МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор НТИ (филиал) СКФУ
__________________А.В. Ефанов

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
Алгебра и геометрия

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии		
Направленность (профиль)/специализация	Цифровые технологии химических производств		
Год начала обучения	2024		
Форма обучения	очная	заочная	очно-заочная
Реализуется в семестре	__1____	___1___	____

СОГЛАСОВАНО:
Руководитель ОП
Тихонов Э.Е.
Рассмотрено УМК института (филиала)/факультета
____
№, дата

РАЗРАБОТАНО:
доцент кафедры гуманитарных и математических дисциплин
Мельникова Е.Н.

Невинномысск, 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» является формирование и развитие интеллекта и способностей студентов к логическому и алгоритмическому мышлению, обучение основным математическим понятиям и методам линейной алгебры и аналитической геометрии, их использованию в моделировании, теоретическом и экспериментальном исследовании в профессиональной деятельности, поиску, критическому анализу и синтезу информации, применению системного подхода для решения поставленных задач.

Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

– обучение студентов основным математическим методам алгебры и геометрии, необходимым при решении теоретических и практических задач в области цифровых технологий химических производств;

– развитие логического и алгоритмического мышления общего уровня математической культуры;

– выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для решения теоретических и практических задач в области цифровых технологий химических производств;

– обучение студентов методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;

– привитие студентам умения самостоятельного изучения учебной литературы по алгебре и геометрии.

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-1** **УК-1** выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает основы операций и алгебраических систем, методологию и основные методы линейной алгебра и аналитической геометрии. Использует понятия: эквивалентные матрицы и элементарные преобразования; системы линейных уравнений; матричный метод решения систем линейных уравнений; формулы Крамера, прямая, плоскость.

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-2** **УК-1** осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Способен распознавать в задачах предметной области матрицы и действия над ними; определители и их основные свойства; алгебраические дополнения и миноры; формулировку теоремы Лапласа, применять на практике математические модели, методы и средства цифровых технологий на практике
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**ИД-3** **УК-1** определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Обеспечивает владение навыками теоретического и экспериментального исследования, понятий: обратная матрица, ее основные свойства, метод вычисления; линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы; необходимое и достаточное условия линейной зависимости строк; ранг матрицы, методы его вычисления; теорема о базисном миноре. Обеспечивает применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры и геометрии, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры и геометрии, предполагающими самостоятельный выбор метода решения
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1** **ОПК-1** знаком с основами естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Понимает теорию основных методов алгебры в профессиональной деятельности, анализирует теоретические и экспериментальные данные алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования,	**ИД-2** **ОПК-1** анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	Анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы, применяет знания алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, вычисляет значения корня, степени, логарифма, находить значения тригонометрических выражений, выполняет тождественные преобразования тригонометрических, иррациональных,

теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности		показательных, логарифмических выражений, анализирует математический аппарат аналитической геометрии, аналитические методы исследования геометрических объектов для решения поставленных задач в профессиональной деятельности
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-3** **ОПК-1** применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Владеет навыками решения задач, связанных с алгеброй, навыками решения задач, связанных с основами алгебраических вычислений в профессиональной деятельности, умеет решать задачи вычислительного и теоретического характера в области геометрии многомерного евклидова (аффинного) пространства и доказывать утверждения

Практическое занятие по теме «Линейная алгебра»

Цель: Целью освоения темы «Линейная алгебра» является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии:

– осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

– использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

В результате освоения темы «Линейная алгебра» студентом приобретаются следующиезнания и умения:

Знать: основные методы алгебры и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности.

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области алгебры, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач алгебры, предполагающими самостоятельный выбор метода решения.

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью.

Теоретическая часть

Определители и матрицы

1^0 Определителем 2-го порядка называется число, обозначаемое выражением

а) $$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \qquad \textbf{(1)}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2- элементы определителя.

б) Определителем 3-го порядка называется число, обозначаемое выражением

$$\begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+b_1c_2a_3-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1c_2b_3 \qquad \textbf{(2)}$$

в) Определителем n-го порядка называется число $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **(3)**

где a_{ij}- элемент определителя, находящийся на пересечении i-той строки и j-го столбца.

2^0 Матрицей называют таблицу, состоящую из элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах, и обозначают:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если m=n, то матрицу называют квадратной; если m=1, то получим матрицу –строку (a_{11}, a_{12}, a_{1n}); если n=1, то получим матрицу-столбец: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется симметричной.

Единичной матрицей n-го порядка называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \; a_{ij} = \begin{cases} 1 & если\ i = j \\ 0 & если\ i \neq j \end{cases}$$

Две матрицы А и В называются равными, если они имеют одинаковую размерность и все соответствующие элементы равны, т.е $a_{ij}=b_{ij}$.

3^0 Суммой 2-х матриц одинаковой размерности А и В называется матрица С такой же размерности, получаемая из этих матриц соответствующих элементов $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

4^0 Разность матриц есть действие обратное сложению, т.е. чтобы найти разность 2-х матриц одинаковой размерности, следует произвести вычитание соответствующих элементов $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

5^0 Под произведением матрицы А на число k понимается матрица В, получаемая из матрицы А умножением всех её элементов на это число $b_{ij}=ka_{ij}$.

6^0 Под произведением матрицы А размерности (mxn) на матрицу В размерности (nxk) понимается матрица C размерности (mxk), получаемая перемножением элементов матрицы A на элементы матрицы B по правилу $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum a_{i\,r}b_{ri}$, т.е. по правилу "строки на столбец".

7^0 Трансионировать матрицу A – значит все её строки i сделать столбцами j с теми порядковыми номерами $a_{ij}=a^{m}{}_{ji}$.

