

Д.В. БОЛДЫРЕВ

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В учебном пособии приведены основные сведения о случайных процессах, дано описание правил анализа и синтеза линейных систем, находящихся под влиянием случайных воздействий. Изложение материала сопровождается достаточным числом примеров.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки 15.03.04, занимающихся решением задач статистической динамики систем.

СОДЕРЖАНИЕ

1 СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.....	8
2 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	13
2.1 Случайные процессы и их характеристики.....	13
2.2 Корреляционные функции случайных процессов.....	23
2.3 Спектральные плотности случайных процессов.....	35
2.4 Экспериментальное определение статистических характеристик	42
3 АНАЛИЗ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ...	50
3.1 Преобразование случайных сигналов линейной системой	50
3.2 Статистические характеристики случайных процессов на выходе линейной системы во временной области.....	52
3.3 Статистические характеристики случайных процессов на выходе линейной системы в частотной области.....	59
3.4 Анализ точности систем при случайных воздействиях.....	68
3.5 Формирующие фильтры.....	74
4 СИНТЕЗ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ...	82
4.1 Общая постановка задачи синтеза систем при случайных воздействиях	82
4.2 Определение оптимальных параметров системы.....	85
4.3 Синтез оптимальной системы с произвольной структурой	89
4.4 Фильтр Винера	98
4.5 Фильтр Калмана-Бьюси.....	107
5 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	120
5.1 Организация лабораторного практикума	120
5.2 Лабораторная работа №1. Определение статистических характеристик случайных процессов.....	122
5.3 Лабораторная работа №2. Анализ системы при случайных воздействиях	127

5.4 Лабораторная работа №3. Определение оптимальных параметров системы	131
5.5 Лабораторная работа №4. Синтез оптимальной системы с произвольной структурой	133
5.6 Лабораторная работа №5. Синтез оптимального фильтра Калмана-Бьюси.....	135
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	138
ПРИЛОЖЕНИЕ В	139

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управления системами в реальных условиях всегда связана с необходимостью учета случайных факторов по следующим причинам:

- начальное состояние объекта управления всегда известно с некоторой погрешностью, поэтому может считаться случайной величиной;
- в процессе управления на объект управления действуют внешние возмущения, поэтому траектория его движения является случайной функцией;
- измерение выходных параметров объекта управления производится с погрешностью, поэтому результаты этих измерений могут считаться случайными величинами.

Системы управления, на поведение которых оказывают влияние случайные факторы, называются **стохастическими** (от др.-греч. *Στοχος* — цель, предположение). Случайные воздействия могут прикладываться к системе извне или возникать внутри некоторых ее элементов. Состояние таких систем описывается как величинами, которые могут быть предсказаны, так и величинами случайными. Любое развитие таких систем во времени является случайным процессом, который должен описываться в терминах теории вероятностей.

Дисциплина «Случайные процессы в системах управления» ставит своей целью формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-4 будущего бакалавра по направлению подготовки 15.03.04 — Автоматизация технологических процессов и производств.

Код	Формулировка
ОПК-4	способностью участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с автоматизацией производств, выборе на основе анализа вариантов оптимального прогнозирования последствий решения

Главными задачами дисциплины являются: усвоение студентами принципов анализа и синтеза систем управления, находящихся под

влиянием случайных воздействий, приобретение практических навыков использования методов теории оптимальной фильтрации.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать принципы автоматизации производства;
- уметь разрабатывать обобщенные варианты решения проблем, связанных с автоматизацией производства;
- владеть навыками анализа вариантов оптимального прогнозирования последствий принятого решения.

Учебное пособие разработано на основе курса лекций, читаемого автором студентам направления подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств», а также на базе материала практических и лабораторных занятий по этому курсу. Учебное пособие логически разбивается на части (темы):

- модели динамики систем;
- случайные процессы;
- анализ систем при случайных воздействиях;
- синтез систем при случайных воздействиях;
- лабораторный практикум.

