Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Корректирующий курс по информатике»

Направление подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2020

Введение

Учебная дисциплина информатика, появившись в конце второй половины XX в., прочно закрепилась в учебных планах университетов. Сам термин «информатика» возник в 60-х гг. XX в. во Франции для выделения области знаний, связанной с автоматизированной обработкой информации с помощью электронно-вычислительных машин. Informatique (информатика) происходит от слияния французских слов information (информация) и automatique (автоматика) и означает «информационная автоматика или автоматизированная переработка информации». Слово «информатика» вошло в употребление в разных языках: немецком – «informatik», итальянском – «informatica», польском – «informatyka», испанском – «informatica» и др. В английском языке информатике соответствует термин computer science (дословно «компьютерная наука», «вычислительная наука»).

Несмотря на то, что появление дисциплины произошло благодаря развитию компьютерной техники и немыслимо без нее, информатика является широкой областью научных знаний и связана со многими фундаментальными и прикладными дисциплинами, такими как математика, кибернетика, физика, электроника, радиотехника, философия, лингвистика.

Важное место в курсе информатики занимает теоретическая информатика, отвечающая за изучение структуры и общих свойств информации и информационных процессов, разработку общих принципов построения информационной техники и технологии. Данное пособие посвящено основным темам теоретической информатики: понятию информации и измерению ее количества, системам счисления, логическим основам построения цифровых устройств, представлению информации в цифровых устройствах. В пособии рассмотрены примеры решения задач по изложенным темам, даны задачи для самостоятельного решения.

1. Информация

Термин информация происходит от латинского information, что означает разъяснение, осведомление, изложение.

Первоначальное значение этого термина – «сведения, передаваемые людьми устным, письменным или иным способом».

В философском смысле информация есть отражение реального мира с помощью сведений (сообщений). В широком смысле информация – это общенаучное понятие, включающее в себя обмен сведениями между людьми, обмен сигналами между живой и неживой природой, людьми и устройствами.

В информатике *информация* – сведения об объектах, и явлениях окружающей среды, их параметрах, свойствах и состоянии, которые уменьшают имеющуюся о них степень неопределенности, неполноты знаний.

Информация, предназначенная для передачи, называется сообщением. Сообщение может быть представлено в виде знаков и символов, преобразовано и закодировано с помощью электрических сигналов.

Информация, представленная в виде, пригодном для обработки (человеком, компьютером) называется *данными*. Данные могут быть, например, числовыми, текстовыми, графическими.

Чтобы происходил обмен информацией, должны присутствовать источник информации, передатчик, канал связи, приемник и получатель (рис. 1).

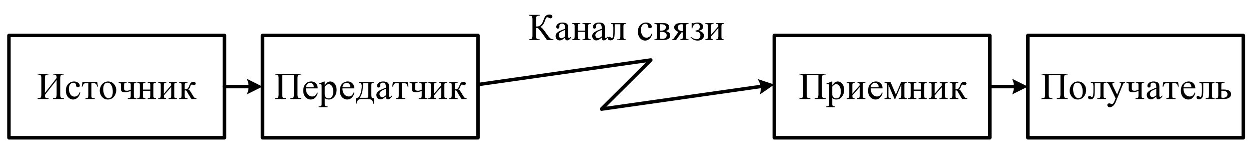


Рис. 1. Передача информации по каналу связи

Обычно в качестве получателя выступает человек, который оценивает информацию с точки зрения ее применимости для решения поставленной задачи. Процедура оценки информации проходит в три этапа, определяющие ее синтаксический, семантический и прагматический аспекты.

Определенный набор данных вне зависимости от смысловых и потребительских качеств характеризует синтаксический аспект информации.

Сопоставление данных с тезаурусом[1] формирует знание о наблюдаемом факте. Это является семантическим аспектом информации (отражает смысловое содержание информации).

Оценка практической полезности информации отражает ее прагматический аспект.

Свойства информации

Информация характеризуется определенными свойствами, зависящими как от данных (содержательной части информации), так и от методов работы с ними. Свойства информации делятся на две группы: потребительские и атрибутивные.

Атрибутивные свойства – это те свойства, которые отображают внутреннюю природу информации и особенности использования. Наиболее важными из этих свойств являются:

- информация предоставляет новые сведения об окружающем мире, отсутствовавшие до ее получения;
- информация не материальна, несмотря на то, что она проявляется в форме знаков и сигналов на материальных носителях;
- знаки и сигналы могут предоставить информацию только для получателя, способного их воспринять и распознать;
- информация неотрывна от физического носителя, но в то же время не связана ни с конкретным носителем, ни с конкретным языком;
- информация дискретна – она состоит из отдельных фактических данных, передающихся в виде отдельных сообщений;
- информация непрерывна – она накапливается и развивается поступательно.

[1] Тезаурус – это совокупность сведений, которыми располагает пользователь или система.

Качество информации определяется ее свойствами, отвечающими потребностям пользователя.

Рассмотрим наиболее важные потребительские свойства информации:

- полнота (достаточность);
- достоверность;
- адекватность;
- доступность;
- актуальность.

Полнота информации. Под полнотой информации понимают ее достаточность для принятия решений.

Достоверность информации. Под достоверностью информации понимают ее соответствие объективной реальности окружающего мира. Свойство достоверности информации имеет важное значение в тех случаях, когда ее используют для принятия решений.

Адекватность информации – это степень соответствия информации, полученной потребителем, тому, что автор вложил в ее содержание. Адекватность информации иногда путают с ее достоверностью. Это разные свойства. Можно привести пример адекватной, но не достоверной информации. Так, например, если 1 апреля в газете появится заведомо ложное сообщение, то его можно считать адекватным. Адекватно толковать его не как информационное, а как развлекательное. Тоже сообщение, опубликованное 2 апреля, будет и недостоверным, и неадекватным.

Доступность информации – мера возможности получить ту или иную информацию.

Актуальность информации – это степень соответствия информации текущему моменту времени. Нередко с актуальностью, как и с полнотой, связывают коммерческую ценность информации. Поскольку информационные процессы растянуты во времени, то достоверная и адекватная, но устаревшая информация может приводить к ошибочным решениям.

Единицы измерения количества информации

За единицу измерения информации принимается такое количество информации, которое содержит сообщение, уменьшающее неопределенность (неполноту знаний) в два раза.

Единица измерения информации называется *бит* (bit) – сокращение от английских слов binary digit («двоичная цифра»).

Рассмотрим на примере, что означает 1 бит информации.

Если положить в мешок два шарика разного цвета, то, загадывая какой шар будет вынут, будем иметь два варианта. Причем, ни один из этих вариантов не имеет преимущества перед другим. Таким образом, неопределенность знаний о цвете вынутого шара перед тем, как шар будет вынут, равна двум. После того как шар вынули, произошло одно из двух возможных событий. Неопределённость знаний уменьшилась в два раза: было два варианта, остался один. Значит, узнав цвет вынутого шара, получили 1 бит информации.

В компьютерной технике отдают предпочтение двоичной системе счисления. Это связано с тем, что в техническом устройстве наиболее просто реализовать два противоположных физических состояния: намагничено – не намагничено, есть сигнал – нет сигнала, заряжен конденсатор – не заряжен и т.п. При этом одно состояние принято обозначать цифрой 0, а другое – цифрой 1.

В качестве единицы измерения информации в технике принят бит, соответствующий одному двоичному разряду со значением 0 или 1. Бит является наименьшей возможной единицей измерения информации. Объем информации, записанной двоичными знаками в памяти компьютера или на внешнем носителе, подсчитывается просто по количеству требуемых для такой записи двоичных разрядов. При этом невозможно нецелое число битов.

Для удобства использования введены и более крупные, чем бит, единицы измерения. Восемь бит (двоичных разрядов) называются *байтом*. Также используются приставки «кило», «мега», «гига» и т.д. для обозначения крупных объемов информации:

1 Килобайт = 1024 байт = 2^{10} байт =2^{13} бит.

1 Мегабайт = 1024 Килобайт = 2^{10} Килобайт = 2^{20} байт = 2^{23} бит.

1 Гигабайт =1024 Мегабайт = 2^{10} Мегабайт = 2^{30} байт = 2^{33} бит.

1 Терабайт = 1024 Гигабайт = 2^{10} Гигабайт= 2^{40} байт = 2^{43} бит.

1 Петабайт = 1024 Терабайт = 2^{10} Терабайт = 2^{50} байт = 2^{53} бит.

1 Эксабайт = 1024 Петабайт = 2^{10} Петабайт = 2^{60} байт = 2^{63} бит.

Измерение количества информации

Рассмотрим два подхода к измерению информации – вероятностный и объемный. Вероятностный или энтропийный подход принят в теории информации и кодирования. Данную теорию обобщил и развил в 1940-х годах К. Шеннон[1]. Объемный подход возник в результате появления ЭВМ и часто используется в технике.

Вероятностный подход

Данный подход измерения информации исходит из следующей модели: получатель сообщения имеет определенное представление о возможных наступлениях некоторых событий. Эти представления в общем случае выражаются вероятностями, с которыми ожидается то или иное событие.

Энтропия (мера неопределенности) характеризуется некоторой математической зависимостью от совокупности вероятностей наступления этих событий. Количество информации в сообщении определяется тем, насколько уменьшилась энтропия после получения сообщения.

Рассмотрим вычисление количества информации сообщения о наступлении одного из N равновероятных событий. Обозначим величину, измеряющую неопределенность (энтропию) через H.

[1] Клод Элвуд Шеннон – американский инженер и математик, занимался исследованиями в области общей теории связи, теории автоматов, электротехники, теории информации.

Величины N и H связаны между собой некоторой функциональной зависимостью:

$$H = f(N).$$

Обозначим через H_1 энтропию до совершения события, H_2 – энтропию после наступления события. Тогда количество информации I об исходе опыта определяется как разность энтропий до и после опыта:

$$\mathbf{I = H_1 - H_2.}$$

В случае, когда получен конкретный результат, имевшаяся неопределенность будет снята $H_2 = 0$ и количество полученной информации совпадает с первоначальной энтропией:

$$\mathbf{I = H_1.}$$

Формулу для вычисления количество полученной информации I для равновероятных событий предложил Р. Хартли[1]:

$$I = \log_2 N. \qquad (1)$$

Формулу для вычисления количества информации, учитывающую неодинаковую вероятность событий, предложил К. Шеннон в 1948 г. Количественная зависимость между вероятностью события p и количеством информации I в сообщении о нем выражается формулой:

$$I = -\log_2 p. \qquad (2)$$

Связь между вероятностью события и количеством информации в сообщении об этом событии можно выразить следующим образом – чем меньше вероятность некоторого события, тем больше информации содержит сообщение об этом событии.

Количество информации для событий с различными вероятностями $p_1, p_2, \dots p_n$ определяется по формуле (эту формулу также называют формулой Шеннона):

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i. \qquad (3)$$

Заметим, что формула, предложенная Р. Хартли, представляет собой частный случай более общей формулы Шеннона:

[1] Ральф Винтон Лайон Хартли – американский учёный, заложивший основы теории информации.

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = -\log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

Используя формулу (1) можно записать и формулу, которая связывает количество возможных событий N и количество информации I:

$$N = 2^I. \tag{4}$$

Объемный подход

При объемном подходе к измерению количества информации отвлекаются от содержания информации и рассматривают информационное сообщение как ряд знаков, который можно закодировать с помощью конечной последовательности символов некоторого алфавита.

Если допустить, что все символы алфавита встречаются в тексте с одинаковой частотой (равновероятно), то количество информации, которое несет каждый символ i (информационный вес одного символа), вычисляется по формуле:

$$i = \log_2 N, \tag{5}$$

где N – мощность алфавита (полное количество символов, составляющих алфавит выбранного кодирования). Тогда мощность алфавита:

$$N = 2^i. \tag{6}$$

В алфавите, который состоит из двух символов (двоичное кодирование), каждый символ несет 1 бит ($\log_2 2 = 1$) информации; из четырех символов – каждый символ несет 2 бита информации($\log_2 4 = 2$); из восьми символов – 3 бита ($\log_2 8 = 3$) и т. д. Один символ из алфавита мощностью 256 несет в тексте 8 битов ($\log_2 256 = 8$) информации.

Если весь текст состоит из k символов, то при объемном подходе размер содержащейся в нем информации I определяется по формуле:

$$I = k \cdot i, \tag{7}$$

где i – информационный вес одного символа в используемом алфавите.

Максимальное количество слов L из m букв, которое можно составить из алфавита мощностью N:

$$L = N^m. \tag{8}$$

2. Системы счисления

Любые данные для обработки компьютером представляются последовательностями двух чисел – единицы и нуля. Такая форма представления получила название двоичной. Важным понятием при представлении данных в компьютере является система счисления.

Система счисления – это совокупность приемов и правил представления чисел с помощью символов, имеющих определенное количественное значение.

Различают позиционные системы счисления и непозиционные.

Непозиционная системы счисления – система, в которой символы, обозначающие то или иное количество, не меняют своего значения в зависимости от местоположения (позиции) в изображении числа.

Запись числа A в непозиционной системе счисления может быть представлена выражением:

$$\mathrm{A} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 + \ldots + \mathrm{D}_\mathrm{n} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D}_\mathrm{i}$$

где D_1, D_2, …, D_n – символы системы

Непозиционной системой счисления является самая простая система с одним символом (палочкой). Для изображения какого-либо числа в этой системе надо записать количество палочек, равное данному числу. Это система самая неэффективная, так как форма записи очень громоздка.

К непозиционной системе относится и римская, табл. 1.

Таблица 1

Римские цифры	Значение (обозначаемое количество)	Римские цифры	Значение (обозначаемое количество)
I	1	C	100
V	5	D	500
X	10	M	1000
L	50		

Так, например, в римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) значение цифры X в любой позиции равно десяти.

