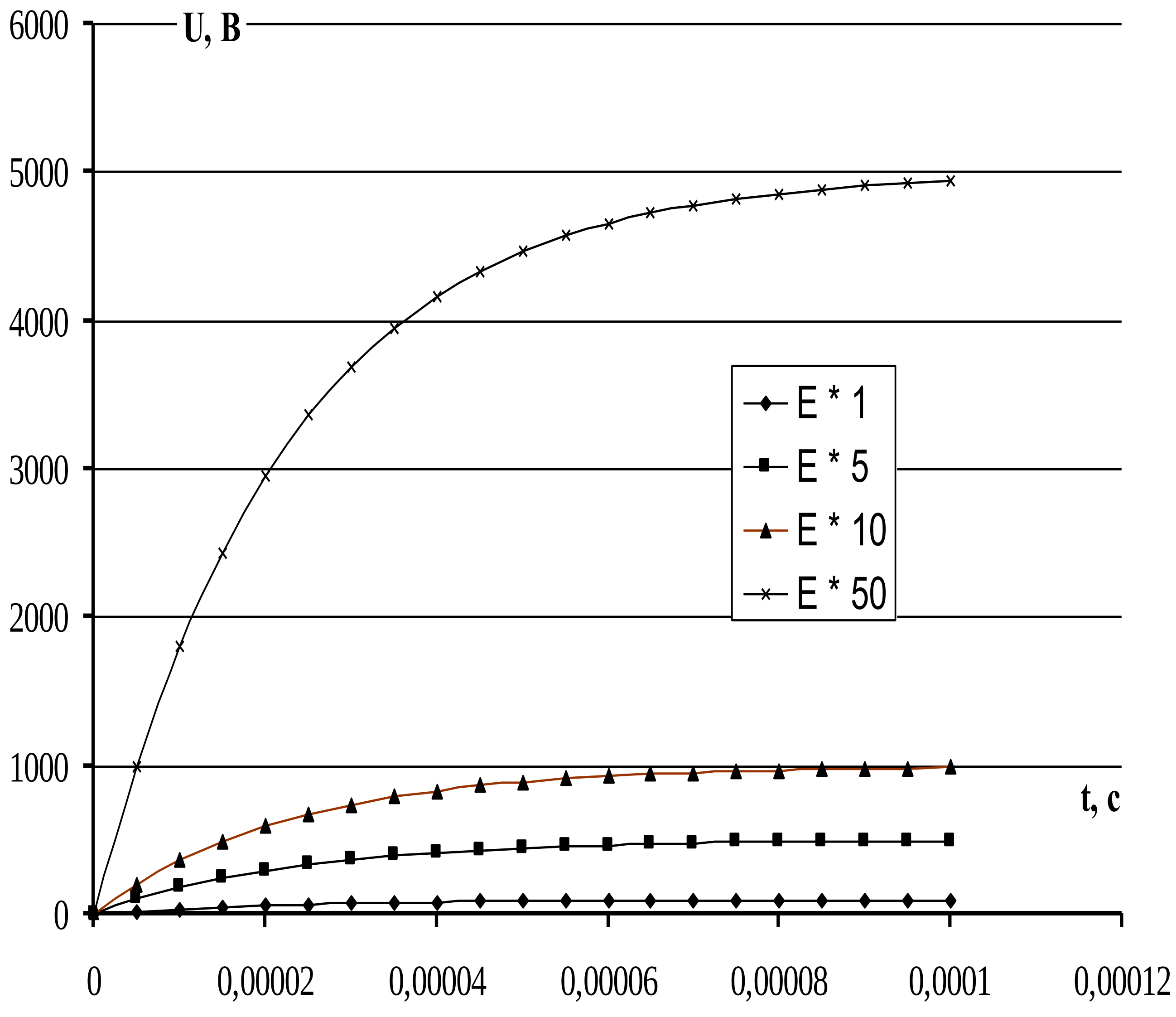
$U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$

$U_5'_C = 20 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{5C}$

$U_{10}'_C = 40 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{10C}$

$U_{50}'_C = 200 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{50C}$

Аналогично предыдущему решению строятся таблицы для 20 значений для каждого из уравнений. По полученным таблицам строятся графики:




В задании в соответствии вариантом выполнить:

а) описать переходный процесс в электрической цепи в виде дифференциального уравнения;

б) решить полученное уравнение методом Эйлера в Excel, исполь зуя рекуррентное выражение;

в) исследовать динамическую модель при изменении одного из параметров в 2, 5 и 10 раз. Построить

графики зависимостей.