Каждая тема разбивается на разделы, которые посвящены изучению своей категории задач управления системами, находящимися под влиянием случайных воздействий. В пределах каждого раздела учебника предлагается единый подход к изложению материала, который предусматривает:

- предоставление необходимых теоретических сведений;
- постановку задачи анализа или синтеза систем, находящихся под влиянием случайных воздействий;
- описание метода решения задачи анализа или синтеза систем, находящихся под влиянием случайных воздействий;
- разбор примеров решения задачи анализа или синтеза систем, находящихся под влиянием случайных воздействий;
- выполнение лабораторной работы.

В теоретической части особое внимание уделяется правилам решения классических задач теории случайных процессов. В практической части акцент делается на алгоритмах анализа или синтеза систем управления в различных режимах их функционирования. Изложение сопровождается большим количеством примеров.

1 СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Поведение реальных систем может быть описано моделями двух типов: детерминированными (полностью определенными) и стохастическими (вероятностными или статистическими).

В **детерминированных моделях** поведение системы считается полностью определенным. Предполагается, что структура системы является заранее известной; параметры системы и внешние воздействия (входные сигналы) являются заранее заданными детерминированными функциям времени; реакция системы на входные сигналы (выходной сигнал) также является детерминированной функцией времени.

Примечание. Обычно в детерминированной модели в качестве входных сигналов принимаются типовые воздействия в виде единичной ступенчатой функции $I(t)$, δ -функции (идеального импульса) или некоторых других функций времени, которые выбираются, исходя из опыта или интуиции исследователя для удобства расчета систем.

Сами детерминированные модели определяют *однозначное соответствие между реализациями входного и выходного сигналов*. Поведение системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Оно однозначно определяется состоянием системы в текущий момент времени (начальными условиями) и может быть точно предсказано для любого последующего момента времени.

Исследование поведения систем посредством детерминированных моделей сводится к изучению процесса преобразования детерминированных входных сигналов в детерминированные выходные сигналы. Этот процесс также считается детерминированным.

В **стохастических моделях** входные сигналы, параметры и структура системы в общем случае считаются случайными функциями времени или случайными величинами с известными статистическими характеристиками.

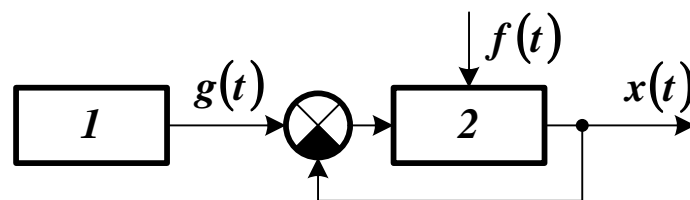
Примечание. Необходимые статистические характеристики определяются в ходе статистического анализа опытных данных о поведении системы в реальных условиях

Статистические модели каждой реализации входного сигнала ставят в соответствие множество выходных сигналов, характеризующее определенным законом распределения. Если известны статистические характеристики входных сигналов и динамических свойств системы, то поведение системы будет полностью определено в статистическом смысле (т. е. могут быть найдены соответствующие статистические характеристики выходного сигнала).

Изучение поведения системы с помощью стохастической модели в общем случае сводится к изучению преобразования системой случайных входных сигналов в случайные выходные сигналы.

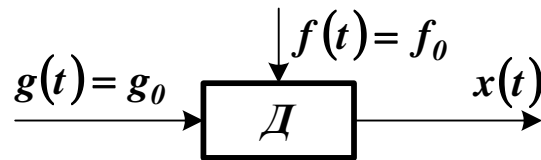
Примечание. Частным случаем применения стохастических моделей является изучение поведения детерминированной системы, находящейся под влиянием случайных входных сигналов. В другом частном случае входные сигналы считаются заранее известными функциями времени, а структура системы и ее параметры имеют случайный характер.