Запись чисел в данной системе счисления осуществляется по правилам:

1) если цифра слева меньше, чем цифра справа, то левая цифра вычитается из правой (IX: 1<10, следовательно, 10 – 1 = 9; XC: 10<100, следовательно, 100 – 10 = 90);

2) если цифра справа меньше или равна цифре слева, то эти цифры складываются (VII: 5+1+1=7; XXXV: 10+10+10+5=35).

Так, число 1984 в римской системе счисления имеет вид MCMLXXXIV (M – 1000, CM – 900, LXXX – 80, IV – 4).

В римской системе нельзя записывать подряд 4 одинаковых цифр.

В общем случае непозиционные системы счисления характеризуются сложными способами записи чисел и правилами выполнения арифметических операций.

Позиционная система счисления – это система счисления, в которой значение цифры определяется ее местоположением (позицией) в изображении числа.

Алфавит позиционной системы счисления – упорядоченный набор символов (цифр) $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, используемый для представления чисел в данной системе счисления.

Основание позиционной системы счисления – количество символов (цифр) алфавита $q = n + 1$, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.

Примером позиционной системы счисления является десятичная система счисления. Ее алфавит $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Основание $q = 10$.

Например, в десятичной системе счисления число 333 записывается с помощью одной цифры 3, но значение каждой цифры определяется ее местоположением в числе: первая тройка – число сотен в числе, вторая тройка – число десятков, последняя – число единиц.

За основание системы счисления можно принять любое натуральное число – два, три, четыре и т. д.

Обычно в качестве алфавита берутся последовательные целые числа от 0 до (q – 1) включительно. В тех случаях, когда общепринятых (арабских) цифр не хватает для обозначения всех символов алфавита системы счисления с основанием q > 10, используются буквенные обозначения цифр. В табл. 2 приведены алфавиты некоторых систем счисления.

Таблица 2

Система счисления	Основание	Алфавит системы счисления
Двоичная	2	0, 1
Троичная	3	0, 1, 2
Четверичная	4	0, 1, 2, 3
Пятеричная	5	0, 1, 2, 3, 4
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двенадцатеричная	12	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Для позиционной системы счисления справедливо равенство:

$$A_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \cdots a_{-m} q^{-m}, \qquad (9)$$

где $A_q (A_q = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})$ – любое число, записанное в системе счисления с основанием q;

a_i – цифры числа (i = n, n – 1, …, 1, 0, –1, –2, –m);

n +1 – число целых разрядов;

m – число дробных разрядов.

Равенство (9) называют развернутой формой записи числа.

Пример

Записать числа $386{,}154_{10}$ $101{,}11_2$, $561{,}42_8$, $6BF{,}A_{16}$ в развернутой форме. Согласно равенству (9) имеем:

$386{,}15_{10} = 3{\cdot}10^2 + 8{\cdot}10^1 + 6{\cdot}10^0 + 1{\cdot}10^{-1} + 5{\cdot}10^{-2}$

$101{,}11_2 = 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^{-1} + 1{\cdot}2^{-2}$

$561{,}423_8 = 5{\cdot}8^2 + 6{\cdot}8^1 + 1{\cdot}8^0 + 4{\cdot}8^{-1} + 2{\cdot}8^{-2} + 3{\cdot}8^{-3}$

$6BF{,}A_{16} = 6{\cdot}16^2 + B{\cdot}16^1 + F{\cdot}16^0 + A{\cdot}16^{-1}$

В вычислительной технике наибольшее распространение получили двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная системы счисления.

Перевод чисел в позиционных системах счисления

Приведем таблицу для перевода первых 16 чисел в различные системы счисления (табл. 3).

Таблица 3

Десятичные числа q = 10	Двоичные числа q = 2	Восьмеричные числа q = 8	Шестнадцатеричные числа q = 16
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Перевод чисел из системы счисления с основанием q в десятичную систему счисления

Правило

Перевод в десятичную систему числа A, записанного в системе счисления с основание q в виде $A_q = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ сводится к вычислению значения многочлена (9) средствами десятичной арифметики.

Примеры

1. Перевести число $7A5F_{16}$ в десятичную систему.

$q = 16, \qquad n = 3.$

$7A5F_{16} = 7\cdot16^3 + A\cdot16^2 + 5\cdot16^1 + F\cdot16^0 = 7\cdot16^3 + 10\cdot16^2 + 5\cdot16 + 15 = 28672 +$
$+ 2560 + 80 + 15 = 31327_{10}$

2. Перевести число $1001{,}1101_2$ в десятичную систему.

$q = 2, \qquad n = 3, \qquad m = 4.$

$1001{,}1101_2 = 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2} + 0\cdot2^{-3} + 1\cdot2^{-4} =$
$= 8 + 0 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0 + 0{,}0625 = 9{,}8125_{10}.$

3. Перевести число $125{,}03_8$ в десятичную систему.

$q = 8, \qquad n = 2, \qquad m = 2.$

$1\cdot8^2 + 2\cdot8^1 + 5\cdot8^0 + 0\cdot8^{-1} + 3\cdot8^{-2} = 64 + 16 + 5 + 0 + 0{,}046875 = 85{,}046875_{10}.$

Перевод чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием q

Перевод вещественного числа из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием q осуществляется в два этапа. Переводится раздельно целая и дробная часть числа, а затем при записи числа в новой системе счисления целая часть запятой (точкой) отделяется от дробной.

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием q

Правило

Для перевода целого числа A из десятичной системы счисления в систему с основанием q необходимо A разделить с остатком (нацело) на число q, записанное в десятичной системе. Затем неполное частное, полученное от деления, нужно снова разделить с остатком на q и т. д., пока последнее полученное неполное частное не станет равным нулю. Представлением числа A в новой системе счисления будет последовательность остатков деления, изображенных q-ичной цифрой и записанных в порядке, обратном порядку их получения.

П р и м е р ы

1. Перевести число 20959_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

Число	Частное	Остаток
20959:16	=1309	15
1309:16	= 81	13
81:16	= 5	1
5:16	= 0	5

Ответ: $20959_{10} = 51DF_{16}$.

2. Перевести число 405_{10} в двоичную систему счисления.

Число	Частное	Остаток
405:2	= 202	1
202:2	= 101	0
101:2	= 50	1
50:2	= 25	0
25:2	= 12	1
12:2	= 6	0
6:2	= 3	0
3:2	= 1	1
1:2	= 0	1

Ответ: $405_{10} = 110010101_2$.

Перевод правильных дробей из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием q

Правило

Для перевода дроби из десятичной системы счисления в систему с основанием q необходимо последовательно выполнять умножение исходной дроби и получаемых дробных произведений на основание системы счисления q до тех пор, пока не получится нулевая дробная часть или не будет достигнута требуемая точность вычислений. Представлением дроби в новой системе счисления будет последовательность полученных целых частей произведения, записанных в порядке их получения.

Примеры

1. Перевести число $A=0{,}125_{10}$ в двоичную систему счисления.

$0{,}125 \times 2 = 0{,}25 = 0 + 0{,}25$

$0{,}25 \times 2 = 0{,}5 = 0 + 0{,}5$

$0{,}5 \times 2 = 1$ Останавливаемся, т. к. получили нулевую дробную часть

Ответ: $0{,}125_{10} = 0{,}001_2$.

2. Перевести число $74{,}67_{10}$ в восьмеричную систему счисления с точностью до пятого знака.

Переведем сначала в восьмеричную систему счисления целую часть числа, затем дробную часть.

Число		Частное	Остаток
74:8	=	9	2
9:8	=	1	1
1:8	=	0	1

$74_{10} = 112_8$

$0{,}67 \times 8 = 5{,}36 = 5 + 0{,}36$

$0{,}36 \times 8 = 2{,}88 = 2 + 0{,}88$

$0{,}88 \times 8 = 7{,}04 = 7 + 0{,}04$

$0{,}04 \times 8 = 0{,}32 = 0 + 0{,}32$

$0{,}32 \times 8 = 2{,}56 = 2 + 0{,}56$ Останавливаемся, т.к. получили 5-й знак после запятой

$0{,}67_{10} = 0{,}52702_8$

Ответ: $72{,}67_{10} = 112{,}52702_8$.

Перевод чисел из двоичной системы счисления в системы с основанием $q = 2^n$

Перевод чисел из двоичной системы в системы с основанием, равным степени двойки, выполняется по более простым правилам, чем с другим основанием.

Правило

Для перевода двоичного числа в систему с основанием $q = 2^n$ нужно число разбить влево и вправо от запятой на группы по n цифр в каждой. Если в первой левой или последней правой группах окажется менее n цифр, то их необходимо дополнить слева и справа нулями. Затем для каждой группы, состоящей из n двоичных цифр, записать соответствующее число в системе счисления $q = 2^n$.

Примеры

1. Число 1011111100000011_2 перевести в восьмеричную систему счисления.

$q = 8 = 2^3$ $n = 3$.

Заданное число разобьем справа налево на группы по 3 цифры (триады) и запишем соответствующие им числа в восьмеричной системе:

$$1011111100000011_2 = \underset{2}{\underset{\downarrow}{010}}\ \underset{7}{\underset{\downarrow}{111}}\ \underset{7}{\underset{\downarrow}{111}}\ \underset{4}{\underset{\downarrow}{100}}\ \underset{0}{\underset{\downarrow}{000}}\ \underset{3}{\underset{\downarrow}{011}} = 277403_8$$

2. Число $11011011100011,11011_2$ перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$q = 16 = 2^4$, $n = 4$.

Целую часть числа разобьем справа налево, а дробную – слева направо группы по 4 цифры (тетрады), недостающие группы дополним нулями и запишем соответствующие им числа в шестнадцатеричной системе:

$$11011011100011,11011_2 = \underset{3}{\underset{\downarrow}{0011}}\ \underset{6}{\underset{\downarrow}{0110}}\ \underset{E}{\underset{\downarrow}{1110}}\ \underset{3}{\underset{\downarrow}{0011}},\underset{D}{\underset{\downarrow}{1101}}\ \underset{8}{\underset{\downarrow}{1000}} = 36E3,D8_{16}$$

Перевод чисел из систем счисления с основанием $q = 2^n$ в двоичную систему

Правило

Для перевода числа из системы счисления с основанием $q = 2^n$ в двоичную систему нужно каждую цифру числа заменить эквивалентным двоичным числом длиной n разрядов.

П р и м е р ы

1. Число $537,45_8$ перевести в двоичную систему счисления.

$q = 8 = 2^3$ $n = 3$.

Заменим каждую цифру числа $537,45_8$ двоичным числом длиной три разряда (n = 3)

$536,45_8 = 101011110,100101_2$

(5→101, 3→011, 6→110, 4→100, 5→101)

2. Число $5F7,A23_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

$q = 16 = 2^4$ $n = 4$.

Заменим каждую цифру числа $5F7,A23_{16}$ двоичным числом длиной четыре разряда (n = 4)

$5F7,A23_{16} = 010111110111,101000100011_2$

(5→0101, F→1111, 7→0111, A→1010, 2→0010, 3→0011)

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Правила выполнения арифметических действий для всех позиционных систем счисления одинаковы и совпадают с правилами для десятичной системы счисления. При этом можно пользоваться таблицами сложения и умножения для системы счисления с основанием q.

Для q = 2, 8 и 16 таблицы сложения и умножения представлены ниже.

q = 2

a+b

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	10

a · b

a \ b	0	1
0	0	0
1	0	1

q = 8

a+b

b / a	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

a · b

b / a	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

q = 16

a+b

b / a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

a · b

b / a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Сложение

Если результат сложения двух цифр в системе счисления с основанием q больше q (т. е. полученное число двузначное), то старшая цифра результата равна 1. Таким образом, при сложении в следующий разряд может переходить только единица, а результат сложения в любом разряде будет меньше, чем q. Результат сложения двух положительных чисел имеет столько же значащих цифр, что и максимальное из двух слагаемых, либо на одну цифру больше, но этой цифрой может быть только единица.

П р и м е р ы

Сложить числа:

1. $100110011_2 + 1101001_2 = 110011100_2$

2. $723{,}3_8 + 467{,}53_8 = 1413{,}03_8$

3. $3B9{,}6_{16} + 78C{,}8_{16} = B45{,}E_{16}$

$$
\begin{array}{r}
100110011 \\
+1101001 \\
\hline
110011100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
723{,}3 \\
+\ 467{,}53 \\
\hline
1413{,}03
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3B9{,}6 \\
+\ 78C{,}8 \\
\hline
B45{,}E
\end{array}
$$

Вычитание

Если необходимо вычесть из цифры a цифру b и a ≥ b, то в столбце b таблицы сложения ищем значение числа a. Самая левая цифра в строке, в которой найдено значение числа a, и будет результатом вычитания. Если же a < b, то нужно заимствовать единицу из левого разряда, поэтому в столбце ищем число 1a, и левая цифра в соответствующей строке будет результатом вычитания.

П р и м е р ы

Выполнить вычитание чисел:

1. $1100000{,}001_2 – 101101{,}1_2 = 110010{,}101_2$

2. $1510{,}2_8 – 1430{,}73_8 = 57{,}25_8$

3. $25E{,}D8_{16} – 171{,}6_{16} = ED{,}78_{16}$

$$
\begin{array}{r}
1100000{,}001 \\
-\ 101101{,}1 \\
\hline
110010{,}101
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1510{,}2 \\
-\ 1430{,}73 \\
\hline
57{,}25
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25E{,}D8 \\
-\ 171{,}6 \\
\hline
ED{,}78
\end{array}
$$

Умножение

Умножение выполняется столбиком с использованием соответствующих таблиц умножения и сложения.

Отметим, что во всех позиционных системах счисления с любым основанием q умножение на числа вида q^m, где m – целое число, сводится просто к перенесению запятой умножаемого на m разрядов вправо или влево (в зависимости от знака m), так же, как и в десятичной системе счисления.