При включении ключа «Я» конденсатор заряжается до $U_c = E$.

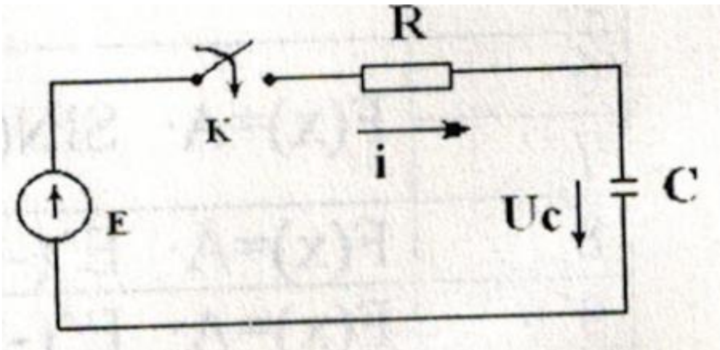
Дифференциальное уравнение заряда $RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ (*).

Моделируя уравнение (*) на ЭВМ, заменяя R C на τ, перепишем:

$\tau\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{\mathrm{E}}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$

Примечание: считать, что переходный процесс завершен через t = (3-4)τ, $\tau = R{\cdot}C$

Соответственно следует выбирать и шаг интегрирования м для получения полной картины заряда конденсатора.




Из уравнения $RC\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ имеем $\tau\frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{\mathrm{E}}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$.

Для $R = 100$ Ом и C=1 мкФ, получим $U_c' = 10^6 - \frac{U_c}{10^{-4}}$.

При моделировании дифференциального уравнения следует правильно выбирать диапазон аргумента (интервал времени) и его шаг изменения.

Так как процесс заряда конденсатора определяется постоянной времени и завершается через 3-4 τ, то Δt - шаг изменения аргумента искомой функции $U_c = f(t)$ должен быть выбран из этих соображений.

Так, например, для $R = 100$ Ом и C=1 мкФ $\tau = RC = 100{\cdot}10^{-6} = 10^{-4}$, откуда для получения 10 точек на графике при полном заряде конденсатора $\Delta e = 0.1{\cdot}3\tau = 3{\cdot}10^{-5}$.

Ниже приведен график заряда конденсатора при различном интервале моделирования (t = 0-2 - кривая **1** и t = 0—100000 - кривая **2**).

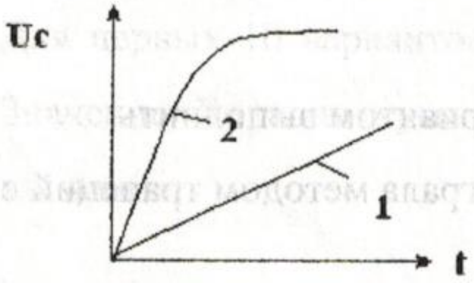



Таблица 3 - Значения параметров электрической цепи

| № варианта | R (Ом) | C (мкф) | E (B) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| *0 | 10 | 1 | 100 |
| *2 | 5 | 0,5 | 50 |
| 3 | 100 | 1 | 100 |
| *4 | 50 | 1 | 100 |
| 5 | 100 | 0,5 | 50 |
| *6 | 10 | 10 | 100 |
| 7 | 5 | 5 | 100 |
| *8 | 100 | 10 | 100 |
| 9 | 50 | 10 | 100 |
| 10 | 1 | 5 | 100 |
| 11 | 25 | 15 | 100 |
| 12 | 50 | 5 | 50 |
| 1 | 100 | 3 | 100 |
| - | 2 | 3 | 4 |
| 13 | 50 | 15 | 100 |
| 14 | 25 | 1 | 100 |
| 15 | 100 | 0,5 | 100 |
| 16 | 50 | 5 | 100 |
| 17 | 100 | 3 | 50 |
| 18 | 50 | 10 | 50 |