8^0 Обратной матрицей по отношению к заданной квадратной матрице A называется такая квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, которая удовлетворяет равенствам $AA^{-1}=E$ и $A^{-1}A=E$.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно чтобы матрица A была несобственной (detA #0),тогда обратная матрица определяется формулой: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Таким образом, для получения обратной матрицы A^{-1} следует все элементы матрицы A заменить их алгебраическими дополнениями. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного вычёркивания i-той строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$

Системы линейных уравнений

9^0 Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + k_1x_n = h_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + k_2x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots + k_nx_n = h_n \end{cases}$$

по формулам Крамера имеет вид: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; …; $x_n\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$,где Δ- основной определитель системы; Δ_1; Δ_2; … Δ_n - дополнительные определители системы.

Если $\Delta\neq0$ – система совместная, имеет единственное решение. Если $\Delta=0$, а $\Delta_1\neq0$; $\Delta_2\neq0$; … $\Delta_n\neq0$ – система не совместная, не имеет решений. Если $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_n=0$ - система не определена, т.е. имеет бесконечное множество решений

10^0 Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

Если ввести матричные обозначения: A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$; X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

то систему можно записать матричным уравнением AX=B. Решение системы матричным методом определяется соотношением X=A^{-1}B; det$\neq$0.

11^0 Ранг матрицы – это наибольший из порядков определителей этой матрицы, отличных от нуля. Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются эквивалентными.

По *критерию Сильвестра* положительной определенности: Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка ее матрицы были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.

Решение типовых примеров

Пример № 1. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Правильность нахождения обратной матрицы проверить матричным умножением

$A*A^{-1} = =A^{-1}*A=E$.

Решение: Находим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =22 \neq 0.$$

Поскольку определитель матрицы не равен нулю, существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Находим алгебраические дополнения

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1$; $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5$; $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1$;

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-11;$ $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=11;$ $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11;$

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=26;$ $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & 5 .\end{vmatrix}=-20;$ $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-18;$

Отсюда $A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-1 & -11 & 26\\ 5 & 11 & -20\\ -1 & 11 & -18\end{pmatrix}.$

Правильность нахождения обратной матрицы проверим матричным умножением:

$$A^{-1}*A=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-1 & -11 & 26\\ 5 & 11 & -20\\ -1 & 11 & -18\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 5 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-1*1-11*5+26*3 & -1*4-11*2+26*1 & 1*3-11*5+26*2\\ 5*1+11*5-20*3 & 5*4+11*2-20*1 & 5*(-3)+11*5-20*2\\ -1*1+11*5-18*3 & -1*4+11*2-18*1 & 1*3+11*5-18*2\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}22 & 0 & 0\\ 0 & 22 & 0\\ 0 & 0 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

Пример № 2. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x-3y+z=14,\\ 5x+y-3z=7,\\ 4x+3y+2z=10;\end{cases}$$

Решение. Находим главный определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=4+15+36-4+30+18=99\neq 0.$$

Система имеет единственное решение. Находим дополнительные определители.

$\Delta_x=\begin{vmatrix}14 & -3 & 1\\ 7 & 1 & -3\\ 10 & 3 & 2\end{vmatrix}=297;$ $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 14 & 1\\ 5 & 7 & -3\\ 4 & 10 & 2\end{vmatrix}=-198;$ $\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -3 & 14\\ 5 & 1 & 7\\ 4 & 3 & 10\end{vmatrix}=198.$

По формулам Крамера $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}-\frac{297}{99}=3;$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{198}{99}=-2;$ $\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{198}{99}=2$

Ответ: (3;-2;2).

Пример № 3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x+3y+2z=16, \\ 2x-3y+z=17, \\ 5x+y-3z=-2; \end{cases}$$

Решение. Запишем исходные матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Найдем $|A|=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$=36+15+4+30-4+18=99$\neq 0$

Находим обратную матрицу (см. пример №1). Получим

$A^{-1}=\frac{1}{99}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{bmatrix}$. Отсюда находим искомое решение:

$$X=A^{-1}*B=\frac{1}{99}\begin{bmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 11 & -22 & 0 \\ 17 & 11 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ -2 \end{bmatrix}=\frac{1}{99}\begin{bmatrix} 128+187-18 \\ 176-374 \\ 272+187+36 \end{bmatrix}=\frac{1}{99}\begin{bmatrix} 297 \\ -198 \\ 495 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом x=3;y=-2;z=5

Пример № 4. Найти фундаментальную систему решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-2x_6=0, \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ -2x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5-x_6=0. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом Гаусса. Поскольку число уравнений системы меньше числа неизвестных, считаем, что x_1; x_2; x_3-,базисные неизвестные, а x_4; x_5; x_6-свободные неизвестные. Перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные, в правую часть уравнений системы и получим:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=x_4-x_5+2x_{6,} \\ 2x-3x_2-2x_3=-x_4+x_{5,} \\ -2x+3x_2+3x_3=-x_4-x_5+x_6; \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и затем выполним действия, составляющие прямой ход метода Гаусса:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} x_4-x_5+2x_6 \\ -x_4+x_5 \\ -x_4-x_5+x_6 \end{matrix}\right]\text{(-2),(2)}\sim\left[\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} x_4-x_5+2x_6 \\ -3x_4+3x_5-4x_6 \\ x_4-3x_5+5x_6 \end{matrix}\right]\sim\left[\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} x_4 - x_5 + 2x_6 \\ -3x_4 + 3x_5 - 4x_6 \\ 2x_4 + x_6 \end{matrix}\quad\right]$$

Преобразованная расширенная матрица соответствует системе уравнений, которая эквивалентна исходной, однородной системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5 + 2x_6, \\ -x_2 - 4x_3 = -3x_4 + 3x_5 - 4x_6, \\ x_3 = 2x_4 + x_6. \end{cases}$$ обратный ход метода Гаусса дает значение базисных

неизвестных, выраженных через свободные переменные: $x_3=2x_4+x_6$; $x_2 = 11x_4 - 3x_5$;

$x_1 = 14x_4 - 4x_5 + x_6.$

Поскольку ранг однородной системы равен трем, то фундаментальная система решений для нее состоит из трех линейно-независимых векторов

При n=6 и z=3, беря последовательно для свободных переменных тройку чисел (1;0;0); (0;1;0) и (0;0;1), получим функциональный набор решений

$\tilde{x}_1$ =(14;11;2;1;0;0); $\tilde{x}_2$ =(-4;-3;0;0;1;0); $\tilde{x}_3$ =(1;0;1;0;0;1).