П р и м е р ы

Выполнить умножение чисел:

1. $10011_2 \cdot 100101_2 = 1010111111_2$

2. $1176{,}4_8 \cdot 45{,}3_8 = 56467{,}74_8$

3. $62{,}B_{16} \cdot 70{,}D_{16} = 2B7D{,}2F_{16}$

```
              1 0 0 1 1          1 1   7 6, 4            6  2, B
         ×  1 0 0 1 0 1        ×       4 5, 3        ×     7  0, D
            -----------        -------------         -----------
              1 0 0 1 1          3 5   7 3  4          5   0  2  F
          1 0 0 1 1            6 1 7   0 4         2 B 2 D
    1 0 0 1 1                4 7 7 2   0           -------------
    -------------------      -------------         2 B 7 D,  2  F
    1 0 1 0 1 1 1 1 1 1      5 6 4 6 7,  7 4
```

Деление

Как для умножения, так и для деления нужны обе таблицы – умножения и сложения в соответствующей системе счисления. Само деление выполняется уголком с последующим вычитание сомножителей.

Выполнить деление:

1. $11010111_2 : 101011_2 = 101_2$

2. $46230_8 : 53_8 = 710_8$;

3. $4C98_{16} : 2B_{16} = 1C8_{16}$.

```
1 1 0 1 0 1 1 1 | 101011      4 6 2 3 0 | 5 3        4 C 9 8 | 2 B
1 0 1 0 1 1     | 101         4 5 5     | 7 1 0      2 B     | 1 C 8
-----------                   -----                  ---
    1 0 1 0 1 1                   5 3                2 1 9
    1 0 1 0 1 1                   5 3                2 0 4
    -----------                   ---                -----
              0                     0                  1 5 8
                                                       1 5 8
                                                       -----
                                                           0
```

Двоично-десятичная система счисления

Двоично-десятичная система счисления широко используется в цифровых устройствах, когда основная часть операций связана не с обработкой и хранением вводимой информации, а с ее вводом и выводом на какие-либо индикаторы с десятичным представлением полученных результатов (микрокалькуляторы, кассовые аппараты и т. п.).

В двоично-десятичной системе счисления цифры от 0 до 9 представляют четырехразрядными двоичными комбинациями от 0001 до 1001, т.е. двоичными эквивалентами десяти первых шестнадцатеричных чисел (см. табл. 2).

Преобразования из двоично-десятичной системы в десятичную систему и обратные преобразования выполняются путем прямой замены четырех двоичных цифр одной десятичной цифрой или обратной замены.

Пример

Преобразовать число $00110111_{2\text{-}10}$ из двоично-десятичной системы в десятичную систему.

$$\underset{\displaystyle 3}{\underset{\downarrow}{0011}}\ \underset{\displaystyle 7}{\underset{\downarrow}{0111}}{}_{2\text{-}10}$$

Ответ: $00110111_{2\text{-}10} = 37_{10}$.

Две двоично-десятичные цифры составляют 1 байт. Таким образом, с помощью 1 байта можно представить значения от 0 до 99, а не от 0 до 255, как при использовании 8-разрядного двоичного кода. Используя 1 байт для представления каждых двух десятичных цифр, можно формировать двоично-десятичные числа с любым требуемым числом десятичных разрядов.

Так, если число 1000 0011 0010 0111 рассматривать как двоичное, то его десятичный эквивалент $1000\ 0011\ 0010\ 0111_2 = 33575_{10}$ в несколько раз больше десятичного эквивалента двоично-десятичного числа $1000\ 0011\ 0010\ 0111_{2\text{-}10} = 8327_{10}$.

3. Логические основы работы ЭВМ

Основу ЭВМ и других цифровых устройств составляют элементарные логические схемы, которые работают в строгом соответствии с законами и правилами алгебры логики. Знание и понимание этих законов и правил помогает лучше разобраться с принципами работы ЭВМ.

Алгебра логики (булева алгебра – по фамилии ученого Д. Буля[1]) является частью раздела математики под названием математическая логика, посвященного изучению математических доказательств и вопросов оснований математики. Построенная Д. Булем алгебра служила для описания логических действий над высказываниями. В честь ученого переменные логического типа в языках программирования назвали булевскими переменными (тип Boolean в языках Basic и Pascal, bool в C, C++).

Понятие высказывания

Основными объектами алгебры логики являются высказывания.

Высказывание – это утверждение, которое либо истинно, либо ложно и не может быть тем и другим одновременно. Приведем примеры высказываний:

- Число 14 делится на 2 и 7.
- Париж – столица Испании.
- Хабаровск стоит на Амуре.
- 3 > 1.

Высказывания «Число 14 делится на 2 и 7» и «Хабаровск стоит на Амуре» истинны, а высказывания «Париж – столица Испании» и «3 > 1» ложны.

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от содержания отвлекаются. Истинное значение высказывания обозначают цифрой 1, а ложное – цифрой 0. Таким образом, высказывания фактически являются двоичными объектами.

[1] Джордж Буль – английский математик и логик, основоположник математической логики.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть *простым* или элементарным. Будем обозначать простые высказывания буквами латинского алфавита. Запись X = 1 означает, что высказывание X истинно, а запись X = 0, что оно ложно.

Высказывания, которые получаются из простых с помощью логических операций, принято называть *сложными* или составными. Из вышеприведенных высказываний второе, третье и четвертое являются простыми, а первое высказывание, образованное из простых высказываний «Число 14 делится на 2» и «Число 14 делится на 7», является сложным.

Простые высказывания соответствуют логическим переменным, а сложные – логическим функциям или выражениям. Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записываются возможные наборы переменных (аргументов), а в правой – соответствующие им значения функции. Это возможно по той причине, что все сочетания логических аргументов легко перечислить.

Логические операции

Основными операциями алгебры логики являются отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция. В вычислительной технике также часто используется операция исключающее ИЛИ.

Отрицание

Операция отрицания является унарной, т.к. имеет один аргумент. Иначе ее называют *инверсией*, *дополнением*, *НЕ* и обозначают $\overline{X}$ или ¬X, NOT *X*.

Отрицанием $\overline{X}$ некоторого высказывания X называется такое высказывание, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

Определение отрицания может быть записано с помощью таблицы истинности:

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Конъюнкция

Операцию конъюнкции еще называют *логическим умножением, логическим И*. Для обозначения данной операции используют символы ∧, &, точку, которую можно опускать, AND.

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания X и Y.

Определение конъюнкции может быть записано в виде таблицы истинности:

X	Y	X&Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение конъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число составляющих: конъюнкция $X_1 \& X_2 \& X_3 \& \ldots \& X_n$ истинна тогда и только тогда, когда истинны все высказывания $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$, следовательно, принимает значение «ложь», когда ложно хотя бы одно из этих высказываний.

Дизъюнкция

Операцию дизъюнкции иначе называют *логическим сложением, логическим ИЛИ*. Для обозначения логического сложения используют символы ∨, +, OR.

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний.

Определение дизъюнкции может быть записано в виде таблицы истинности:

X	Y	X ∨ Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Определение дизъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число составляющих: дизъюнкция $X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \ldots \vee X_n$ истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, а, следовательно, принимает значение «ложь», когда все высказывания ложны.

Импликация

Операцию импликации иначе называют логическим следованием и для обозначения используют символ →.

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно и Y ложно.

Определение импликации может быть записано в виде таблицы истинности:

X	Y	X → Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция

Операцию эквиваленции иначе называют *логическим тождеством*, *эквивалентностью* и для обозначения используют символы =, ↔, ~.

Эквиваленцией двух высказываний X и Y называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба эти высказывания истинны или оба ложны.

Определение эквиваленции может быть записано в виде таблицы истинности:

X	Y	X ↔ Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операция исключающее ИЛИ

Операция исключающее ИЛИ (*неравнозначность, сложение по модулю два*) обозначается символом $\oplus$ и отличается от логического ИЛИ только при $X = 1$ и $Y = 1$. Таким образом, неравнозначностью двух высказываний X и Y называют такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда одно их этих высказываний истинно, а другое ложно.

Определение данной операции может быть записано в виде таблицы истинности:

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Операция исключающее ИЛИ фактически сравнивает на совпадение два двоичных разряда.

Логические операции инверсии, дизъюнкции, конъюнкции образуют полную систему логических операций, из которых можно построить сколь угодно сложное логическое выражение.

Формулы для выражения логических операций импликации, эквиваленции, исключающее ИЛИ через операции инверсии, дизъюнкции, конъюнкции имеют вид:

$$X \rightarrow Y = \overline{X} \vee Y,$$

$$X \leftrightarrow Y = \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \vee X \,\&\, Y,$$

$$X \oplus Y = (X \vee Y) \,\&\, (\overline{X} \vee \overline{Y}).$$

При вычислении значения логического выражения принято следующее старшинство (приоритет) логических операций:

- инверсия;
- конъюнкция;
- дизъюнкция;

- импликация;
- эквиваленция.

Для изменения указанного порядка используют скобки.

Законы алгебры логики

Законы логики записываются в виде формул, которые позволяют производить эквивалентные преобразования логических выражений.

Закон тождества

Всякое высказывание тождественно самому себе:

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}.$$

Закон идемпотентности

Закон означает отсутствие показателей степени:

$$\mathrm{X} \vee \mathrm{X} = \mathrm{X},$$

$$\mathrm{X} \,\&\, \mathrm{X} = \mathrm{X}.$$

Закон исключения констант

Для логического сложения:

$$\mathrm{X} \vee 1 = 1, \qquad \mathrm{X} \vee 0 = \mathrm{X}.$$

Для логического умножения:

$$\mathrm{X} \,\&\, 1 = \mathrm{X}, \qquad \mathrm{X} \,\&\, 0 = 0.$$

Закон поглощения

Для логического сложения:

$$\mathrm{X} \vee \mathrm{X} \,\&\, \mathrm{Y} = \mathrm{X}.$$

Для логического умножения:

$$\mathrm{X} \,\&\, (\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}) = \mathrm{X}.$$

Закон противоречия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание X истинно, то его отрицание $\overline{\mathrm{X}}$ должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$X \,\&\, \overline{X} = 0.$$

Закон исключенного третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение «истина»:

$$X \vee \overline{X} = 1.$$

Закон двойного отрицания

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$\overline{\overline{X}} = X.$$

Законы общей инверсии (законы де Моргана)

$$\overline{X \vee Y} = \overline{X} \,\&\, \overline{Y},$$

$$\overline{X \,\&\, Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}.$$

Важное значение для выполнения преобразований логических выражений имеют законы алгебраических преобразований. Многие из них имеют аналоги в обычной алгебре.

Закон переместительный (коммутативности)

В обычной алгебре слагаемые и множители можно менять местами. В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

$$X \,\&\, Y = Y \,\&\, X,$$

$$X \vee Y = Y \vee X.$$

Закон сочетательный (ассоциативности)

Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять:

$$(X \,\&\, Y) \,\&\, Z = X \,\&\, (Y \,\&\, Z),$$

$$(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z).$$

Закон распределительный (дистрибутивности)

В отличие от обычной алгебры, где за скобки можно выносить только общие множители, в алгебре высказываний можно выносить за скобки как общие множители, так и общие слагаемые.

Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$(X \& Y) \vee (X \& Z) = X \& (Y \vee Z).$$

Дистрибутивность сложения относительно умножения:

$$(X \vee Y) \& (X \vee Z) = X \vee (Y \& Z).$$

Законы склеивания

$$X \& Y \vee X \& \overline{Y} = X,$$

$$(X \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}) = X.$$

Логические элементы

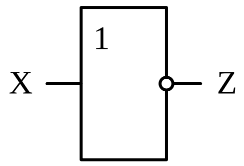
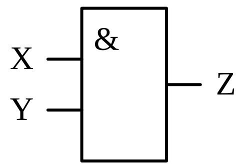
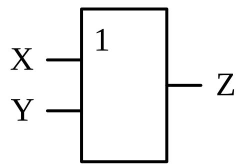
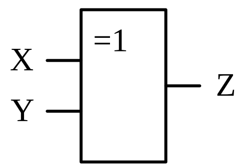
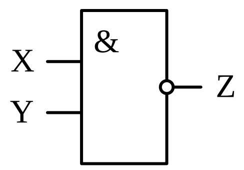
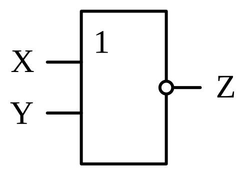
При всей сложности устройства электронных блоков современных компьютеров выполняемые ими действия осуществляются комбинацией относительно небольшого числа типовых электронных узлов. Перечислим основные из них:

- регистры для хранения данных (от лат. regestum – внесенное, записанное);
- комбинационные преобразователи кодов (шифратор, дешифратор, мультиплексор и др.);
- счетчики (кольцевой, синхронный, асинхронный);
- арифметико-логические узлы (сумматор, узел сравнения) и др.

Из этих узлов строятся интегральные микросхемы очень высокого уровня интеграции: микропроцессоры, модули ОЗУ, контроллеры внешних устройств и т. д.

Сами указанные узлы собираются из основных логических элементов. *Логический элемент* – часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую операцию или функцию. Условные обозначения основных логических элементов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Логическая функция	Условное обозначение логического элемента
Инверсия (НЕ) $Z = \overline{X}$	
Конъюнкция (И) $Z = X \& Y$	
Дизъюнкция (ИЛИ) $Z = X \vee Y$	
Исключающее ИЛИ $Z = X \oplus Y$	
Инверсия конъюнкции (И – НЕ) $Z = \overline{X \& Y}$	
Инверсия дизъюнкции (ИЛИ – НЕ) $Z = \overline{X \vee Y}$	

В качестве примера применения логических элементов в вычислительной технике рассмотрим устройство полусумматора и сумматора. Эти узлы лежат в основе арифметического устройства ЭВМ и иллюстрируют некоторые принципы выполнения вычислительных операций в компьютере.