## Список рекомендуемой литературы


1. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов [и др.]; под ред. проф. А.И. Кириллова. - [2-е изд., стер.]. - М.: Физматлит, 2003. - 400 с. - (Решебник). - ISBN 5-9221-0423-3
2. Методы решения специальных задач с использованием информационных технологий Электронный ресурс: Практикум / сост. А. С. Ермаков. - Москва: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. - 133 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-0973-3
3. Порсев, Е. Г.<BR>    Организация и планирование экспериментов : учебное пособие / Е.Г. Порсев ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск: НГТУ, 2010. - 155 с. - http://biblioclub.ru/. - ISBN 978-5-7782-1461-30.
4. Ашихмин, В. Н.<BR>    Введение в математическое моделирование Электронный ресурс : Учебное пособие / В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер. - Введение в математическое моделирование,2019-04-20. - Москва: Логос, 2004. - 439 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-94010-272-7
5. Краснов, М. Л.<BR>    Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - Москва: Наука, 1971. - 254 с.: ил. - (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов). - http://biblioclub.ru/
6. Семенов, Б. А. (д-р техн. наук). Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях:

учеб. пособие для вузов / Б.А. Семенов. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. - 393 с.: ил.; 21. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Гриф: Доп. УМО. - Библиогр.: с. 388-390. - ISBN 978-5-8114-1392-8

7. Яковлев, С. В. (СКФУ). Методы и алгоритмы решения задач системного анализа: учебное пособие: практикум / С. В. Яковлев; Сев.-Кав. федер.ун-т</font>. - Ставрополь: СКФУ, 2014. - 85 с. - Неопубликованное издание

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# Методические указания

по выполнению самостоятельной работы по дисциплине
«Методы решения задач электроэнергетики и электротехники»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

СОДЕРЖАНИЕ

## Введение

Настоящее пособие разработано на основе:

– Федерального закона от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

– Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (далее ФГОС ВО);

– нормативно-методических документов Минобрнауки России;

– Устава ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»;

– Приказом Минобрнауки России от 06.04.2021 N 245 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» (Зарегистрировано в Минюсте России 13.08.2021 N 64644);

– локальных нормативных актов ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет».

На современном рынке труда конкурентоспособным может стать только квалифицированный работник соответствующего уровня и профиля, компетентный, свободно владеющей своей профессией и ориентированный в смежных областях деятельности, способный к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов и готовый к постоянному профессиональному росту.

Самостоятельная работа студента направлена на достижение целей подготовки специалистов-профессионалов, активное включение обучаемых в сознательное освоение содержания образования, обеспечение мотивации, творческое овладение основными способами будущей профессиональной деятельности. Чтобы подготовить и обучить такого профессионала, высшим учебным заведениям необходимо скорректировать свой подход к планированию и организации учебно-воспитательной работы. Это в равной степени относится к изменению содержания и характера учебного процесса. В современных реалиях задача преподавателя высшей школы заключается в организации и направлении познавательной деятельности студентов, эффективность которой во многом зависит от их самостоятельной работы. В свою очередь, самостоятельная работа студентов должна представлять собой не просто самоцель, а средство достижения прочных и глубоких знаний, инструмент формирования активности и самостоятельности студентов.

В связи с введением в образовательный процесс новых образовательных стандартов, с уменьшением количества аудиторных занятий по дисциплинам возрастает роль самостоятельной работы студентов. Возникает необходимость оптимизации самостоятельной работы студентов (далее - СРС). Появляется необходимость модернизации технологий обучения, что существенно меняет подходы к учебно-методическому и организационно-техническому обеспечению учебного процесса.

Данная методическая разработка содержит рекомендации по организации, управлению и обеспечению эффективности самостоятельной работы студентов в процессе обучения в целях формирования необходимых компетенций.

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом учебного процесса для каждого студента и определяется учебным планом. Виды самостоятельной работы студентов определяются при разработке рабочих программ и учебных методических комплексов дисциплин содержанием учебной дисциплины. При определении содержания самостоятельной работы студентов следует учитывать их уровень самостоятельности и требования к уровню самостоятельности выпускников для того, чтобы за период обучения искомый уровень был достигнут. Так, удельный вес самостоятельной работы при обучении в очной форме составляет до 50% от количества аудиторных часов, отведённых на изучение дисциплины, в заочной форме - количество часов, отведенных на освоение дисциплины, увеличивается до 90%.

Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства педагога, но по его заданиям и под его контролем.