Пример № 5. Исследовать и найти общее решение СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен единице

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right],$$

т.е ранг матрицы системы r=2

Оставляем в левой части переменные $x_1; x_2$, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля), т.е.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ Остальные не основные переменные $x_3; x_4$ переносим в правые части уравнения.

В результате получим систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ -5x_2 = 17 + 5x_3 + 7x_4 \end{cases}$

Откуда $x_2 = -\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4$ и $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1; x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы: $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2$; $x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{17}{5}c_2$; $x_3 = c_1; x_4 = c_2$

Пример №6. Доказать что квадратичная форма

$F = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ положительно определенная.

Решение. Запишем матрицу. А этой квадратичной формы и определитель матрицы А. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$. Т.к. главные миноры матрицы А $a_{11} = 6 > 0$;

$a_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26 > 0$; $a_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 162 > 0$; т.е. все положительные, то данная квадратичная форма является положительно – определенная.

Вопросы и задания

№ 1. Найти обратную матрицу для матрицы А методом алгебраических дополнений. при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение, т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (Таблица 1).

Таблица 1.

В	**Матрица**	**В**	**Матрица**	**В**	**Матрица**	**В**	**Матрица**	**В**	**Матрица**
1	$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$	**7**	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	**13**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 14 & -4 \end{pmatrix}$	**19**	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**25**	$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**8**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	**14**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$	**20**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	**26**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**9**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	**15**	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	**21**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$	**27**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**10**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**16**	$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	**22**	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	**28**	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5	$\grave{A}=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&1&2\\7&-3&0\end{pmatrix}$	**11**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}4&7&-3\\2&9&3\\-1&6&-3\end{pmatrix}$	**17**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}7&5&3\\2&-1&-1\\1&8&6\end{pmatrix}$	**23**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&1\\2&1&6\end{pmatrix}$	**29**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}4&-3&2\\2&5&-3\\5&6&-2\end{pmatrix}$
6	$\grave{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$	**12**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&-4&-3\\1&5&1\end{pmatrix}$	**18**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}2&-1&5\\5&2&13\\3&-1&5\end{pmatrix}$	**24**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}7&-5&0\\4&11&0\\2&4&4\end{pmatrix}$	**30**	$\grave{A}=\begin{pmatrix}5&3&3\\3&2&2\\5&4&2\end{pmatrix}$

№ 2. Решить СЛАУ:

а) методом Крамера;

б) средствами матричного исчисления. Обратную матрицу найти, используя либо метод Жордано, либо метод алгебраических дополнений элементов матрицы А, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение (Таблица 2).

Таблица 2.

Вар.	Система уравнений	Вар.	Система уравнений	Вар.	Система уравнений
1	$\begin{cases}4x_1+7x_2+3x_3=-10,\\2x_1+9x_2-x_3=8,\\-x_1+6x_2-3x_3=3.\end{cases}$	11	$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4,\\4x_1-x_2+5x_3=6,\\x_1-2x_2+4x_3=5.\end{cases}$	21	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_1=1,\\x_1+2x_2-3x_3=5,\\3x_1-2x_2+4x_3=4.\end{cases}$
2	$\begin{cases}2x_1+4x_2+3x_3=-10,\\-x_1+5x_2-2x_3=5,\\3x_1-2x_2+4x_3=3.\end{cases}$	12	$\begin{cases}x_1+7x_2-2x_3=3,\\3x_1+5x_2+x_3=5,\\-2x_1+5x_2-5x_3=-4.\end{cases}$	22	$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$
3	$\begin{cases}-3x_1+5x_2-6x_3=-5,\\2x_1-3x_2+5x_3=8,\\x_1+4x_2-x_3=1.\end{cases}$	13	$\begin{cases}-2x_1+3x_2-2x_3=2,\\3x_1-2x_2+x_3=2,\\-5x_1+10x_2-7x_3=10.\end{cases}$	23	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=1,\\x_1-2x_2-3x_3=5,\\3x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$
4	$\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=-5,\\x_1+9x_2-4x_3=-1,\\-2x_1+6x_2-3x_3=6.\end{cases}$	14	$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=7,\\-4x_1+2x_2=-2,\\6x_1-3x_2+x_3=-3.\end{cases}$	24	$\begin{cases}4x_1-3x_2-2x_3=9,\\2x_1-1{,}5x_2-x_3=4{,}5,\\x_1+2x_2-3x_3=15.\end{cases}$
5	$\begin{cases}-2x_1+x_2-3x_3=-4,\\4x_1+7x_2-2x_3=-6,\\x_1-8x_2+5x_3=1.\end{cases}$	15	$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5,\\3x_1+3x_2-2x_3=8,\\x_1-x_2+x_3=6.\end{cases}$	25	$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9,\\2x_1+5x_2-3x_3=4,\\5x_1+6x_2-2x_3=18.\end{cases}$
6	$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=-4,\\4x_1+7x_2-2x_3=6,\\x_1+8x_2+5x_3=-1.\end{cases}$	16	$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=6,\\x_1-2x_2+x_3=9,\\x_1-4x_2-2x_3=3.\end{cases}$	26	$\begin{cases}x_1+x_2-4x_3=1,\\x_1+2x_2-8x_3=4,\\3x_1-x_2+4x_3=15.\end{cases}$
7	$\begin{cases}x_1-5_2+3x_3=-1,\\2x_1+4x_2+x_3=6,\\-3x_1+3x_2-7x_3=-13.\end{cases}$	17	$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1,\\2x_1+x_2-0{,}5x_3=3,\\5x_1-x_2-3x_3=10.\end{cases}$	27	$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_1=1,\\2x_1+10x_2+8x_3=3,\\3x_1+15x_2+2x_3=5.\end{cases}$