В основе каждой из элементарных операций лежит некоторая последовательность логических действий. Рассмотрим, например, операцию сложения двух чисел: $3_{10} + 6_{10}$. Имеем:

$$\begin{array}{r} 011_2 \\ +\ \underline{110_2} \\ 1011_2 \end{array}$$

На каждом простейшем шаге операции сложения двум двоичным цифрам сопоставляется одно- или двузначное двоичное число по правилам: (0, 0) $\rightarrow$ 0, (0, 1) $\rightarrow$ 1, (1, 0) $\rightarrow$ 1, (1, 1) $\rightarrow$ 10. Таким образом, сложение цифр можно описать логической функцией. Если дополнить это логическим правилом переноса единицы в старший разряд для (1, 1) $\rightarrow$ 10, то сложение полностью сведется к цепочке логических операций.

Полусумматор реализует сложение двух одноразрядных двоичных чисел. Рассмотрим таблицу истинности сложения одноразрядных двоичных чисел A и B. Младшую цифру результата сложения обозначим S, а старшую, которая при сложении многоразрядных чисел будет перенесена в старший разряд, Co (от английских слов Carry out – выходной перенос). Таблица истинности для полусумматора имеет вид:

A	B	S	Co
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Рассмотрим три первые столбца A, B, S и сравним их с рассмотренными таблицами истинности логических элементов. Видно, что данные столбцы соответствуют логическому элементу исключающее ИЛИ:

$$S = A \oplus B = (\overline{A}\ \&\ B) \vee (A\ \&\ \overline{B}).$$

Аналогично рассмотрим столбцы A, B и C_o. Полученная таблица соответствует базовому логическому элементу И:

$$C_o = A\ \&\ B.$$

Таким образом, полусумматор реализуется с помощью базовых логических элементов (рис. 2).

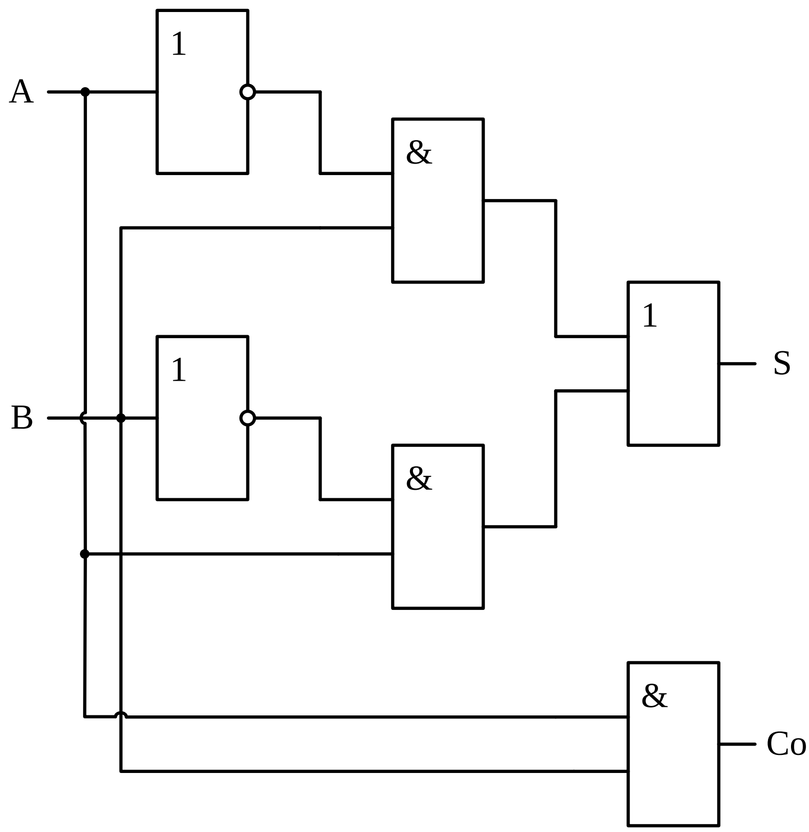


Рис. 2. Логическая схема полусумматора

Полусумматор является звеном *сумматора*, который при сложении двух чисел учитывает возможное наличие единицы, переносимой из старшего разряда. Полный одноразрядный сумматор удобно представить в виде двух полусумматоров (рис. 3): первый суммирует разряды A и B, а второй к полученному результату прибавляет бит переноса Ci (от английского Carry in – входной перенос).

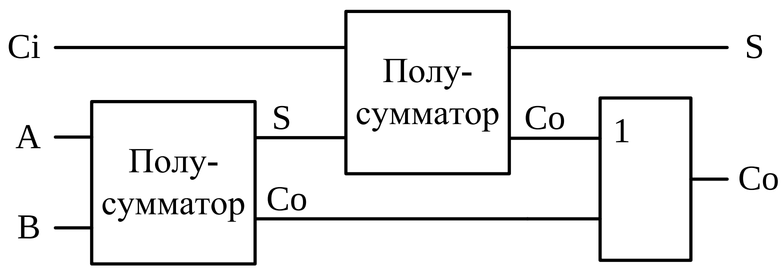


Рис. 3. Одноразрядный сумматор

Приведем таблицу истинности для сумматора:

Входы			Выходы	
A	B	Ci	S	Co
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Перейти к сложению многоразрядных чисел можно путем последовательного соединения соответствующего количества сумматоров. Схема суммирования двух четырехразрядных двоичных чисел $A = a_3a_2a_1a_0$ и $B = b_3b_2b_1b_0$ представлена на рис. 4. Как видно из рисунка, для суммирования младших разрядов a_0 и b_0 достаточно полусумматора, так как отсутствует сигнал входного переноса.

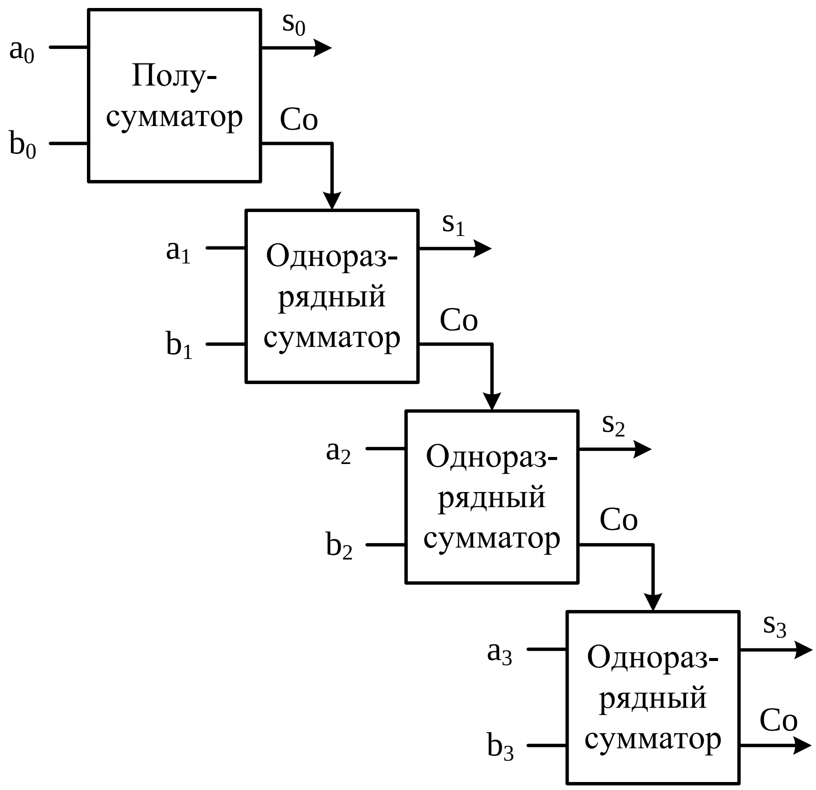


Рис. 4. Схема суммирования двух четырехразрядных чисел

4. Представление информации в компьютере

Любой компьютер предназначен для обработки, хранения, преобразования данных. Для выполнения перечисленных функций компьютер должен обладать некоторыми свойствами представления этих данных. Представление данных заключается в их преобразовании к виду, удобному для последующей обработки либо пользователем, либо компьютером. В зависимости от этого данные имеют внешнее и внутреннее представление.

Внешнее представление данных – это естественный и понятный для пользователя формат, в котором он вводит данные в компьютер и получает результат их обработки. Благодаря такому представлению пользователю легко и удобно работать с компьютером. Основными форматами данных, с которыми работает пользователь, являются:

- числовые данные (целые и вещественные);
- текст (последовательность символов);
- изображение (графика, фотографии, рисунки, схемы);
- звук.

Внутреннее представление данных – это формат, в котором данные хранятся и обрабатываются внутри ЭВМ. Внутреннее представление данных определяется логикой работы компьютера, принципами организации его памяти, физическими принципами, по которым происходит обмен сигналами между аппаратными компонентами компьютера.

Для автоматизации работы с данными, относящимися к различным типам важно унифицировать их форму представления – для этого обычно используется прием кодирования, то есть выражение данных одного типа через данные другого типа.

Кодирование целых чисел

Целые числа хранятся и обрабатываются в компьютере в двоичном формате. При вводе число записывается в привычной для нас десятичной системе счисления, а компьютер переводит его в двоичный код.

В математике, как известно, целыми числами называют множество из натуральных чисел, противоположных им по знаку чисел и числа нуль. В вычислительной технике и программировании в связи с разным внутренним представлением различают целые числа без знака – unsigned integer и целые числа со знаком – signed integer. От представления зависит внутренний формат и диапазон значений чисел. Для хранения целого числа в оперативной памяти выделяется фиксированное число байтов: один, два, четыре или восемь.

Целые числа без знака представляются в двоичной системе счисления, при этом диапазон значений изменяется от 0 до $2^n - 1$, где n – количество двоичных разрядов. Так, если под число отводится 1 байт (8 бит), то оно может изменяться в диапазоне от 0 до 255, а если 2 байта (16 бит), то от 0 до 65535. Представление числа 58 при однобайтном размещении показано на рис. 5: $58_{10} = 111010_2$ и старшие 6-й и 7-й разряды обнуляются.

Рис. 5. Представление числа 58 в формате без знака

Целые числа со знаком представляются в компьютере иначе. Один, старший, двоичный разряд обозначает знак числа: 0 – неотрицательное число, 1 – отрицательное. Для кодирования отрицательных значений существует прямой, обратный и дополнительный код. Положительные значения изображаются одинаково в прямом, обратном и дополнительном кодах – двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

Прямой код

Правило

Для представления числа в прямом коде n-разрядного формата нужно перевести число в двоичную систему счисления и дополнить слева нулями до n знаков. Так как старший разряд числа отводится для знака, а оставшиеся n – 1 разрядов – для значащих цифр, то в знаковый разряд записать 1, если число отрицательное, и оставить 0, если число положительное.

Структура представления числа в прямом коде изображена на рис. 6.

Рис. 6. Формат представления целого числа в прямом коде

Для примера, на рис. 7 и 8 показаны коды чисел 3_{10} и $–3_{10}$ в однобайтном формате.

Рис. 7. Представление числа 3 в прямом коде

Рис. 8. Представление числа –3 в прямом коде

Прямой код имеет следующие недостатки. Во-первых, допускается существование как значения «плюс нуль» так и «минус нуль»: 00000000 и 10000000. Во-вторых, усложняется структура ЭВМ, так как операция сложения двух чисел с разными знаками, должна быть заменена на операцию вычитания меньшей величины из большей и присвоения результату знака большей величины.

Обратный код

Обратный код при суммировании двух чисел с разными знаками позволяет заменить вычитание на обычное сложение, но не решает проблему с «плюс нулем» и «минус нулем».

Правило

Для представления отрицательного числа в обратном коде n-разрядного формата нужно модуль отрицательного числа записать в прямом коде n двоичных разрядах (перевести число в двоичную систему счисления и дополнить слева нулями до n знаков). Значения всех знаков инвертировать (нули заменить единицами, единицы нулями).

Дополнительный код

В современных компьютерах, как правило, отрицательные числа представляют в виде дополнительного кода. В дополнительном коде, как и в обратном, при суммировании двух чисел с разными знаками не требуется менять операцию сложения на вычитание, но в отличие от прямого и обратного кода нуль не кодируется двумя разными значениями. Диапазон значений целых чисел в дополнительном коде изменяется от -2^{n-1} до $2^{n-1} - 1$. Например, если под число отводится 1 байт, то оно может изменяться от –128 до +127, а если 2 байта, то от – 32768 до +32767.

Правило

Для представления отрицательного числа в дополнительном коде n-разрядного формата нужно представить его в обратном коде и прибавить 1 к последнему разряду числа.

Кодирование вещественных чисел

Вещественные числа в компьютере хранятся и обрабатываются в форме с плавающей запятой. При этом предполагается запись вещественного числа в виде:

$$X = \pm m \cdot q^{\pm p},$$

где m – мантисса числа ($|m| < 1$); q – основание системы счисления; p – порядок числа (p – целое число).

Изобразим структуру представления вещественного числа (рис. 9). Здесь порядок p числа задается в смещенной форме, позволяющей производить операции над порядками как над беззнаковыми числами. Это упрощает операции сравнения, сложения и вычитания порядков.