Самостоятельная работа – это познавательная учебная деятельность, когда последовательность мышления студента, его умственных и практических операций и действий зависит и определяется самим студентом. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня, что в итоге приводит к развитию навыка самостоятельного планирования и реализации деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение необходимыми компетенциями по своему направлению подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности.

На основании компетентностного подхода к реализации профессиональных образовательных программ, видами заданий для самостоятельной работы являются:

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и информационно-телекоммуникационной сети Интернет и др.
- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции, обработка текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио и видеозаписей), повторная работа над учебным материалом, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответ на контрольные вопросы, заполнение рабочей тетради, аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект-анализ и др.), завершение аудиторных практических работ и оформление отчётов по ним, подготовка мультимедиа сообщений/докладов к выступлению на семинаре (конференции), материалов-презентаций, подготовка реферата, составление библиографии, тематических кроссвордов, тестирование и др.
- *для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач, выполнение чертежей, схем, выполнение расчетов (графических работ), решение ситуационных (профессиональных) задач, подготовка к деловым играм, проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Контроль результатов самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине и внеаудиторную самостоятельную работу студентов по дисциплине, может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

Самостоятельная работа проводится в виде упражнений при изучении нового материала, упражнений в процессе закрепления и повторения, упражнений проверочных и контрольных работ, а также для самоконтроля.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

1. готовность студентов к самостоятельному труду;
2. наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;
3. консультационная помощь.

Самостоятельная работа может проходить в лекционном кабинете, компьютерном зале, библиотеке, дома. Самостоятельная работа способствует формированию компетенций, тренирует волю, воспитывает работоспособность, внимание, дисциплину и ответственность.

## 1 Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» относится к дисциплине базовой части. Она направлена на формирование профессиональных компетенций обучающихся в процессе выполнения работ, определенных ФГОС ВО.

Наименование компетенций:

| Код, формулировка компетенции | Код, формулировка индикатора | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов |
|---|---|---|
| ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач | ИД-2 $_{\text{ОПК-3}}$. Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений | Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений;<br>Использует инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники |
| | ИД-4 $_{\text{ОПК-3}}$. Применяет математический аппарат численных методов. | Демонстрирует знание математического аппарата численных методов;<br>Использует инструментарий и основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники |

В рамках курса дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» самостоятельная работа студентов находит активное применение и включает в себя различные виды деятельности:

– подготовка к практическим занятиям, в том числе работа с методическими указаниями, средствами массовой информации;

– подготовка к лекциям, в том числе самостоятельное углубленное изучение теоретического курса по рекомендованной литературе;

– подготовка к промежуточной аттестации.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к лекциям заключается в получении новых знаний, приобретенных при более глубоком изучении литературы по дисциплине.

Задачи:

– доработка и повторение конспектов лекции;

– осмысление содержания лекции, логической структуры, выводов.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к практическим занятиям заключается в углублении, расширении, детализировании знаний, полученных на лекциях в обобщенной форме.

Задачи:

– развить способность применять полученные знания на практике при решении конкретных задач;

– проверить знания студентов, полученные на лекциях и при самостоятельном изучении литературы.

## 2 План-график выполнения самостоятельной работы

Таблица 1 – Виды самостоятельной работы

| Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов) | Вид деятельности студентов | Средства и технологии оценки | Очная форма обучения | | | Заочная форма обучения | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Объем часов, в том числе | | | Объем часов, в том числе | | |
| | | | СРС | Контактная работа с преподавателем | Всего | СРС | Контактная работа с преподавателем | Всего |
| 2 семестр | | | | | | | | |
| ИД-2 опк-з. | Подготовка к лекционному занятию | Собеседование | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 |
| ИД-2 опк-з. | Подготовка к практическому занятию | Собеседование | 5 | 1 | 6 | 1 | 1 | 2 |
| ИД-2 опк-з. | Самостоятельное изучение литературы | Собеседование | 96 | 6 | 102 | 149 | 8 | 157 |
| ИД-2 опк-з. | Подготовка к экзамену | Вопросы к экзамену | 34 | 2 | 36 | 7 | 2 | 9 |
| Итого за 2 семестр | | | 138 | 10 | 148 | 158 | 12 | 170 |
| Итого | | | 138 | 10 | 148 | 158 | 12 | 170 |