8	$\begin{cases} -2x_1+5x_2-6x_3=-8, \\ x_1+7x_2-5x_3=-9, \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2, \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-1, \\ x_1+9x_2+6x_3=3, \\ x_1+3x_2+4x_3=1. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5, \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x-5y-z=-13, \\ x\quad -z=5, \\ 11x+3y+z=-9. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 4x_1+6x_2+2x_3=6, \\ -2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-4x_3=5, \\ 5x_1-8x_2+2x_3=8. \end{cases}$

№ 3 Найти фундаментальную систему решений однородной СЛАУ (Таблица 3).

Таблица 3.

Вар.	**Система уравнений**	**Вар.**	**Система уравнений**
1	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1-3x_2-5x_3\quad -7x_5=0, \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=0. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ -4x_1+5x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0, \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 6x_1+2x_2+2x_3+x_4\quad =0, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0, \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3-3x_4=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ -x_1-3x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+x_5=0, \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-5x_5=0, \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=0. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0, \\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0, \\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-6x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$

6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \quad - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \quad = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \quad - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \quad = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 \quad - 6x_5 = 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

№ 4 Исследовать и найти общее решение СЛАУ (Таблица 4).

Таблица 4.

Вар.	**Система уравнений**	**Вар.**	**Система уравнений**
1	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14. \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6, \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2, \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7, \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23, \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4-6x_5=-8, \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1, \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+5x_4+9x_5=16, \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=6. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+7x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+5x_4=4, \\ 7x_1+x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_4+4x_5=7, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=2, \\ x_1+4x_2+4x_4+5x_5=9, \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4+4x_5=8. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1-3x_2-3x_4=1, \\ -7x_1+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3+6x_4+11x_5=20, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=13, \\ 5x_1+4x_2+2x_3+6x_4+11x_5=19. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4+4x_5=7, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5=9, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=18. \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+6x_3+5x_4+10x_5=17, \\ 3x_1+3x_2+6x_3+4x_4+7x_5=12, \\ 5x_1+4x_2+8x_3+6x_4+11x_5=19, \\ 4x_1+3x_2+6x_3+6x_4+10x_5=19. \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6, \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4+2x_5=4, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-6x_4=2, \\ -15x_1-11x_2+2x_3-3x_4=1. \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=3, \\ x_1-3x_2+x_3-x_5=-2, \\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4-2x_5=-1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2. \end{cases}$

10	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1. \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_4+5x_5=8, \\ 3x_2-x_3+2x_4+5x_5=3, \\ x_1+2x_2+2x_4+3x_5=5, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3+4x_4+7x_5=12, \\ x_1+x_2+3x_4+4x_5=7, \\ 6x_1+6x_2+2x_3+8x_4+14x_5=24, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+4x_4+7x_5=13, \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+4x_4+6x_5=11, \\ x_2+x_4+x_5=2, \\ 2x_1+4x_2+x_3+5x_4+7x_5=13, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=6. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3+9x_4-3x_5=2. \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ 3x_1+4x_2+2x_3+6x_4+9x_5=17, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+5x_4+8x_5=16, \\ x_1+3x_2+x_3+4x_4+5x_5=10. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+4x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3+x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=22, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+2x_3+6x_4+11x_5=20, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+8x_5=15, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+7x_4+12x_5=22, \\ 4x_1+3x_2+4x_3+7x_4+11x_5=22. \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4-5x_5=8, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_4+5x_5=17, \\ 3x_2-x_3+2x_4+2x_5=3, \\ x_1+2x_2+2x_4+3x_5=5, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=9. \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5, \\ 3x_1-x_2-x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 4x_1-4x_3-2x_4-3x_5=-1. \end{cases}$

№ 5 Выяснить вопрос о положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы (Таблица 5).

Таблица 5.

Вар.	Квадратичная форма
1	$f(x_1;x_2;x_3)=2x_1^2-5x_2^2+8x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$
2	$f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$
3	$F=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$
4	$F=3x_1^2-x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$
5	$F=5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$
6	$F=5x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+15x_3^2$
7	$F=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2$

8	$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$
9	$F = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2$
10	$F = 5x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 5x_3^2$
11	$F = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$
12	$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
13	$F = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$
14	$F = -x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
15	$F = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
16	$f(x_1;x_2;x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
17	$F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$
18	$F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$
19	$F = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$
20	$F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$
21	$F = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$
22	$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$
23	$F = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_2^2 + 2x_3^2$
24	$F = 6x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2^2 + 5x_3^2$
25	$F = 9x_1^2 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 + 16x_2x_3 + 8x_2^2 + 10x_3^2$
26	$F = 2x_1^2 - x_2^2 - \tilde{o}_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$
27	$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
28	$F = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
29	$F = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$
30	$F = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Практическое занятие по теме «Аналитическая геометрия»

Цель: Целью освоения темы «Аналитическая геометрия» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

– осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

– использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

В результате освоения темы «Аналитическая геометрия» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы аналитической геометрии и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности.

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения.

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью.

Теоретическая часть

1. Векторы в пространстве

Всякий *вектор в пространстве* можно представить как сумму трех векторов, один из которых расположен на оси Ox, второй – на оси Oy, третий – на оси Oz:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \qquad (1.1)$$

где $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ - единичные векторы координатных осей (орты).