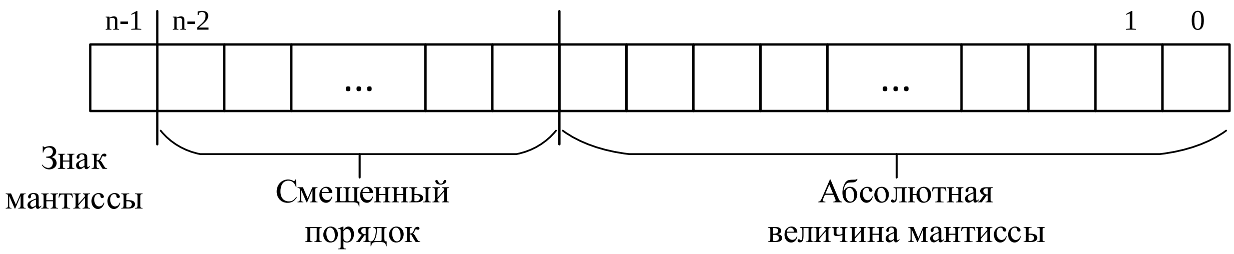


Рис. 9. Формат представления вещественного числа

Смещенный порядок получают следующим образом: если для задания порядка выделено k разрядов, то к исходному значению порядка p прибавляют смещение, равное 2^{k-1}. Например, однобайтный порядок, принимающий значения в диапазоне от –128 до +127, после прибавления смещения будет представляться значениями от 0 до 255.

Для хранения вещественного числа выделяется 4 байта (формат одинарной точности), 8 байт (формат двойной точности) или 10 байт (расширенный формат). В формате одинарной точности под смещенный порядок отводится 8 бит, а под мантиссу 23 бита; в формате двойной точности под смещенный порядок – 11 бит, под мантиссу – 52 бита; в расширенном формате – 15 бит и 64 бита соответственно.

Кодирование логических данных

Логические данные принимают два значения: «Истина» («True», 1) или «Ложь» («False», 0). В компьютере для логического значения отводится минимальная область памяти: 1 или 2 байта. Внутри этой области значения «Истина» и «Ложь» представляются одним из двух способов:

- какой-то определенный бит (например, знаковый) используется для представления логического значения («Ложь» = 0, «Истина» = 1), а остальные биты игнорируются;
- нули во всех битах отводимой области памяти соответствуют значению «Ложь», любое другое содержимое этой области памяти (все единицы, комбинации единиц и нулей) интерпретируются как значение «Истина».

Кодирование текстовых (символьных) данных

Правило кодирования символьных данных (букв алфавита и других символов) заключается в том, что каждому символу ставится в соответствие двоичный код.

Технически это выглядит просто, но существуют организационные сложности. В первые годы развития вычислительной техники эти сложности были связаны с отсутствием необходимых стандартов, а настоящее время вызваны, наоборот, изобилием одновременно действующих и противоречивых стандартов. Для того чтобы весь мир одинаково кодировал текстовые данные, нужны единые таблицы кодирования.

Наиболее распространенный стандарт кодировки символов ASCII-код (American Standard Code for Information Interchange – американский стандартный код для обмена информацией) был введен институтом стандартизации США в 1963 г. и после модификации в 1977 г. был принят в качестве всемирного стандарта. Каждому символу в этой таблице поставлено в соответствие двоичное число от 0 до 255 (8-битовый двоичный код), например, A – 01000001, B – 01000010, C – 01000011, B – 01000100 и т. д.

В системе ASCII закреплены две таблицы кодирования – базовая и расширенная. Базовая таблица закрепляет значения кодов от 0 до 127 (рис. 10), а расширенная относится к символам с номерами от 128 до 255.

sp 32	! 33	« 34	# 35	$ 36	% 37	& 38	‘ 39	(40	) 41	* 42	+ 43	, 44	- 45	. 46	/ 47
0 48	1 49	2 50	3 51	4 52	5 53	6 54	7 55	8 56	9 57	: 58	; 59	< 60	= 61	> 62	? 63
@ 64	A 65	B 66	C 67	D 68	E 69	F 70	G 71	H 72	I 73	J 74	K 75	L 76	M 77	N 78	O 79
P 80	Q 81	R 82	S 83	T 84	U 85	V 86	W 87	X 88	Y 89	Z 90	[91	\ 92	] 93	^ 94	_ 95
` 96	a 97	b 98	c 99	d 100	e 101	f 102	g 103	h 104	i 105	j 106	k 107	l 108	m 109	n 110	o 111
p 112	q 113	r 114	s 115	t 116	u 117	v 118	w 119	x 120	y 121	z 122	{ 123	| 124	} 125	~ 126	del 127

Рис. 10. Базовая таблица ASCII

Первые 32 кода отданы производителям аппаратных средств. В этой области размещаются так называемые управляющие коды, которым не соответствуют никакие символы языков, и, соответственно, эти коды не выводятся ни на экран, ни на устройства печати, но ими можно управлять, например, тем, как производится вывод прочих данных.

Начиная с 32 кода по 127 размещены коды символов английского алфавита, знаков препинания, цифр, знаков арифметических действий, некоторые вспомогательные символы (код 32 – пробел, код 127 – delete).

Национальные системы кодирования занимают расширенную часть, определяющую значения кодов с 128 до 255.

В России наиболее широкое применение нашли кодировки Windows 1251 (была введена компанией Microsoft), КОИ-8 (код обмена информации, восьмизначный), ISO (International Standard Organization – Международный институт стандартизации) – международная кодировка, в которой предусмотрена кодирование символов русского алфавита. Расширенная кодировка символов КОИ-8 приведена на рис. 11.

─	│	┌	┐	└	┘	├	┤	┬	┴	┼	▀	▄	█	▌	▐
128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
░	▒	▓		■	●	√	≈	≤	≥	nbsp		°	²	·	÷
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
═	║	╒	е	╓	╔	╕	╖	╗	╘	╙	╚	╛	╜	╝	╞
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
╟	╠	╡	Ё	╢	╣	╤	╥	╦	╧	╨	╩	╪	╫	╬	©
176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
ю	а	б	ц	д	е	ф	г	х	и	й	к	л	м	н	о
192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
п	я	р	с	т	у	ж	в	ь	ы	з	ш	э	щ	ч	ъ
208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
Ю	А	Б	Ц	Д	Е	Ф	Г	Х	И	Й	К	Л	М	Н	О
224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
П	Я	Р	С	Т	У	Ж	В	Ь	Ы	З	Ш	Э	Щ	Ч	Ъ
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

Рис. 11. Расширенная таблица кодировки КОИ-8

Организационные трудности, связанные с созданием единой системы кодирования текстовых данных, вызваны ограниченным набором кодов (256). Если, например, кодировать символы не восьмиразрядными двоичными числами, а числами с большим количеством разрядов, то и диапазон возможных значений кодов станет намного больше. Такая система, основанная на 16-разрядном кодировании символов, получила название универсальной UNICODE . Шестнадцать разрядов позволяют обеспечить уникальные коды для 65536 (2^{16}) различных символов – этого поля достаточно для размещения в одной таблице символов большинства языков планеты.

Несмотря на тривиальную очевидность такого подхода, простой механический переход на данную систему долгое время сдерживался из-за недостаточных ресурсов средств вычислительной техники (в системе кодирования UNICODE все тестовые документы автоматически становятся вдвое длиннее). Во второй половине 90-х г. Прошлого столетия технические средства достигли необходимого уровня обеспеченности ресурсами, и сегодня,в основном, осуществлен переход документов и программных средств на универсальную систему кодирования.

Кодирование графических данных

Графические данные хранится и обрабатывается в двоичном коде.

Существуют два принципиально разных подхода к кодированию (представлению) графических данных: растровый и векторный.

При растровом представлении вся область данных разбивается на множество точечных элементов – пикселей, каждый из которых имеет свой цвет. Число пикселей по горизонтали и вертикали определяет *разрешение* изображения.

При растровом способе представления графических данных под каждый пиксель отводится определенное число битов, называемого *битовой глубиной* или *информационной емкостью одного пикселя*, и используемое для кодирования цвета пикселя. Каждому цвету соответствует двоичный код. Например, если битовая глубина равна 1, то под каждый пиксель отводится 1 бит. В этом случае 0 соответствует черному цвету, 1 – белому, а изображение может быть только черно-белым. Если битовая глубина равна 2, то каждый пиксель может быть закодирован цветовой гаммой из 4 цветов (2^2) и т. д. Для качественного представления графических данных в современных компьютерах используются цветовые схемы с битовой глубиной 8, 24, 32, 40, т.е.

каждый пиксель может иметь 2^8, 2^{24}, 2^{32}, 2^{40} оттенков. Количество цветов N, отображаемых на экране монитора, может быть вычислено по формуле:

$$N = 2^i, \tag{10}$$

где i – битовая глубина.

Если известны размеры (в пикселях) рисунка по высоте X и ширине Y, а также битовая глубина i, то занимаемый объем V будет равен:

$$V = X \cdot Y \cdot i. \tag{11}$$

Основным недостатком растровой графики является большой объем памяти, необходимый для хранения изображения. Это объясняется тем, что запоминается цвет каждого пикселя, общее число которых задается разрешением.

При векторном представлении графических данных задается и впоследствии сохраняется математическое описание графического примитива – геометрического объекта (отрезка, окружности, прямоугольника и т.п.), из которых формируется изображение. Например, для воспроизведения окружности достаточно запомнить положение ее центра, радиус, толщину и цвет линии. Благодаря этому для хранения векторных графических данных требуется значительно меньше памяти.

Программы для работы с графическими данными делятся на растровые графические редакторы (Paint, Photoshop) и векторные графические редакторы (CorelDraw, Adobe Illustrator, Visio).

Приведем краткие характеристики наиболее популярных графических форматов.

BMP (Bitmap picture) – растровый формат, разработанный компанией Microsoft. Поддерживается большинством графических редакторов (в частности, Paint и Photoshop). Применяется для хранения отсканированных изображений и обмена данными между различными приложениями.

TIFF (Tagged Image File Format) – растровый формат. Поддерживается различными операционными системами. Включает алгоритм сжатия без потери качества изображения. Используется в сканерах, а также для хранения и обмена данными.

GIF (Graphics Interchange Format) – растровый формат. Включает в себя алгоритм сжатия, значительно уменьшающий объем файла без потери информации. Поддерживается приложениями для различных операционных систем. Применяется в изображениях, содержащих до 256 цветов, а также для создания анимации. Используется для размещения графики в интернете.

JPEG (JointPhotographicExpertGroup) – растровый формат, содержащий алгоритм сжатия, который уменьшает объем файла в десятки раз, но приводит к необратимой потере части информации. Поддерживается большинством операционных систем. Используется для размещения графических изображений на Web-страницах в Интернете.

PNG (PortableNetworkGraphic) – растровый формат, аналогичный GIF. Используется для размещения графики в Интернете.

WMF (WindowsMetaFile) – векторный формат для Windows-приложений.

EPS (EncapsulatedPostScript) – векторный формат, поддерживаемый большинством операционных систем.

CDR – векторный формат, поддерживаемый графической системой CorelDraw.

Для представления цвета используются цветовые модели.

Цветовая модель – это правило, по которому может быть вычислен цвет. Самая простая цветовая модель – битовая. В ней для описания цвета каждого пикселя (черного или белого) используется всего один бит. Для представления полноцветных изображений используются более сложные модели, среди которых самые известные – модели RGB и CMYK.

Цветовая модель RGB используется в таких устройствах, как телевизионные кинескопы, компьютерные мониторы.

Цветовая модель RGB (Red-Green-Blue, красный-зеленый-синий) основана на том, что любой цвет может быть представлен как сумма трех основных цветов: красного, зеленого и синего.

В основе цветовой модели лежит декартова система координат. Цветовое пространство представляет собой куб сочетаний трех базовых цветов (рис. 12).

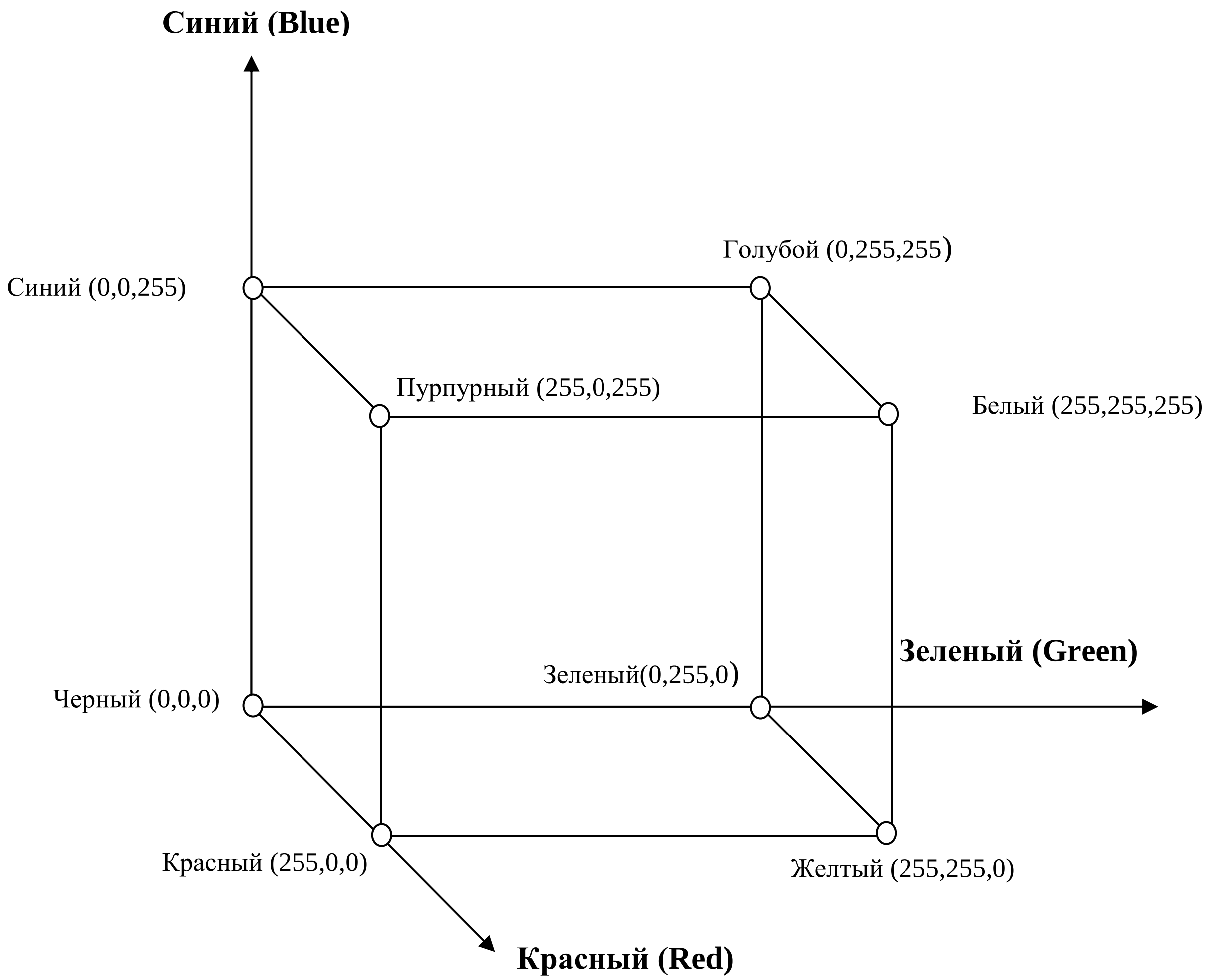


Рис. 12. Цветовая модель RGB

Любой оттенок цвета при этом выражается набором из трех чисел. На каждое число отводится один байт, поэтому интенсивность одного цвета имеет 256 значений (0-255), общее количество оттенков цвета – 16777216 (2^{24}). Белый цвет в RGB представляется как (255,255,255), черный – (0,0,0,0), красный – (255,0,0), зеленый – (0,255,0), синий – (0,0,255).