Пример. Система стабилизации курса летательного аппарата. Структурная схема системы имеет вид



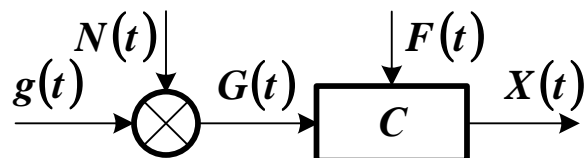
С помощью датчика 1 устанавливается нужное значение курса $g(t)$. На летательный аппарат 2 действует возмущение атмосферы $f(t)$. Задача стабилизации заключается в поддержании действительного курса, равным заданному.

Исследуя процесс стабилизации с помощью детерминированной модели, можно считать, что заданный курс постоянен ($g(t) = g_0$); возмущение атмосферы задано как функция времени (например, $f(t) = f_0$); динамические свойства системы определены в виде дифференциального уравнения. Выходной сигнал $x(t)$ представляется в виде конкретной функции времени, определяемой как результат детерминированного преобразования D (см. схему).



При таком решении задачи динамические свойства системы приняты полностью определенными во времени, а задатчик считается идеально точным.

Система стабилизации может исследоваться с помощью статистической модели. Так как реальные задатчики работают с ошибкой, то нужный курс может быть представлен как случайный процесс $G(t) = g(t) + N(t)$, где $g(t)$ — полезный сигнал, $N(t)$ — помеха, определяемая случайной погрешностью задания курса. Возмущение атмосферы представляется случайным процессом $F(t)$. Выходной сигнал считается случайным процессом $X(t)$, полученным в ходе статистического преобразования C (см. схему).



При таком решении задачи может быть получен ответ на вопрос о том, как система стабилизации выдерживает заданный курс в среднем при многократном ее использовании с реальными задатчиками в реальной возмущенной атмосфере.



Выбор того или иного вида модели зависит от имеющейся исходной информации, опыта проектирования систем, условий их применения.

Детерминированные модели воспроизводят только регулярные составляющие реальных сигналов и не учитывают их случайных составляющих. Поэтому их можно рассматривать как частный случай статистических моделей, оперирующих наиболее вероятными значениями сигналов.

Детерминированные модели позволяет синтезировать системы, оптимальные только для конкретного набора входных сигналов (для других, существенно отличающихся сигналов они могут быть далеко не оптимальными). Статистические модели дают возможность спроектировать системы, являющиеся оптимальными для целого множества реальных входных сигналов.

Детерминированные модели могут использоваться для проектирования систем при случайных воздействиях. При этом обычно считается, что эти воздействия максимальны, и к системе предъявляются заведомо более жесткие требования, чем это необходимо. В ряде случаев такой подход оказывается целесообразным или даже единственно приемлемым. Однако подобные неблагоприятные ситуации встречаются редко. Поэтому применение стохастических моделей, оперирующих не максимальными, а наиболее вероятными значениями внешних воздействий, приводит к получению более рациональных технических решений (естественно, преднамеренно допускается снижение качества системы в маловероятных ситуациях).

Изучением поведения систем при случайных воздействиях занимается **статистическая динамика систем**. В ней учитывается, что входные случайные сигналы могут содержать детерминированные составляющие, а структура системы и ее параметры могут быть де-

терминированными. Статистическая динамика изучает следующие проблемы:

- статистическое описание случайных процессов, заключающееся в определении их статистических характеристик;
- статистический анализ систем, заключающийся в общем случае в нахождении статистических характеристик их выходных сигналов по заданным статистическим характеристикам входных сигналов и статистическим характеристикам динамических свойств систем;
- статистический синтез оптимальных систем, заключающийся в нахождении и реализации оптимальных в определенном смысле динамических свойств системы по заданным статистическим характеристикам входных сигналов.

В конечном итоге статистическая динамика позволяет определить статистические характеристики выходных сигналов, с помощью которых можно оценить их точность, надежность, пропускную способность систем.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие модели считаются детерминированными? Какой вид исходной информации они используют? Какое преобразование информации они реализуют?
2. Какие модели считаются стохастическими? Какой вид исходной информации они используют? Какое преобразование информации они реализуют?
3. В чем достоинства и недостатки детерминированных и статистических моделей?
4. Что изучает статистическая динамика систем?