Модуль вектора $\bar{a}$ равен: $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.2).

Если через α; β; γ обозначить углы, которые вектор $\bar{a}$ составляет с положительными направлениями координатных осей, то формулы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}; \qquad (1.3)$$

дают выражения *направляющих косинусов* вектора $\overline{a}$ через его проекции.

Линейные операции над векторами:

1. Сумма векторов: $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x)\overline{i} + (a_y \pm b_y)\overline{j} + (a_z \pm b_z)\overline{k}$ (1.4)
2. Умножение вектора на скаляр $\lambda\overline{a} = \lambda a_x\overline{i} + \lambda a_y\overline{j} + \lambda a_z\overline{k}$ (1.5)

Если A(x_1, y_1, z_1) и B(x_2, y_2, z_2) – координаты начала и конца вектора, то проекции вектора:

$a_x=x_2-x_1$; $a_y=y_2-y_1$; $a_z=z_2-z_1$ (1.6).

Модуль $|\overline{a}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ (1.7)

Направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{|\overline{a}|}$; $\cos\beta = \frac{y_2-y_1}{|\overline{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{|\overline{a}|}$ (1.8)

Расстояние между точками M_1(x_1, y_1, z_1) и M_2(x_2, y_2, z_2) определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1.9)$$

Если начало отрезка совпадает с началом координат, то формула (1.9) примет вид:

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1.10)$$

Координаты точки M (x; y; z), делящей отрезок M_1 M_2 в отношении $\frac{M_1M}{M_2M} = \lambda$ находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.11)$$

или

$$\overline{r} = \frac{\overline{r_1}+\lambda\overline{r_2}}{2} \qquad (1.12).$$

Если точка M делит отрезок M_1 M_2 пополам, то λ=1 и формулы (1.11) примут вид

$$x = \frac{x_1+x_2}{2};\ y = \frac{y_1+y_2}{2};\ z = \frac{z_1+z_2}{2} \qquad (1.13).$$

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется скаляр (число), равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1.14)$$

б) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля $\overline{a}\cdot\overline{a} = a^2$ (1.15) в) Скалярное произведение единичных векторов определяется формулами:

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1;\ \bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=0 \qquad (1.16)$$

г) Скалярное произведение двух векторов через их проекции равно сумме произведений одноименных проекций перемножаемых векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z \qquad (1.17)$$

Угол между двумя векторами:

$$\cos(\bar{a}\cdot\bar{b})=\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (1.18)$$

Условие перпендикулярности двух векторов $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ (1.19)

6^0 а) Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{n}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) модуль $\bar{n}$, численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$\bar{n}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b}) \qquad (1.20)$$

2) $\bar{n}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 3) $\bar{n}$ направлен так, что вектор $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляют правильную тройку векторов.

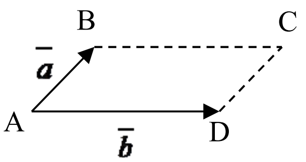
Векторное произведение обозначается $\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}$ или $\bar{n}=[\bar{a}\ \bar{b}]$.

б) Выражение векторного произведение через проекции перемножаемых векторов

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (1.21)$$

Условием параллельности векторов служит пропорциональность их одноименных проекций $\frac{a_x}{b_y}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ (1.22)

в) Площадь Δ ABC (рис. 1) равна половине площади параллелограмма ABCD и



равна $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$ (1.23)

Рис. 1

7. а) Смешанным произведением трех векторов называется выражение вида $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{n}$ или $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{n}$. Если векторы заданы своими координатами, то

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{\tilde{n}}=\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{\tilde{n}}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \tilde{n}_x & \tilde{n}_y & \tilde{n}_z \end{vmatrix} \qquad (1.24)$$

б) Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах $V=\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{\tilde{n}}=\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{\tilde{n}}$ (1.25)

в) Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$; $\bar{b}$ и $\bar{\tilde{n}}$ равен $V_n=\frac{1}{6}\,\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ (1.26)

2 *Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве*

1^0 Прямой линии на плоскости соответствует уравнение первой степени с двумя неизвестными.

а) Общее уравнение прямой Ax+By+C=0 (2.1),

где A;B; C – произвольные коэффициенты, причем $A^2+B^2\neq 0$.

б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом y=kx+b (2.2),

где k = tgφ –угловой коэффициент прямой; φ – угол наклона прямой к положительному направлению оси OX, b – величина отрезка, отсекаемая прямой на оси OY от начала координат (рис. 2)

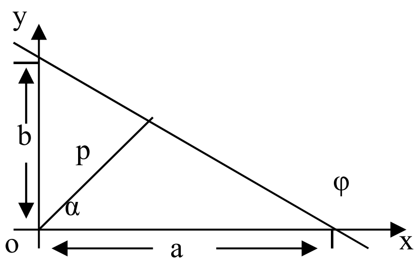


Рис. 2

в) Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (2.3),

здесь a; b – величины отрезков, которые прямая отсекает от осей координат (рис. 2).

г) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\grave{I}_1(x_1;y_1)$ и $\grave{I}_2(x_2;y_2)$ $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (2.4)

д) Нормальное уравнение прямой $x*\cos\alpha+y*\sin\alpha-p=0$ (2.5)

Здесь P- длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, α-угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox, против часовой стрелки, до перпендикуляра p (рис. 2). Чтобы привести общее уравнение прямой (2.1) к нормальному виду, нужно общее уравнение прямой умножить на нормирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (2.6),$$

взятый со знаком, противоположный знаку свободного члена C.