Цветовая модель CMYK используется в полиграфии.

Цветовая модель CMY является производной модели RGB и также построена на базе трех цветов: C – Cyan (голубого), M – Magenta (пурпурного), Y – Yellow (желтого), которые образуются следующим образом.

Голубой цвет C (0, 255, 255) является комбинацией синего и зеленого, желтый цвет Y (255, 255, 0) – зеленого и красного, а пурпурный цвет M (255, 0, 255) – красного и синего, иначе каждому из основных цветов ставится в соответствие дополнительный цвет (дополняющий основной до белого).

Дополнительными цветами для красного является голубой, для зеленого – пурпурный, для синего – желтый.

Смешение голубого, пурпурного и желтого цветов должно давать черный цвет, который, однако, выглядит осветленным по сравнению с оригиналом. Поэтому для получения чистого черного цвета при печати цветовая модель CMY расширяется до модели CMYK, содержащей четвертый основной цвет – черный (K – black).

Кодирование звуковой информации

Звук представляет собой звуковую волну с непрерывно меняющейся амплитудой и частотой. В процессе кодирования непрерывного сигнала производится его временная дискретизация и квантование.

Дискретизация заключается в замерах величины аналогового сигнала огромное множество раз в секунду (рис. 13). Полученной величине аналогового сигнала сопоставляется определенное значение из заранее выделенного диапазона: 256 (8 бит) или 65536 (16 бит). Привидение в соответствие уровня сигнала определенной величине диапазона называется квантованием.

Как бы часто не проводились измерения, все равно часть информации будет теряться. Но чем чаще проводятся замеры, тем точнее будет соответствовать цифровой звук своему аналоговому оригиналу. Также, чем больше бит отведено под кодирование уровня сигнала (квантование), тем точнее соответствие.

С другой стороны, звук хорошего качества будет содержать больше данных и, следовательно, больше занимать места на цифровом носителе информации.

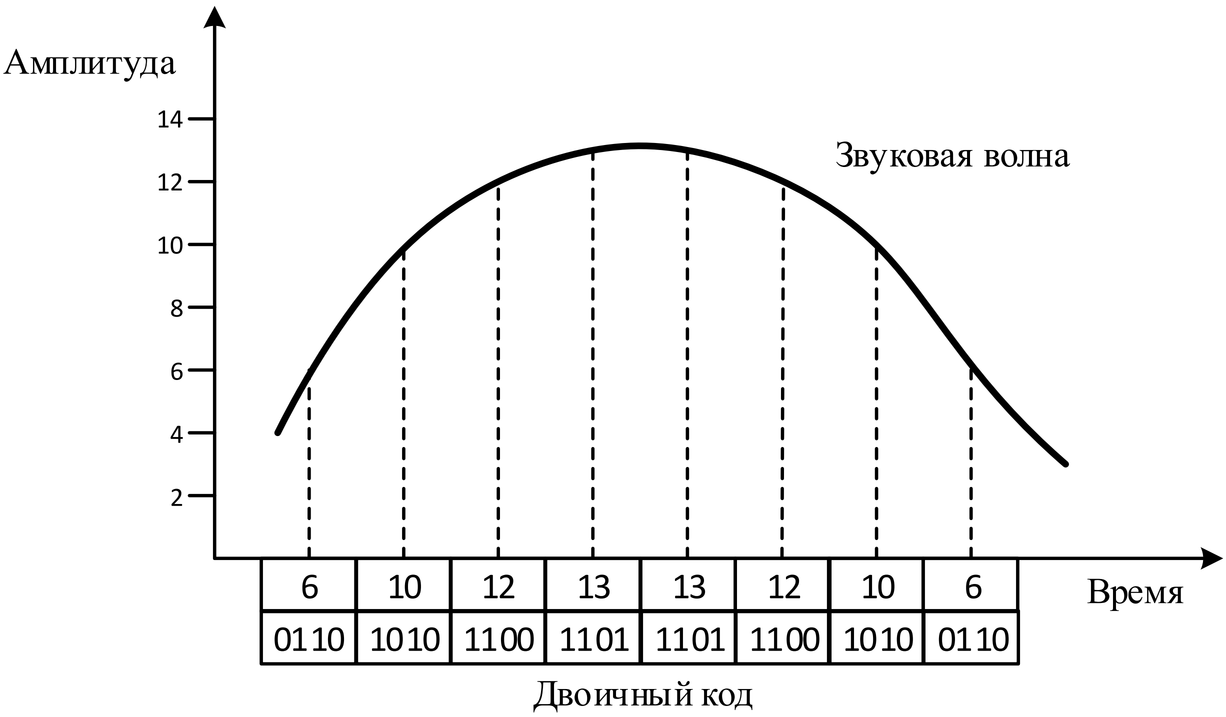


Рис. 13. Дискретизация звуковой волны

Определить информационный объем V цифрового аудио файла, длительность звучания которого составляет t секунда при частоте дискретизации H и разрешении i битов (квантуют i битами) можно по формуле:

$$V = H \cdot i \cdot t \tag{12}$$

Если требуется определить информационный объем стерео аудио файл, то полученные вычисления умножаются на 2:

$$V = H \cdot i \cdot t \cdot 2 \tag{13}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Имеется колода карт, содержащая 32 различные карты. Вычислить количество информации I, получаемое в результате выбора карты из колоды (например, выбора карты *дама пик*).

Решение. Выбор любой карты из колоды события равновероятные. Количество информации, получаемое в результате выбора карты из колоды, равно (формула Хартли (1), N = 32):

$I = \log_2 N = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$ (бит)

Количество информации, получаемое в результате выбора карты из колоды характеризуется минимальным числом двоичных вопросов, ответы на которые имеют значения да (1) или нет (0). Так для выбора карты *дама пик* такими вопросами могут быть:

Номер вопроса	Вопрос	Ответ
1	Карта красной масти?	Нет (0)
2	Трефы?	Нет (0)
3	Одна из 4-х старших?	Да (1)
4	Одна из 2-х старших?	Нет (0)
5	Дама пик?	Да (1)

Таким образом, выбор карты *дама пик* можно описать последовательностью из пяти двоичных символов. После пяти вопросов неопределенность устранена. Количество информации, получаемое в результате выбора карты *дама пик* из колоды равно 5 бит.

Ответ: I = 5 бит.

Задача 2. Два игрока играют в «крестики нолики» на поле размером 4х4. Определить, какое количество информации I получит второй игрок после первого хода первого игрока.

Решение. Первый игрок может для первого хода выбрать любое поле из 16 возможных ($N = 4 \cdot 4 = 16$). Тогда по формуле Хартли (1):

$I = \log_2 N = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ (бита).

Количество информации I можно также найти из соотношения, которое связывает количество возможных событий N и количество информации I $N = 2^I$:

$16 = 2^I \qquad 2^4 = 2^I \qquad I = 4$ (бита)

Ответ: I = 4 бита.

Задача 3. В группе 24 студента. За экзамен были получены следующие оценки: 3 пятерки, 12 четверок, 6 троек, 3 двойки.

1) Определить, какое количество информации I содержит сообщение, что студент Романов получил оценку «четыре».

2) Определить, какое количество информации I содержит сообщение об оценке любого студента группы.

Решение. 1) Вероятность события, что случайным образом выбранный студент получил оценку «четыре» равна $p = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. Используя формулу Шеннона (2) $I = -\log_2 p$, получим:

$I = -\log_2 p = -\log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2^{-1} = \log_2 2 = 1$(бит)

2) Для решения задачи воспользуемся формулой Шеннона (3)

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Вероятности событий, что случайным образом выбранный студентполучил оценку «пять», «четыре», «три», «два» соответственно равны:

$$p_1 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}, \qquad p_2 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}, \qquad p_3 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \qquad p_4 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

$I = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 + p_4 \log_4 p_4) =$

$$= -\left(\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = 1{,}75 \text{ (бит)}$$

Ответ: 1) I=1 бит. 2) I = 1,75 бит.

Задача 4. В коробке лежат красные и синие карандаши, всего в коробке 24 карандаша. Информация о том, что из коробки случайным образом достали синий карандаш, равна 2 битам. Определить, сколько в коробке красных и синих карандашей.

Решение. Обозначим за x число синих карандашей в коробке. Для решения задачи воспользуемся формулой Шеннона (2): $2 = -\log_2 p$.

Из этого соотношения найдем вероятность того, что случайным образом вынутый шар является синим: $p = \frac{1}{4}$. Теперь определим x из соотношения:

$\frac{x}{24} = \frac{1}{4}$ x = 6.

Ответ: В коробке 6 синих и 18 красных карандашей.

Задача 5. Растровое графическое изображение 20×20 точек содержит не более 256 цветов. Сколько памяти потребуется для хранения изображения?

Решение. Для решения воспользуемся формулой (10) для вычисления количества цветов N, отображаемых на экране монитора при известной битовой глубине i: $N = 2^i$.

Одна точка может иметь один из 256 цветов (N = 256). Найдем сколько бит i, требуется для ее хранения (битовая глубина) из соотношения:

$256 = 2^i$ i = 8 (бит).

Для хранения изображения 20×20 точек требуется 20·20·8 = 3200 бит или 400 байт (3200/8 = 400).

Ответ: Для хранения изображения потребуется 400 байт.

Задача 6. Сообщение из 30 символов было записано в 8-битной кодировке Windows-1251. После вставки в текстовый редактор сообщение было перекодировано в 16-битный код Unicode. На сколько байт увеличилось при этом количество памяти?

Решение. При перекодировке из Windows-1251 в Unicode объем памяти увеличивается в два раза, т.е. если в кодировке Windows-1251 сообщение занимало 30·8 = 240 бит, то в кодировке Unicode сообщение займет 30·16 = 480 бит, т.е. количество памяти увеличилось на 480 – 240 = 240 бит или 240/8 = 30 байт.

Ответ: сообщение увеличилось на 30 байт.

Задача 7. Отправлено SMS-сообщение:

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало,
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

В мобильном телефоне адресата установлено ограничение размера входящего SMS-сообщения 64 байтами (при превышении этого размера сообщение автоматически делится на части). Каждый символ кодируется 16 битами. На сколько частей будет разбито сообщение?

Решение. Всего символов в сообщении 166. Т. к. каждый символ кодируется 16 битами (2 байтами), то сообщение занимает 166·2 = 332 байта. Теперь вычислим, на сколько частей будет разбито сообщение: 336/64 = 5,1875.

Ответ. Сообщение будет разбито на 6 частей.

Задача 8. Определить количество информации, связанное с появлением каждого символа в сообщениях, записанных на русском языке.

Решение. Русский алфавит состоит из 33 букв и знака «пробел» для разделения слов. Если принять, что любой символ в сообщении появляется с одинаковой вероятностью, то по формуле Хартли (1) при $\mathrm{N} = 34$ получим количество информации, связанное с появлением каждого символа в сообщениях, записанных на русском языке:

$\mathrm{I} = \log_2 34 \approx 5{,}09$ (бит).

Однако, в словах русского языка (также как и в словах других языков) различные буквы встречаются неодинаково часто. Ниже приведена табл. 5 вероятностей частоты употребления различных знаков русского алфавита, полученная на основе анализа очень больших по объему текстов.

Воспользуемся для подсчета I формулой Шеннона (3):

$$\mathrm{I} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

$I \approx 4{,}72$ (бит).

Полученное значение I, как и можно было предположить, меньше вычисленного ранее. Величина I, вычисляемая по формуле Хартли, является максимальным количеством информации, которое могло бы приходиться на один знак.

Таблица 5

i	Символ	p_i	i	Символ	p_i	i	Символ	p_i
1	Пробел	0,175	13	К	0,028	24	Г	0.012
2	0	0,090	14	М	0,026	25	Ч	0,012
3	Е	0,072	15	Д	0,025	26	И	0,010
4	Ё	0,072	16	П	0,023	27	Х	0,009
5	А	0,062	17	У	0,021	28	Ж	0,007
6	И	0,062	18	Я	0,018	29	Ю	0,006
7	Т	0,053	19	Ы	0,016	30	Ш	0.006
8	Н	0,053	20	З	0.016	31	Ц	0,004
9	С	0,045	21	Ь	0,014	32	Щ	0,003
10	Р	0,040	22	Ъ	0,014	33	Э	0,003
11	В	0,038	23	Б	0,014	34	Ф	0,002
12	Л	0,035						

Ответ. $I \approx 5{,}09$ бит при условии, что все буквы русского алфавита встречаются в словах с одинаковой вероятностью.