2 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

2.1 Случайные процессы и их характеристики

Случайные процессы — случайные функции независимой переменной — времени t . Случайной считается функция, значение которой для каждого значения аргумента является случайной величиной. По результатам n опытов случайный процесс $X(t)$ может отобразиться n различными функциями времени $x_i(t)$, где $i = 1, \dots, n$, которые называются **реализациями** (возможными значениями) случайного процесса (см. рисунок 2.1). Должна изучаться не каждая реализация в отдельности, а свойства всего множества $X(t)$.

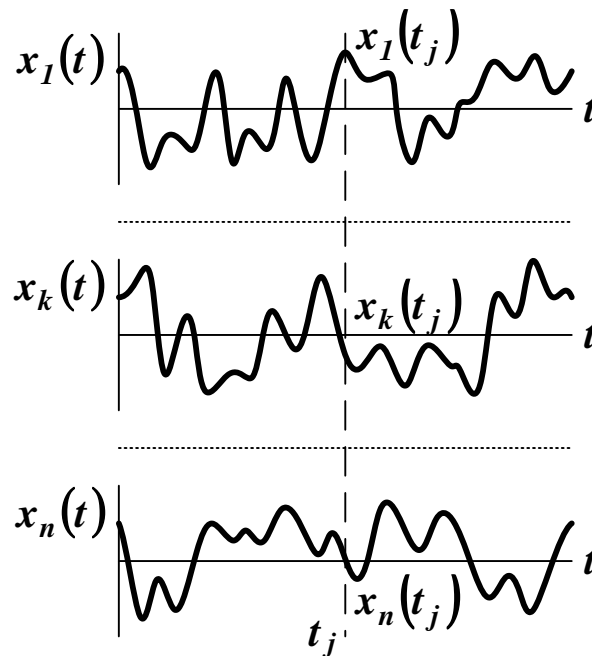


Рисунок 2.1 — Реализации случайного процесса

Для любого фиксированного момента времени $t = t_j$ реализация $x_i(t_j)$ является регулярной (неслучайной), а $X(t_j)$ — случайной функцией, полученной путем статистического усреднения свойств

различных реализаций. Функция $X(t_j)$ называется **сечением случайного процесса** в момент времени t_j .

Примечание. Нельзя утверждать, что случайный процесс в данный момент времени принимает некоторое детерминированное значение. Можно говорить лишь о том, что с некоторой вероятностью это значение находится в определенных пределах.

Статистические характеристики случайного процесса определяются его *функцией распределения* (интегральным законом распределения) и *плотностью вероятности* (дифференциальным законом распределения).

Функцией распределения случайной величины x считается непрерывная неубывающая функция, определяющая вероятность того, что значение x будет меньше некоторого заданного значения

$$\begin{aligned} F_x(\xi) &= P\{x < \xi\}, \\ F_x(-\infty) &= 0, \quad F_x(+\infty) = 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вероятность того, что случайная величина x попадает в заданный полуоткрытый интервал, равна

$$P\{A \leq x < B\} = F_x(B) - F_x(A) = \int_A^B \varpi_x(\xi) d\xi, \quad (2.2)$$

где $\varpi_x(\xi)$ непрерывная функция, называемая **плотностью вероятности** случайной величины x . Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} F_x(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \varpi_x(\zeta) d\zeta, \\ \varpi_x(\xi) &= \frac{dF_x(\xi)}{d\xi}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В теории систем наиболее употребительными являются равномерное, экспоненциальное и нормальное распределения.

Равномерное распределение характерно для случайных экспериментов с равновероятными исходами. Его функция распределения и плотность вероятности находятся по формулам

$$F_x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < a, \\ \frac{\xi - a}{b - a}, & \xi \in [a, b], \\ 1, & \xi > b, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\varpi_x(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \xi \in [a, b], \\ 0, & \xi \notin [a, b], \end{cases} \quad (2.5)$$

где a и b — нижняя и верхняя граница диапазона распределения.