## 3 Контрольные точки и виды отчетности по ним

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

## 4 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

| Уровни сформированности компетенци(ий), индикатора (ов) | Дескрипторы | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Минимальный уровень не достигнут (Неудовлетворительно) 2 балла | Минимальный уровень (удовлетворительно) 3 балла | Средний уровень (хорошо) 4 балла | Высокий уровень (отлично) 5 баллов |
| *Компетенция:* ОПК-3. Способен применять соответствующий физико- математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач | | | | |
| Результаты обучения по дисциплине (модулю): *Индикатор:* ИД-2 $_{ОПК-3}$. Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений | Отсутствуют знания математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Не способен использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | Демонстрирует частичные знания математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Частично умеет использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Умеет на базовом уровне использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Уверенно использует инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники |
| Результаты обучения по дисциплине (модулю): *Индикатор:* | Отсутствуют знания математического аппарата численных методов; Не способен использовать инструментарий и | Демонстрирует частичные знания математического аппарата численных методов; | Демонстрирует знание математического аппарата численных методов; Умеет на базовом уровне | Демонстрирует знание математического аппарата численных методов; Уверенно использует инструментарий и основные приемы |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ИД-4 $_{ОПК\text{-}3}$. Применяет математический аппарат численных методов. | основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | Частично умеет использовать инструментарий и основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | использовать инструментарий и основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники | математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники |

## 5 Тематический план дисциплины

| № Темы дисциплины | Наименование тем дисциплины, их краткое содержание | Объем часов | Из них практическая подготовка, часов |
|---|---|---|---|
| | 2 семестр | | |
| 1 | Комплексные числа. Числовые ряды в комплексной плоскости<br>1. Комплексные величины. Определения. Основные операции<br>2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции с ними<br>3. Представление синусоидально изменяющихся величин в виде комплексных чисел | 2 | |
| 1 | Комплексные числа. Числовые ряды в комплексной плоскости<br>1. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока<br>2. Применение комплексных чисел для анализа электрических цепей синусоидального тока<br>3. Числовые ряды в комплексной плоскости. Основные понятия. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости | 2 | |
| 2 | Функции комплексного переменного<br>1. Основные элементарные функции<br>2. Аналитические функции. Условия Коши-Римана | 2 | |
| 3 | Ряды Фурье. Интеграл Фурье<br>1. Основные понятия. Свойства. Спектр.<br>2. Применение к расчету цепей несинусоидального тока<br>3. Интеграл Фурье | 2 | |
| 4 | Основы операционного исчисления<br>1. Преобразование Лапласа<br>2. Преобразование некоторых функций<br>3. Свойства оригиналов и изображений | 2 | |
| 4 | Основы операционного исчисления<br>1. Решение дифференциальных уравнений и систем<br>2. Приложения операционного исчисления к задачам электротехники | 2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | Численные методы<br>1. Методы решения нелинейных уравнений<br>2. Интерполирование функций | 2 | |
| 5 | Численные методы<br>1. Численное интегрирование<br>2. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем | 2 | |
| | Итого за 2 семестр | **16.00** | |
| | Итого | **16.00** | |

## 6 Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Операции с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. Примеры.
2. Комплексные числа: формы представления, перевод из различных форм. Примеры.
3. Геометрический смысл модуля разности.
4. Операции с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. Примеры.
5. Формулы Эйлера и Муавра. Примеры применения.
6. Представление синусоидальной величины с помощью комплексных чисел (комплексная амплитуда, комплекс действующего значения).
7. Напряжение, ток и мощность на резистивном, индуктивном и емкостном элементах.
8. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость. Примеры.
9. Применение символического метода к расчету неразветвленной цепи синусоидального тока. Построение векторной диаграммы.
10. Числовые ряды в комплексной плоскости. Признаки сходимости.
11. Функции комплексной переменной.
12. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.
13. Ряды Фурье. Вычисление коэффициентов ряда Фурье с выводами.
14. Ряды Фурье. Интегрирование и дифференцирование.
15. Разложение в ряд Фурье в окрестностях точек разрыва. Явление Гиббса.
16. Графическое представление ряда Фурье. Спектр.
17. Интеграл Фурье. Применение.
18. Графо-аналитический метод разложения в ряд Фурье.
19. Дискретное преобразование Фурье.
20. Вычеты. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов.
21. Определение преобразования Лапласа.
22. Изображения константы, синуса, косинуса, экспоненты.
23. Изображения первой и второй производной, изображение интеграла.
24. Свойства преобразования Лапласа. Теорема линейности с выводом.
25. Свойства преобразования Лапласа. Теорема подобия с выводом.
26. Свойства преобразования Лапласа. Теорема затухания с выводом.
27. Свойства преобразования Лапласа. Теорема запаздывания с выводом.
28. Численные методы в расчетах электроэнергетики
29. Решение нелинейных уравнений и задач оптимизации. методы решения нелинейных уравнений.
30. Интерполирование функций. Интерполяционная формула Лагранжа.
31. Численное интегрирование.
32. Метод наименьших квадратов
33. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем.
34. Задача Коши. Теорема Пикара.
35. Метод Эйлера, его геометрический смысл.