$I \approx 4{,}72$ бит при условии, что все буквы русского алфавита встречаются в словах с разной вероятностью (табл. 5).

Задача 9. Сообщение содержит 4096 символов. Объем сообщения при использовании равномерного кода составил 1/512 Мбайт. Какова мощность алфавита, с помощью которого записано сообщение?

Решение. Определим, какой объем памяти (в битах) занимает один символ. Для этого переведем 1/512 Мбайт в биты и полученный результат разделим на число символов, содержащееся в сообщении:

$$\frac{1024 \cdot 1024 \cdot 8}{512 \cdot 4096} = \frac{2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{3}}{2^{9} \cdot 2^{12}} = \frac{2^{23}}{2^{21}} = 4 \text{ бита.}$$

Для определения мощности алфавита используем формулу $N = 2^i$ (10).

$N = 2^4 = 16$ (символов).

Ответ. Мощность алфавита 16 символов.

Задача 10. Скорость передачи данных через ADSL соединение равна 256000 бит/с. Передача файла заняла 4 мин. Определить размер файла в Кб.

Решение. Определим размер файла как произведение скорости передачи на время:

256000·4·60 (бит) = 256000·4·60/8/1024 (Кбайт) = 7500 (Кбайт)

Ответ. Размер файла составляет 7500 Кбайт.

Задача 11. Определить информационный объем цифрового стерео аудио файла, длительность звучания которого составляет 10 секунда при частоте дискретизации 22,05 кГц и разрешении 8 битов (квантуется 8 битами).

Решение. Для определения информационного объема цифрового стерео аудио файла воспользуемся формулой (13) $V = H \cdot i \cdot t \cdot 2$:

V = 22050·8·10·2 = 3528000(бит) = 3528000/8/1024/1024 (Мбайт) = = 0,42 (Мбайт).

Ответ. Информационный объем цифрового стерео аудио файласоставляет 0,42 Мбайт.

Задача 12. Световое табло состоит из лампочек. Каждая лампочка может находиться в одном из трех состояний («включено», «выключено», «мигает»). Какое наименьшее количество лампочек должно быть на табло, чтобы с его помощью можно было передать 18 различных сигналов.

Решение. Воспользуемся формулой (8) определения максимального количество слов L из m букв, которое можно составить из алфавита мощностью N: $L = N^m$. Мощность алфавита N = 3. Требуется найти m (наименьшее количество лампочек). Т.к. В формуле (8) определяется максимальное количество слов, а необходимо передать только 18 сигналов (слов), то m будем находить из соотношения $18 \le 3^m$. Следовательно, m = 3, 4, 5, … Поскольку нужно найти наименьшее количество лампочек, то m= 3.

Ответ: На табло должно быть 3 лампочки.

Задача 13. В велокроссе участвуют 810 спортсменов. Устройство регистрирует прохождение промежуточного финиша каждым из участников, записывая его номер с использованием минимально возможного количества бит, одинакового для всех номеров. Каков информационный объем сообщения, записанного устройством после того, как промежуточный финиш прошли 200 велосипедистов.

Решение. Для регистрации одного любого номера необходимо 10 бит, поскольку с помощью 10 бит можно закодировать 2^{10}=1024 различных номеров (9 бит будет недостаточно). Для регистрации 200 номеров потребуется $200 \cdot 10 = 2000$ (бит) = 2000/8 (байт) = 250 (байт)

Ответ: Информационный объем сообщения равен 250 байт.

Задача 14. Упорядочить по убыванию числа: 43_5, 43_{16}, 43_8.

Решение. Переведем все числа в одну систему счисления, например, в десятичную: $43_5 = 23$, $43_{16} = 67$, $43_8 = 35$. Теперь упорядочим их по убыванию: 67 (43_{16}), 35 (43_8), 23 (43_5).

Ответ: 43_{16}, 43_8, 43_5.

Задача 15. В какой системе счисления выполнены действия: $123 + 4 = 132$?

Решение. Обозначим за x основание системы счисления, в которой выполнены указанные действия. Складывая последние разряды чисел, имеем:

$3_x + 4_x = 12_x$. Используя представление чисел в развернутой форме, получим:

$3 + 4 = x + 2$. Решив данное уравнение, получим $x = 5$.

Ответ: действия выполнены в пятеричной системе счисления.

Задача 16. Число 35_x из системы счисления с основанием x перевели в десятичную систему счисления и получили 29_{10}. Найти основание системы счисления x.

Решение. Используя представление чисел в развернутой форме, запишем: $3 \cdot x + 5 = 29$. Решив данное уравнение, получим $x = 8$.

Ответ: Основание системы $x = 8$.

Задача 17. Задано число в шестнадцатеричной системе счисления F023A9,12C4. Как изменится число, если в его представлении запятую перенести на два знака влево? На три знака вправо?

Решение. Если задано число в системе счисления с основанием x, то перенос запятой в представлении числа на n знаков влево уменьшает его в x^n раз, а перенос запятой в представлении числа на n знаков вправо увеличивает его в x^n раз.

Ответ: Число F023A9,12C4 уменьшится в 16^2 (256) раз, если запятую перенести на два знака влево. Число F023A9,12C4 увеличится в 16^3 (4096) раз, если запятую перенести на три знака вправо.

Задача 18. Найти обратный код в однобайтном формате числа $x = –35_{10}$

Решение. Представим модуль числа x в двоичной системе и дополним нулями слева до 8 знаков: 00100011. Инвертируем значения всех знаков: 11011100.

Ответ: Обратный код в однобайтном формате числа x равен 11011100.

Задача 19. Найти дополнительный код в двухбайтном формате числа $x = –562_{10}$

Решение. Представим модуль числа x в двоичной системе и дополним нулями слева до 16 знаков: 0000001000110010. Инвертируем значения всех знаков: 1111110111001101, прибавим к полученному обратному коду 1, получим: 1111110111001110.

Ответ: Дополнительный код в однобайтном формате числа x равен 1111110111001110.

Задача 20. Дополнительный код числа x имеет значение 11100111_2. Найти его значение в десятичной системе счисления.

Решение. Т.к. в первой позиции числа стоит 1, то искомое число будет отрицательным. Вычтем из заданного значения 1 (11100111 – 1 = 11100110). Инвертируем значения всех знаков: 00011001. Переведем полученное число в десятичную систему $00011001_2 = 25_{10}$ и не забудем, что число является отрицательным.

Ответ: X = –25.

Задача 21. Найти значение логического выражения

$A \vee B \,\&\, \overline{C}$ при $A = 0(\text{False}),\ B = 1\ (\text{True}),\ C = 0(\text{False})$.

Решение: подставим значения переменных в выражение и вычислим его согласно приоритету выполнения операций:

$A \vee B \,\&\, \overline{C}\ = 0 \vee 1 \,\&\, \overline{0} = 0 \vee 1 \,\&\, 1 = 0 \vee 1 = 1\ (\text{True})$.

Ответ: заданное логическое выражение принимает значение True.

Задача 22. Найти значение логического выражения

$(a\ <\ z) \vee\ (z\ >\ 2) \vee\ (a \neq 5)$ при $a\ =\ 5,\ z\ = -\ 4$.

Решение: подставим значения переменных в выражение и вычислим его согласно приоритету выполнения операций:

$(5\ < -\ 4)\ \vee\ (-\ 4\ >\ 2)\ \vee\ (5 \neq 5)\ =\ 0\ \vee\ 0\ \vee\ 0\ =\ 0$.

Ответ: заданное логическое выражение принимает значение False.

Задача 23. Упростить логическое выражение: $(A \,\&\, B)\ \vee\ (A \,\&\, \overline{B})$. Правильность упрощения проверить с помощью таблиц истинности.

Решение: воспользуемся законом дистрибутивности и вынесем за скобки А:

$(A \,\&\, B)\ \vee\ (A \,\&\, \overline{B})\ =\ A \,\&\, (B\ \vee\ \overline{B})$.

По закону исключенного третьего $B\ \vee\ \overline{B}\ = 1$, следовательно, $A \,\&\, (B\ \vee\ \overline{B}) = A \,\&\, 1\ =\ A$.

Таким образом, в результате упрощения получили $(A \,\&\, B) \vee\ (A \,\&\, \bar{B}) = A$.

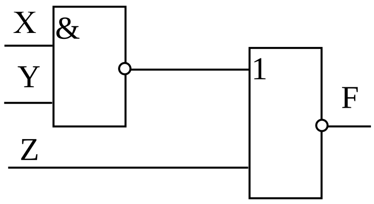
Составим таблицу истинности для выражения $(A \,\&\, B) \vee\ (A \,\&\, \overline{B})$:

A	B	$\overline{B}$	A & B	$A \,\&\, \bar{B}$	$(A \,\&\, B) \vee\ (A \,\&\, \bar{B})$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Из таблицы истинности видно, что справедливо $(A \,\&\, B) \vee\ (A \,\&\, \bar{B}) = A$.

Ответ: $(A \,\&\, B) \vee\ (A \,\&\, \bar{B}) = A$.

Задача 24. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Решение: используя обозначения логических элементов (табл. 4), составим логическое выражение:

$F = \overline{\overline{X \& Y} \lor Z}$.

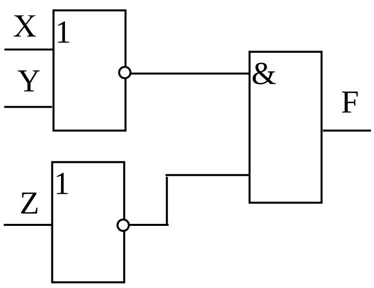
Заполним для F таблицу истинности:

X	Y	Z	X & Y	$\overline{X \& Y}$	$\overline{X \& Y} \lor Z$	$\overline{\overline{X \& Y} \lor Z}$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Ответ: $F = \overline{\overline{X \& Y} \lor Z}$. Таблица истинности представлена выше.

Задача 25. Задано логическое выражение $F = \overline{X \lor Y} \& \overline{Z}$. Составить логическую схему для данного выражения и заполнить таблицу истинности.

Решение: используя обозначения логических элементов (табл. 4), составим логическую схему:



Заполним для F таблицу истинности:

X	Y	Z	$X \vee Y$	$\overline{X \vee Y}$	$\bar{Z}$	$\overline{X \vee Y}\&\bar{Z}$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Ответ: Логическая схема и таблица истинности представлены выше.

Задачи для самостоятельного решения[1]

Измерение информации

Вариант 0

1. В корзине лежат 16 шаров. Все шары разного цвета. Сколько информации несет сообщение о том, что из корзины выкатился красный шар?

2. Световое табло состоит из лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях («включено» или «выключено»). Какое наименьшее количество лампочек должно находиться на табло, чтобы с его помощью можно было передать 50 различных сигналов?

3. В коробке находятся кубики трех цветов: красного, желтого и зеленого. Причем желтых в два раза больше красных, а зеленых на 6 больше, чем желтых. Сообщение о том, что из коробки случайно вытащили желтый кубик, содержало 2 бита информации. Сколько было зеленых кубиков?

Вариант 1

1. Сколько бит информации несет сообщение о том, что из колоды в 32 карты достали даму?

2. Метеорологическая станция ведет наблюдение за влажностью воздуха. Результатом одного измерения является целое число от 0 до 100 процентов, которое записывается при помощи минимально возможного количества бит. Станция сделала 80 измерений. Определите информационный объем результатов наблюдений.

3. В коробке 5 синих и 15 красных шариков. Какое количество информации несет сообщение, что из коробки достали синий шарик?

Вариант 2

1. Какое сообщение содержит большее количество информации?

а) Монета упала «решкой» вверх.

б) В библиотеке книга нашлась в 5-м шкафу из восьми.

---

[1] Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки.

в) Роман получил за экзамен 3 балла (единицы не ставятся) по 5-балльной системе.

г) Из колоды карт (32 шт.) выпала семерка пик

2. Для передачи секретного сообщения используется код, состоящий из десятичных цифр. При этом все цифры кодируются одним и тем же (минимально возможным) количеством бит. Определите информационный объем сообщения длиной в 150 символов.

3. В корзине лежат шары. Все разного цвета. Сообщение о том, что достали синий шар, несет 5 битов информации. Сколько всего шаров в корзине?

Вариант 3

1. В соревновании участвуют 4 команды. Сколько информации в сообщении, что выиграла 3-я команда?

2. Два текста содержат одинаковое количество символов. Первый текст составлен в алфавите мощностью 16 символов. Второй текст в алфавите мощностью 256 символов. Во сколько раз количество информации во втором тексте больше, чем в первом?

3. Студенты группы изучают один из трех языков: английский, немецкий или французский. Причем 12 студентов не учат английский. Сообщение, что случайно выбранный студент Петров изучает английский, несет log23 бит информации, а что Иванов изучает французский – 1 бит. Сколько студентов изучают немецкий язык?

Вариант 4

1. Сколько информации несет сообщение о том, что было угадано число в диапазоне целых чисел от 684 до 811?

2. Два шифровальщика обменялись сообщениями по 200 закодированных символов. Кодовая таблица первого содержит N символов, второго – в 4 раза больше. На сколько больше бит информации передал второй шифровальщик?

3. В составе 16 вагонов, среди которых К – купейные, П – плацкартные и СВ – спальные. Сообщение о том, что ваш друг приезжает в СВ, несет 3 бита информации. Определите, сколько в поезде вагонов СВ.

Вариант 5

1. При угадывании целого числа в некотором диапазоне было получено 8 бит информации. Сколько чисел содержал этот диапазон?

2. В некоторой кодировке слово из 15 букв занимает информационный объем на 39 байт больше, чем слово из двух букв. Каким количеством бит кодируется одна буква, если учесть, что под все символы этой кодировки выделяется равный объем памяти?