Экспоненциальное распределение характерно для систем с отсутствием последствия, когда

$$P\{x + s < \xi | s < \xi\} = P\{x < \xi\}, \quad (2.6)$$

в связи с чем оно является основным в теории скачкообразных марковских процессов (см. далее). Его функция распределения и плотность вероятности находятся по формулам

$$F_x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda \cdot \xi), & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\varpi_x(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi), & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где λ — коэффициент затухания.

Нормальное распределение характерно для случайных величин, определяемых суммарным эффектом от действия большого числа случайных факторов. Его функция распределения и плотность вероятности находятся по формулам

$$F_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left[-\frac{(\zeta - m_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}\right] d\zeta, \quad (2.9)$$

$$\varpi_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot \exp\left[-\frac{(\xi - m_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}\right], \quad (2.10)$$

где m_x — математическое ожидание, σ_x — среднеквадратическое отклонение случайной величины x .

Графики функций $F_x(\xi)$ и $\varpi_x(\xi)$ для различных видов распределений показаны на рисунке 2.2.

Для случайных процессов можно определить различные функции распределения. *Одномерной функцией распределения случайного процесса $X(t)$* (функцией первого порядка) считается функция, определяющая вероятность того, что его сечение будет меньше некоторого заданного значения для момента времени t_1

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1, t_1) &= P\{X(t_1) < \xi_1\}, \\ F_1(-\infty, t_1) &= 0, \quad F_1(+\infty, t_1) = 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Функция (2.11) характеризует случайный процесс изолированно в отдельных сечениях, не отражая взаимосвязи между ними. Одномерной функцией распределения однозначно характеризуется только чисто случайный процесс или **белый шум**. Его различные сечения совершенно независимы друг от друга.