2^0 а) Всякая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными Ax+By+Cz+Д=0 (2.7), где А, В, С и Д, постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2+C^2 \neq 0$

б) Нормальное уравнение плоскости

$\bar{r} \cdot \bar{n} - p = 0$ или x cosα+y cosβ+z cos -p =0 (2.8),

где Р - длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, α,β,γ- углы, которые перпендикуляр образует с положительным направлением координатных осей; $\bar{n}$ единый вектор направления ОР. Для приведения общего уравнения плоскости (2.7) к нормальному виду нужно его уравнение умножить на нормирующий множитель μ= $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, при этом знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку Д в уравнении (2.7)

в) Уравнение плоскости в отрезках на осях $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$, (2.9)

где a, b, c- отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях.

г) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $\grave{I}_1(x_1;y_1)$ и перпендикулярной данному вектору $\overline{N}$=(A;B;C) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)$ (2.10)

д) Точка пересечения трех плоскостей находится из совместного решения их уравнений

е) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ и $M_3(x_3;y_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.11)$$

ж) Угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним векторами $\overline{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$ и $\overline{N_2}=(A_2;B_3;C_4)$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|} = \pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (2.12)$$

Если плоскости перпендикулярны, то $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (2.13)

Если плоскости параллельны, то $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ (2.14)

з) Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1)$ до плоскости $d=\frac{|\ Ax_1+By_1+Cz_1+D\ |}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2.15)

4^0 а)Уравнение прямой в общем виде $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (2.16)

б) Уравнение прямой в каноническом виде $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, (2.17) где $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ проекции направляющего вектора $\overline{a} = (l;m;n)$

прямой, проходящей через точку $\grave{I}_{01}(x_0; y_0)$

в) Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_{01}(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\overline{a} = (l;m;n)$ имеет вид $x = x_0 + lt;\ \ y = y_0 + mt;\ \ z = z_0 + nt;$ (2.18)

5^0 а) Уравнение прямой, приходящей через две данные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{z_2 - z_1} = \frac{z - z1}{z_2 - z_1} \qquad (2.19)$$

б) Угол между двумя прямыми $\cos\varphi = \pm\dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} * \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ (2.20)

Если прямые взаимно- перпендикулярны, то $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ (2.21)

если две прямые параллельны, то $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ (2.22)

6^0. Угол между прямой и плоскостью $\sin\varphi = \dfrac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2} + m^2 + n^2}$ (2.23)

Условие параллельности прямой и плоскости Аl+Вm+Сn=0 (2.24)

условие перпендикулярности прямой и плоскости $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ (2.25)

Точка пересечения прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскости Ax+By+Cz+D=0 находится по формулам $x = x_0 + lt$; $y = y_0 + mt;$ $z = z_0 + nt$; где $t = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d}{Al + Bm + Cn}$.

Решение типовых примеров

Пример №1. Дан параллелограмм АВСД, три вершины которого заданы:

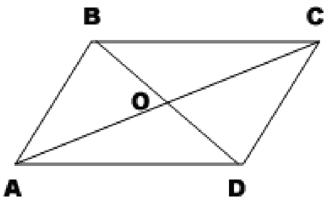
А (1;1;0);

В (3;2;-1);

С (2;-1;4).

Найти: а) четвертую вершину; б) острый угол параллелограмма; в) длины диагоналей; г) площадь параллелограмма.

Решение: Для определенности можно выполнить схематический чертеж.



а) Найдем координаты середины отрезка АС по формулам (13-1) $O(\frac{1+2}{2};\frac{1-1}{2};\frac{0+4}{2}); O(1.5;0;2);$.

Теперь найдем координаты точки Д по координатам точек В(3;2;-1) и О(1,5;0;2) по той же формуле $1.5=\frac{3+x}{2}; 3=3+x; x=0;$ $0=\frac{2+y}{2}$; y=-2; $2=\frac{-1+z}{2}$; z=5; D(0;-2;5)

б) Острый угол φ, как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ найдем, используя скалярное произведение векторов. Для этого сначала найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ по формулам (1.6).

$\overline{AB}=(3-1;2-1;-1-0)=(2;1;-1);$ $\qquad \overline{AD}=(0-1;-2-1;5-0)=(-1;-3;5)$.

Далее воспользуемся формулой (1.18)

$$\cos\varphi=\frac{2*(-1)+1*(-3)+(-1)*5}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+9+25}}=\frac{-10}{\sqrt{6}\sqrt{35}}\approx -0{,}6890;\ \varphi=\arccos(-0{,}6890)\approx 133{,}6^o$$

Так как необходимо найти острый угол, то он равен 180^0-$133{,}6^0$= $46{,}4^0$.

в) Длину диагоналей найдем по формуле длины отрезка по координатам его концов (1.9)

$$AC=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}\approx 4{,}58$$

$$BD=\sqrt{(0-3)^2+(-2-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61}\approx 7{,}81$$

г) для нахождения площади параллелограмма воспользуемся формулой (1.23) векторного произведения векторов

$$S_n=\left|\overline{AB}*\overline{AD}\right|=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}-6\bar{k}+\bar{k}-3\bar{i}-10\bar{j}=2\bar{i}-9\bar{j}-5\bar{k}$$

$$S_n=\sqrt{2^2+9^2+5^2}=\sqrt{110}\approx 10{,}5(кв.ед)$$

Пример № 2. Определить угол между прямой, проходящей через точки $M_1(0;2;-6)$ и $M_2(3;6;-6)$ и плоскостью 2x-y-2z-1=0. Найти расстояния от точек M_1 и M_2 до плоскости.