3. Студенческая группа, состоящая из 21 человека, изучают немецкий или французский языки. Сообщение о том, что студент А изучает немецкий язык, несет $\log_2 3$ бит информации. Сколько человек изучают французский язык?

Вариант 6

1. Сообщение о том, что ваш друг живет на 10 этаже, несет 4 бита информации. Сколько этажей в доме?

2. Одна ячейка памяти «троичной ЭВМ» может принимать одно из трех возможных состояний. Для хранения некоторой величины отвели 5 ячеек памяти. Сколько значений может принимать эта величина?

3. В студенческой группе 8 девушек и 24 юноши. Сколько бит информации несет сообщение о том, что старостой выбрали девушку?

Вариант 7

1. На железнодорожном вокзале 8 путей отправления поездов. Вам сообщили, что ваш поезд прибывает на четвертый путь. Сколько информации вы получили?

2. Какое наименьшее количество символов должно быть в алфавите, чтобы при помощи всевозможных слов из четырех символов данного алфавита, можно было передать не менее 100 различных сообщений?

3. В коробке лежат 64 цветных карандаша. Сообщение о том, что достали красный карандаш, несет 3 бита информации. Сколько красных карандашей было в коробке?

Вариант 8

1. Какое количество информации содержит сообщение, уменьшающее неопределенность знаний в 8 раз?

2. Азбука Морзе позволяет кодировать символы для радиосвязи, задавая комбинацию из точек и тире. Сколько различных символов (цифр, букв, знаков пунктуации и т.д.) можно закодировать, используя код Морзе длиной не менее пяти и не более шести сигналов (точек и тире)?

3. В корзине лежат черные и белые шары. Среди них 21 черный шар. Сообщение о том, что достали белый шар, несет 3 бита информации. Сколько всего шаров в корзине?

Вариант 9

1. Книга состоит из 64 страниц. На каждой странице 256 символов. Какой объем информации содержится в книге, если используемый алфавит состоит из 32 символов?

2. Для передачи сигналов на флоте используется «флажковая азбука». Какое количество различных сигналов можно передать при помощи двух сигнальных флажков, если всего имеются флаги шести различных видов?

3. В ящике лежат перчатки (белые и черные). Среди них – 2 пары черных. Сообщение о том, что достали пару черных перчаток, несет 4 бита информации. Сколько всего перчаток было в ящике

Системы счисления

Вариант 0

1. Переведите числа 860 и 78,15 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $10110{,}11_2$; 1740_8 и $A2C{,}8_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $11001{,}11_2$ и $1010{,}011_2$ в двоичной системе счисления.

Вариант 1

1. Переведите числа 250 и 57,17 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $1011{,}101_2$; 2671_8 и $48E{,}4_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $505C{,}12_{16}$ и $5A6{,}F6_{16}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Вариант 2

1. Переведите числа 759 и 82,21 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $11100{,}011_2$; 1216_8 и $14F{,}A_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $706{,}15_8$ и $632{,}01_8$ в восьмеричной системе счисления.

Вариант 3

1. Переведите числа 216 и 33,38 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $10101{,}01_2$; 2534_8 и $3FD{,}9_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $10111{,}11_2$ и $101{,}011_2$ в двоичной системе счисления.

Вариант 4

1. Переведите числа 530 и 25,27 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $11110{,}111_2$; 1627_8 и $553{,}E_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $514{,}03_8$ и $126{,}4_8$ в восьмеричной системе счисления.

Вариант 5

1. Переведите числа 945 и 85,14 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $10001{,}01_2$; 5142_8 и $19F{,}C_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $F0A{,}E2_{16}$ и $A96{,}7_{16}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Вариант 6

1. Переведите числа 287 и 20,18 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $11000{,}11_2$; 1416_8 и $16D{,}8_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $10101{,}11_2$ и $10010{,}01_2$ в двоичной системе счисления.

Вариант 7

1. Переведите числа 485 и 90,42 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $11010{,}011_2$; 2037_8 и $196{,}B_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $278{,}D3_{16}$ и $FE{,}99_{16}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Вариант 8

1. Переведите числа 639 и 48,28 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $10011{,}11_2$; 1720_8 и $14F{,}1_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $726{,}14_8$ и $77{,}6_8$ в восьмеричной системе счисления.

Вариант 9

1. Переведите числа 618 и 55,49 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Вещественные числа перевести с точностью до четвертого знака.

2. Переведите числа $11101{,}011_2$; 1361_8 и $19A{,}6_{16}$ из заданной системы счисления в десятичную.

3. Найти сумму и разность чисел $D50{,}EC_{16}$ и $12{,}56_{16}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Основы логики

Вариант 0

1. Найти значение логического выражения:

$A \,\&\, B \vee C$ при $A = \text{False}$, $B = \text{True}$, $C = \text{False}$

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$\overline{A \vee B} \vee \overline{\bar{A} \vee B}$$

3. По заданному логическому выражению составить логическую схему и заполнить таблицу истинности.

$$\overline{\bar{X} \vee Y} \vee Z = F$$

Вариант 1

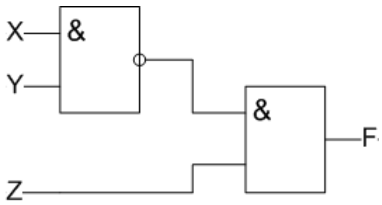
1. Найти значение логического выражения:

$\overline{A \vee B} \,\&\, C$ при $A = \text{False}$, $B = \text{False}$, $C = \text{True}$

2. Доказать данное равенство с помощью таблицы истинности.

$$X \leftrightarrow Y = (\overline{X} \,\&\, \overline{Y}) \vee (X \,\&\, Y).$$

3. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Вариант 2

1. Найти значение логического выражения:

$A \vee \overline{B} \,\&\, \overline{A}$ при $A = \text{False}$, $B = \text{False}$

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$((X \vee Y) \,\&\, \overline{X}) \vee ((\overline{X \vee Y}) \,\&\, X)$$

3. По заданному логическому выражению составить логическую схему и заполнить таблицу истинности.

$$\overline{X\vee} Y \& \overline{Z} = F$$

Вариант 3

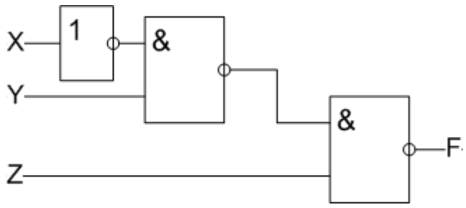
1. Найти значение логического выражения:

$\overline{A \vee B} \,\&\, \overline{B}$ при $A = \text{False}$, $B = \text{True}$

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$\overline{(X \,\&\, Y) \vee (\overline{X} \,\&\, \overline{Y})} \,\&\, (X \vee \overline{Y})$$

3. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Вариант 4

1. Найти значение логического выражения:

$A \vee \overline{B}\ \&\ \overline{C}$ при $A = \text{False}$, $B = \text{False}$, $C = \text{True}$

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$(X \vee Y)\ \&\ (\overline{X} \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})$$

3. По заданному логическому выражению составить логическую схему и за-полнить таблицу истинности.

$$\overline{X} \vee \overline{Y \& \overline{Z}} = F$$

Вариант 5

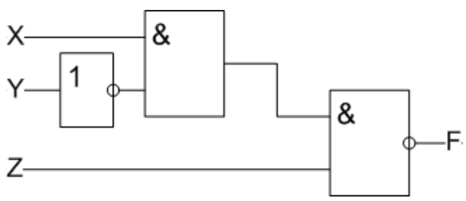
1. Найти значение логического выражения:

$(x = y) \vee (z < 4)$ при $x = 5$, $y = 7$, $z = 0$.

2. Доказать данное равенство с помощью таблицы истинности.

$$X \longrightarrow Y = \overline{X} \vee Y$$

3. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Вариант 6

1. Найти значение логического выражения:

$(a < z) \vee (z > -10)\ \&\ (a \neq 5)$ при $a = 8$, $z = -6$.

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$\overline{(X \vee Y) \rightarrow (\overline{Y \vee Z})}$$

3. По заданному логическому выражению составить логическую схему и за-полнить таблицу истинности.

$$\bar{X} \& Y \vee \bar{Z} = F$$

Вариант 7

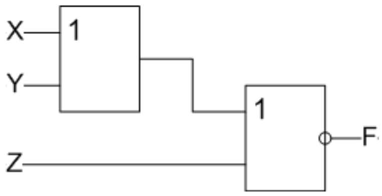
1. Найти значение логического выражения:

$(x \neq z) \vee (z < 4) \& (y < 7)$ при $x = -5$, $y = 7$, $z = -5$.

2. Доказать данное равенство с помощью таблицы истинности.

$$A \oplus B = (\bar{A} \& B) \vee (A \& \bar{B})$$

3. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Вариант 8

1. Найти значение логического выражения:

$(a < b) \& (c < 2) \vee (a > c)$ при $a = 8$, $b = -6$, $c = 2$.

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$X \& Y \vee \bar{X} \& Y \vee \bar{X} \& Z \vee X \& Z$$

3. По заданному логическому выражению составить логическую схему и за-полнить таблицу истинности.

$$\overline{(X \vee Y) \& Z} = F$$

Вариант 9

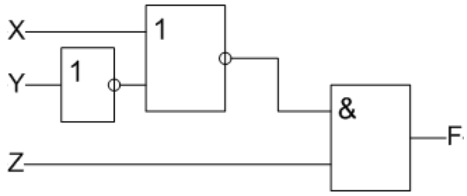
1. Найти значение логического выражения:

$\bar{B} \vee C \& \overline{A \vee B}$ при $A = False$, $B = False$, $C = True$

2. Упростить логическое выражение. Правильность упрощения проверить с помощью таблицы истинности.

$$(A \& C) \vee (A \& \bar{C}) \vee \left(\overline{\bar{A} \rightarrow \bar{B}}\right)$$

3. По заданной логической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



Кодирование информации

Вариант 0

1. Запишите дополнительный код числа –34 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00101010 и 10011000. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. За 45 секунд был распечатан текст. Подсчитать количество страниц в тексте, если известно, что в среднем на странице 50 строк по 75 символов в каждой, скорость печати лазерного принтера 8 Кбит/с., 1 символ – 1 байт. Ответ округлить до целой части.

Вариант 1

1. Запишите дополнительный код числа –42 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00101001 и 10101010. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. Лазерный принтер печатает со скоростью в среднем 7 Кбит в секунду. Сколько времени понадобится для распечатки 12-страничного документа, если известно, что на одной странице в среднем по 45 строк, в строке 60 символов (1 символ – 1 байт). Результат округлить до целой части.

Вариант 2

1. Запишите дополнительный код числа –11 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00010010 и 10000001. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. За-

пишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. Автоматическое устройство осуществило перекодировку информационного сообщения на русском языке, первоначально записанного в 16-битном коде Unicode, в 8-битную кодировку КОИ-8. При этом информационное сообщение уменьшилось на 480 бит. Какова длина сообщения в символах?

Вариант 3

1. Запишите дополнительный код числа –60 в однобайтном формате.
2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 01011000 и 10001001. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.
3. Скорость передачи данных через модемное соединение 28 Кбит/с. Передача текстового файла заняла 10 с. Определите, сколько символов содержал переданный текст, если известно, что он был представлен в кодировке Unicode.

Вариант 4

1. Запишите дополнительный код числа –49 в однобайтном формате.
2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00000100 и 10011000. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.
3. Для хранения растрового изображения размером 128×128 пикселей отвели 4 Килобайта памяти. Каково максимально возможное число цветов в палитре изображения?

Вариант 5

1. Запишите дополнительный код числа –26 в однобайтном формате.
2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00010110 и 10010001. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.
3. Скорость передачи данных через ADSL-соединение равна 128000 бит/с. Через данное соединение передают файл размером 625 Килобайт. Определите время передачи файла в секундах.

Вариант 6

1. Запишите дополнительный код числа –48 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 01001001 и 10000110. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. Системный администратор ограничил длительность непрерывного подключения компьютеров сотрудников организации к сети Интернет 10 мин. Сотруднику требуется переслать файл размером 100 Мбайт. Скорость передачи информации с рабочего места (компьютера) сотрудника в среднем составляет 512 Килобит/с. На сколько частей необходимо разделить файл для пересылки?

Вариант 7

1. Запишите дополнительный код числа –22 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00110010 и 10010110. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. Определить объем памяти для хранения цифрового аудиофайла, время звучания которого составляет две минуты при частоте дискретизации 44,1 кГц и разрешении 16 битов.

Вариант 8

1. Запишите дополнительный код числа –41 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00010001 и 10001111. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. Укажите минимальный объем памяти (в килобайтах), достаточный для хранения любого растрового изображения размером 64×64 пикселя, если известно, что в изображении используется палитра из 256 цветов. Саму палитру хранить не нужно.

Вариант 9

1. Запишите дополнительный код числа –44 в однобайтном формате.

2. Даны однобайтные коды двух целых чисел: 00000101 и 10000100. Известно, что отрицательное число представлено в дополнительном коде. Запишите значения целых чисел в десятичной системе.

3. На магнитном диске объемом 30 Мбайт записана книга. В книге 1552 страницы. Из них страниц с текстом на 752 больше, чем страниц с рисунками. Страница с текстом содержит 640 символов. Все рисунки восьми цветные и имеют единый формат. Определите размер рисунков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии дано описание основных тем теоретической информатики: понятие информации, ее свойства, измерение и кодирование информации, представление информации в компьютере, арифметические и логические основы работы компьютера.

По всем рассмотренным темам приведены примеры решения задач. Для самостоятельного решения в учебное пособие включены 10 вариантов заданий.

Пособие можно использовать как для подготовки к лекциям, так и для проведения лабораторных, а также для самостоятельного изучения студентами изложенных в пособии тем.