36. Метод Эйлера - Коши, его геометрический смысл.
37. Метод Рунге - Кутта, его геометрический смысл.

## 7 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Самостоятельная работа студента в ходе **лекционных занятий** включает изучение вопросов теории, вынесенных на самостоятельное изучение в соответствии с рабочей программой дисциплины, проработку лекционных материалов для подготовки к контролю знаний на лекционных занятиях (опрос) и подготовку вопросов для обсуждения при консультации с преподавателем.

Работа с лекционным материалом не завершается по окончании лекции. На 2 часа лекции необходимо затратить около часа на работу с конспектом. За это временя необходимо перечитать записи, пополнить их данными, которые удалось запомнить из речи преподавателя, но не удалось записать. Работая с конспектом, нужно отметить непонятные вопросы для выяснения у преподавателя на консультации. Отдельно следует выделить связанные с темой лекции вопросы, которые преподаватель поручил проработать самостоятельно.

Активно проработанный в течение семестра конспект лекций в дальнейшем служит основой для подготовки к экзамену.

Вопросы для самостоятельного изучения представлены в п. 5.

Самостоятельная работа в ходе **практикума** включает выполнение заданий к практическим занятиям, в частности решение задач различного уровня сложности. Задачи приведены в методических указаниях к практическим занятиям и фондах оценочных средств.

Зная тему практического занятия, необходимо готовиться к нему заблаговременно. Для эффективной подготовки к практическому занятию необходимо иметь методическое руководство к практическому занятию.

Критерии оценивания практических занятий представлен в фонде оценочных средств.

При проверке практического задания, оцениваются: последовательность и рациональность изложения материала; полнота и достаточный объем ответа; научность в оперировании основными понятиями; использование и изучение дополнительных литературных источников

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы: вопросы для собеседования и экзамена приведены Фонде оценочных средств по дисциплине

## 8 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь вариативный и дифференцированный характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

## 9 Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на семинар. Готовясь к докладу или реферативному сообщению, обращаться за методической помощью к преподавателю. Составить план-конспект своего выступления. Продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной жизнью. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании работ.

## 10 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Практическое занятия – один из самых эффективных видов учебных занятий, на которых студенты учатся творчески работать, аргументировать и отстаивать свою позицию, правильно и доходчиво излагать свои мысли перед аудиторией. Основное в подготовке и проведении практических занятий – это самостоятельная работа студента над изучением темы. Студент обязан точно знать план занятия либо конкретное задание к нему. На занятии обсуждаются узловые вопросы темы, однако там могут быть и такие, которые не были предметом рассмотрения на лекции. Могут быть и специальные задания к той или иной теме.

Готовиться к практическому занятию следует заранее. Необходимо внимательно ознакомиться с планом и другими материалами, уяснить вопросы, выносимые на обсуждение. Затем нужно подобрать литературу и другой необходимый, в т.ч. рекомендованный, материал (через библиотеку, учебно-методический кабинет кафедры и др.). Но прежде всего, следует обратиться к своим конспектам лекций и соответствующему разделу учебника. Изучение всех источников должно идти под углом зрения поиска ответов на выносимые на практико-ориентированные занятия вопросы.

Завершающий этап подготовки к занятиям состоит в выполнении индивидуальных заданий.

В случае пропуска занятия студент обязан подготовить материал и отчитаться по нему перед преподавателем в обусловленное время. Может быть предложено отдельным бакалаврам, ввиду их слабой подготовки, более глубоко освоить материал и прийти на индивидуальное собеседование.

Студент не допускается к экзамену, если у него есть задолженность по практическим занятиям.