Решение: Уравнение прямой проходящей через две точки M_1 и M_2 примут вид $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-6}{-6-6};\ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-12}$. Угол между прямой и плоскостью находим по формуле (2.23):

$$\sin\varphi\frac{2\cdot3-1\cdot4+2\cdot12}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{9+16+144}}=\frac{26}{2\cdot13}=\frac{2}{3}=0{,}6667;\quad \varphi=\arcsin 0{,}6667=42^o$$

Расстояние от точек до плоскости найдем по формуле (2.15):

$$d_1=\frac{|2\cdot0+(-1)\cdot2+(-2)\cdot6-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|-15|}{\sqrt{9}}=5;\ d_1=\frac{|2\cdot3-1\cdot6+2\cdot6-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{11}{3}$$

Пример № 3. Вершины пирамиды находятся в точках $A_1(4;6;5)$; $A_2(6;9;4)$; $A_3(2;10;10)$; $A_4(7;5;9)$.

Найти: 1) длину ребра $A_1\,A_2$; 2) Угол между ребрами $A_1\,A_2$ и $A_1\,A_3$; 3) площадь грани $A_1\,A_2\,A_3$; 4) объем пирамиды $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$; 5) уравнение плоскости $A_1\,A_2\,A_3$; 6) уравнение прямой $A_1\,A_4$; 7)угол между ребром $A_1\,A_4$ и гранью $A_1\,A_2\,A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1\,A_2\,A_3$.

Решение: Найдем сначала координаты векторов $\overline{A_1A_2}$; $\overline{A_1A_3}$; $\overline{A_1A_4}$ и координаты векторного произведения $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$.

По формуле (1.7) получаем: $\overline{A_1A_2}$ =(6-4; 9-6; 4-5)=(2;3;-1);

$\overline{A_1A_3}$ =(2-4; 10-6; 10-5)=(-2;4;5); $\overline{A_1A_4}$ = (7-4; 5-6; 9-5)=(3;-1;4).

С помощью формулы (1.21) находим:

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right)=(19;-8;14).$$

1) Длина ребра $A_1\,A_2$ равна расстоянию между точками A_1 и A_2, которые вычисляем по формуле (1.9) $A_1\,A_2=\sqrt{(6-4)^2+(9-6)^2+(4-5)^2}=\sqrt{14}\approx3{,}74$. Тот же результат можно получить, найдя модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ по формуле (1.7).

2) Угол между ребрами $A_1\,A_2$ и $A_1\,A_3$ равен углу φ между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

В соответствии с формулой (1.18) получим

$$\cos\varphi=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_2}|\cdot|A_1A_3|}=\frac{2\cdot(-2)+3\cdot4-1\cdot5}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{^2+4^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{70}};\ \mathrm{P}\approx0{,}1195;\ \varphi\approx83{,}5^0$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника $A_1A_2A_3$, которую вычислим по формуле (1.23):

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\left(A_1A_2\times A_1A_3\right)=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}=\frac{\sqrt{621}}{2};\rho\approx12{,}46$$

4) Объем пирамиды найдем по формуле (1.26)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\\ 7-4 & 5-6 & 9-5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\frac{121}{6}=20\frac{1}{6}$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ как плоскости проходящей через 3 точки найдем по формуле **(2.11)** $\begin{vmatrix}x-4 & y-6 & Z-5\\ 6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\end{vmatrix}=0;$ $\begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$

19(x-4)-8(y-6)+14(z-5)=0; преобразовываем 19x-18y+14z-98=0.

6) Уравнение прямой A_1A_4 как прямой , проходящей через две точки найдем по формуле (2.19)

$\frac{x-4}{7-4}=\frac{y-6}{5-6}=\frac{z-5}{9-5};\quad \frac{x-4}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{4};$ x=4+3t; y=6-t; z=5+4t.

7) Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ равен углу φ между плоскостью и прямой, найдем по формуле (2.23)

$$\sin\varphi=\frac{|19*3-18*(-1)+14*4|}{\sqrt{19^2+18^2+14^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}}=\frac{121}{\sqrt{62\sqrt{26}}}\approx 0{,}9522 \qquad \varphi=\arcsin 0{,}9522\approx 72{,}2^0$$

8) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, можно записать, как уравнение прямой, проходящей через точку A_4 и перпендикулярной плоскости, имеющей нормальный вектор $\bar{n}=(19;-8;14)$, который для этой прямой будет направляющим вектором. Уравнение в данном случае принимает вид x=7+19t; y=5-8t; z= 9+14t.

Вопросы и задания

№1 Дан параллелограмм АВСД, три вершины которого заданы. Найти:

а) четвертую вершину;

б) острый угол параллелограмма;

в) длину диагоналей;

г) площадь параллелограмма (Таблица 1)

Таблица 1.

Вар.	A	B	C	Вар.	A	B	C
1	(6;-3;2)	(-2;-4;-5)	(-5;1;-3)	**16**	(-2;-5;-3)	(-5;3;-4)	(3;4;2)
2	(2;4;-5)	(-4;2;-3)	(-3;-3;6)	**17**	(-4;2;3)	(2;-3;-5)	(7;-2;1)
3	(-3;-1;2)	(5;3;-3)	(3;-4;4)	**18**	(-2;-4;5)	(-8;-1;-5)	(4;3;-2)
4	(-1;-2;3)	(-4;1;2)	(5;2;7)	**19**	(-3;5;-4)	(-5;6;2)	(3;-5;-2)