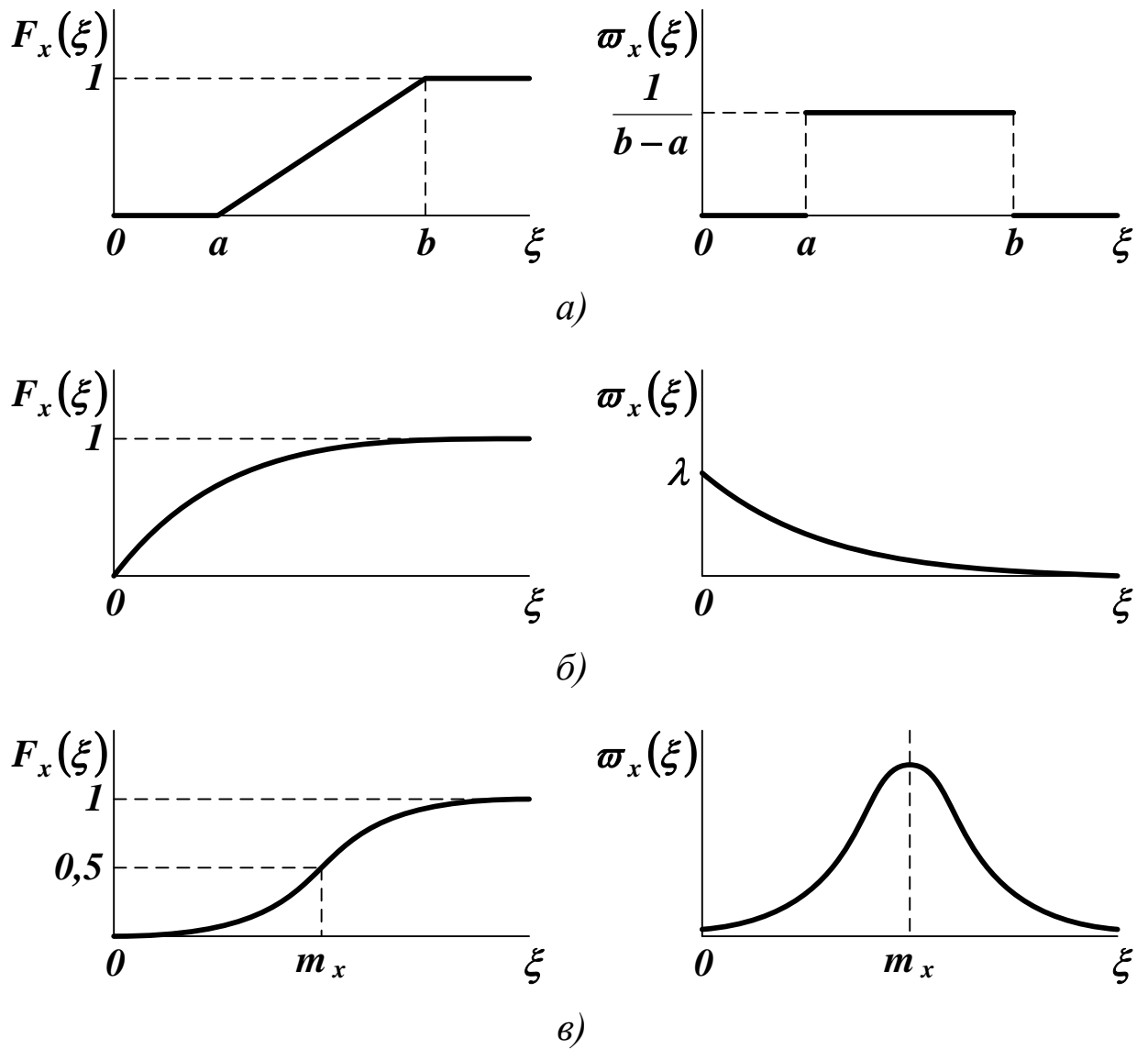


Рисунок 2.2 — Функции распределения и плотности вероятности:
 (а) равномерное распределение; (б) экспоненциальное распределение;
 (в) нормальное распределение

Двумерной функцией распределения случайного процесса $X(t)$ называется функция, определяющая вероятность того, что его сечение будет меньше некоторых заданных значений для двух различных моментов времени t_1 и t_2

$$\begin{aligned} F_2(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2) &= P\{X(t_1) < \xi_1, X(t_2) < \xi_2\}, \\ F_2(-\infty, t_1; \xi_2, t_2) &= F_2(\xi_1, t_1; -\infty, t_2) = 0, \\ F_2(+\infty, t_1; +\infty, t_2) &= 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Можно определить n -мерную функцию распределения

$$\begin{aligned} F_n(\xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= P\{X(t_1) < \xi_1, \dots, X(t_n) < \xi_n\}, \\ F_n(-\infty, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= \dots = F_n(\xi_1, t_1; \dots; -\infty, t_n) = 0, \\ F_n(+\infty, t_1; \dots; +\infty, t_n) &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Чем выше порядок функции распределения, тем точнее определяются свойства процесса. Однако закономерности вида (2.13) обычно бывают громоздкими, поэтому на практике ограничиваются функциями первого или второго порядков.

Существует особый класс случайных процессов, для которых функции распределения в любой момент времени $t > t_0$ (в будущем) определяются только значением $X(t_0)$ (в настоящем), и все значения $X(t)$ при $t < t_0$ (в прошлом) не уточняют это описание. Такие процессы называются **марковскими** (по имени впервые исследовавшего их математика А.А. Маркова). Они характерны для систем с *отсутствием памяти* (или систем *без последствия*).

Примечание. Аналогом марковского процесса можно считать решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d}{dt} x(t) = \Phi[t, x(t)],$$

которое зависит от $x(t_0)$ и не зависит от производных любого порядка от $x(t)$ по времени в момент t_0 .

По математическому описанию марковские процессы проще немарковских.