5	(1;2;3;)	(3;-4;-2)	(-4;-3;2)	**20**	(2;-3;4)	(6;-4;-5)	(-3;4;-2)
6	(2;-3;-1)	(-3;5;3)	(4;3;-4)	**21**	(5;-2;-4)	(-5;-8;-1)	(-2;4;3)
7	(-5;-3;-2)	(3;-4;-5)	(4;2;3)	**22**	(2;3;-4)	(-3;-5;2)	(-2;-1;7)
8	(-3;2;6)	(-4;-5;-2)	(1;-3;-5)	**23**	(4;-5;2)	(2;-3;-4)	(-3;6;-3)
9	(-2;3;-1)	(1;2;-4)	(2;7;5)	**24**	(5;-4;-3)	(6;2;-5)	(-5;-2;3)
10	(2;3;1)	(-4;-2;3)	(-3;2;-4)	**25**	(-3;4;2)	(-4;-5;6)	(4;-2;-3)
11	(3;-4;2)	(-5;2;3)	(-1;7;-2)	**26**	(3;-2;-5)	(-4;-5;3)	(2;3;4)
12	(-4;-3;5)	(2;-5;6)	(-2;3;-5)	**27**	(3;-1;-2)	(3;-3;5)	(-4;4;3)
13	(4;2;-3)	(-5;6;-4)	(-2;-3;4)	**28**	(-1;2;-3)	(2;-4;1)	(7;5;2)
14	(-5;-3;-2)	(3;-4;-5)	(4;2;3)	**29**	(-3;6;-3)	(-4;3;-2)	(3;-5;-2)
15	(4;-2;-3)	(-4;6;-2)	(4;3;-4)	**30**	(-1;-2;3)	(-4;3;3)	(3;2;1)

№2. Найти угол между плоскостью α и прямой, проходящей через начало координат и точку М (таблица2). Вычислить расстояние от точки М до плоскости.

Таблица 2.

Вариант	**M (x;y;z)**	**α**	**Вариант**	**M (x;y;z)**	**α**
1	(2;-1;3)	3x-y+2z-4=0	**16**	(-4;-3;-5)	x-3y+2z-4=0
2	(-2;4;-3)	X+5y+7z-2=0	**17**	(-1;-4;5)	-2x+4y+z+5=0
3	(-4;5;-1)	4x+y-2z+5=0	**18**	(-1;3;2)	-x+2y+3z-4=0
4	(2;3;1)	5x+2y-z-3=0	**19**	(-3;2;5)	3x+2y-z+14=0
5	(3;2;-1)	2x+3y-z-4=0	**20**	(5;-1;-4)	x-2y+4z+5=0
6	(2;-2;4)	x-3y+5z-10=0	**21**	(4;2;-2)	5x+y-3z-10=0
7	(5;-3;2)	-x+3y+2z+14	**22**	(4;1;3)	X+2y+3z-6=0
8	(-3;2;1)	2x-y+z+5=0	**23**	(4;-3;-2)	5x+7y+z-2=0
9	(1;3;4)	2x+3y+z-6=0	**24**	(-2;4;2)	-3x+5y+z-10=0
10	(2;5;-3)	2x-y+3z+14=0	**25**	(-2;4;-3)	-5x+3y+z+1=0
11	(-4;5;-1)	4x+y-2z+5=0	**26**	(4;-3;-2)	3x+y-5z+1=0
12	(-3;-5;-4)	-3x+2y+z-4=0	**27**	(1;2;3)	-x+5y+2z-3=0
13	(-3;-2;4)	x-5y+3z+1=0	**28**	(2;1;-3)	-x+y+2z+5=0
14	(-3;-2;4)	7x+y+5z-2=0	**29**	(-5;-4;-3)	2x+y-3z-4=0
15	(1;-3;2)	X+2y-z+5=0	**30**	(3;1;2)	2x-y+5z-3=0

№3. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$

4) объем пирамиды;

5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3

6) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

7) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

8) выполнить чертеж. (Таблица 3)

Таблица 3.

Вар.	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**Вар.**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**
1	(0;3;2)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)	**16**	(4;5;0)	(2;4;-2)	(6;3;-1)	(2;3;0)
2	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;.0)	(-1;4;2)	**17**	(2;4;-1)	(0;3;-3)	(4;2;-2)	(0;2;-1)
3	(2;2;3)	(1;2;7)	(0;3;3)	(2;4;5)	**18**	(3;2;2)	(7;2;1)	(3;3;0)	(5;4;2)
4	(0;-2;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)	**19**	(4;1;0)	(2;0;2)	(6;-1;-1)	(2;0;-1)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)	**20**	(2;1;1)	(4;2;3)	(6;0;2)	(2;0;3)
6	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)	**21**	(-1;0;2)	(2;3;-1)	(-1;3;-2)	(1;4;0)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)	**22**	(4;5;2)	(2;4;0)	(6;1;3)	(2;3;2)
8	(-1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)	**23**	(0;2;-1)	(0;6;-2)	(1;-3;2)	(4;2;-1)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;5)	**24**	(0;3;2)	(0;-1;-7)	(3;1;0)	(-2;-2;-5)
10	(2;-1;2)	(1;-1;6)	(0;0;2)	(2;1;4)	**25**	(4;2;1)	(2;0;0)	(6;1;-1)	(2;2;-1)
11	(2;-1;3)	(4;-2;2)	(-4;5;1)	(-3;2;1)	**26**	(1;2;-3)	(5;-4;1)	(2;-2;4)	(3;2;-1)
12	(2;-2;4)	(-4;-5;1)	(-3;2;1)	(2;3;1)	**27**	(1;2;3)	(1;-3;2)	(-5;1;-4)	(4;-2;2)
13	(-3;-2;4)	(-4;-3;5)	(4;-1;-2)	(4;1;3)	**28**	(-5;4;3)	(2;-1;3)	(1;-3;-2)	(3;2;1)
14	(-1;3;2)	(2;1;-3)	(-2;4;2)	(-2;-4;5)	**29**	(-2;-1;-3)	(3;5;-2)	(-4;2;-5)	(-5;4;3)
15	(5;-1;-4)	(3;1;2)	(3;2;1)	(3;5;-2)	**30**	(-1;3;2)	(-3;-2;1)	(2;-4;-3)	(5;2;-4)

Список литературы

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные.— Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 c. — 978-5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 c. — ISBN 978-5- 94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html
3. Шипачев, В. С., под ред. А. Н. Тихонова Высшая математика. Базовый курс: учеб. пособие для бакалавровМ.: Юрайт, 2013

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
2. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. —URL: http://www.iprbookshop.ru/49604.html