Для случайного процесса $X(t)$ можно определить плотности вероятности требуемого порядка

$$\begin{aligned} \varpi_1(\xi_1, t_1) &= \frac{\partial F_1(\xi_1, t_1)}{\partial \xi_1}, \\ &\dots \\ \varpi_n(\xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= \frac{\partial^n F_n(\xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Среднее по множеству (математическое ожидание) определяется на основе наблюдений за реализациями случайного процесса в один и тот же момент времени

$$\tilde{x}(t) = m_X(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varpi_1(x, t) dx. \quad (2.15)$$

Математическое ожидание случайного процесса — регулярная функция, значение которой в любой момент времени t_j равно математическому ожиданию соответствующего сечения $X(t_j)$. Оно является результатом вероятностного усреднения случайной величины, при котором каждое ее возможное значение берется с весом $\varpi_1(x, t_j)$.

Можно определить **центрированный случайный процесс**

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t), \quad (2.16)$$

математическое ожидание которого

$$M\left[\overset{\circ}{X}(t)\right] = M[X(t) - m_X(t)] = M[X(t)] - m_X(t) = 0. \quad (2.17)$$

Любой случайный процесс можно представить как совокупность регулярной составляющей (математического ожидания) и центрированной случайной составляющей

$$X(t) = m_X(t) + \overset{\circ}{X}(t). \quad (2.18)$$

Среднее по времени определяется на основе наблюдения за отдельной реализацией случайного процесса в течение достаточно длительного времени, как

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (2.19)$$

если этот предел существует. В общем случае это значение различно для отдельных реализаций случайного процесса.

Дисперсией центрированного случайного процесса считается математическое ожидание его квадрата

$$D_X(t) = M\left[\overset{\circ}{X}^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t)]^2 \cdot \varpi_1(x, t) dx. \quad (2.20)$$

Дисперсия случайного процесса — регулярная функция, значение которой в любой момент времени t_j равно дисперсии соответствующего сечения $X(t_j)$.

Среднеквадратичное отклонение центрированного случайного процесса находится как квадратный корень из его дисперсии

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}. \quad (2.21)$$

По характеру изменения статистических характеристик с течением времени случайные процессы делят на **стационарные и нестационарные**. Различают стационарность в узком и в широком смысле.

Стационарным в узком смысле называют случайный процесс $X(t)$, статистические характеристики которого неизменны во времени. Функция распределения и плотность вероятности любой размерности не зависят от начала отсчета времени t_0 , т. е.

$$\begin{aligned} F_n(\xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= F_n(\xi_1, t_1 - t_0; \dots; \xi_n, t_n - t_0), \\ \varpi_n(\xi_1, t_1; \dots; \xi_n, t_n) &= \varpi_n(\xi_1, t_1 - t_0; \dots; \xi_n, t_n - t_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где t_0 выбирается произвольно.

Стационарным в широком смысле называют случайный процесс $X(t)$, математическое ожидание которого постоянно, а функции распределения и плотности вероятности любой размерности зависят только от величины сдвига всех точек t_j вдоль оси времени на одинаковую величину τ (т. е. зависят от начала отсчета времени)

$$\begin{aligned} F_n(\xi_1, t_1 + \tau; \dots; \xi_n, t_n + \tau) &= F_n(\xi_1, \dots, \xi_n, \tau), \\ \varpi_n(\xi_1, t_1 + \tau; \dots; \xi_n, t_n + \tau) &= \varpi_n(\xi_1, \dots, \xi_n, \tau). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Процессы, стационарные в узком смысле, обязательно стационарны и в широком смысле. Обратное утверждение верно не во всех случаях. Случайные процессы, не обладающие свойствами стационарности, считаются *нестационарными*.

Примечание. *Стационарный процесс может считаться аналогом установившегося режима в детерминированных системах, а нестационарный процесс — аналогом переходного режима при любом случайном входном сигнале.*

Стационарный случайный процесс считается **эргодическим**, если любая статистическая характеристика, определяемая усреднением по

множеству его реализаций, равна соответствующей характеристике, определяемой усреднением по времени его произвольной достаточно длительной реализации (это позволяет, например, приравнять средние по множеству и по времени). *Единственная реализация эргодического случайного процесса в бесконечном интервале времени полностью определяет весь процесс*, что существенно упрощает расчет его статистических характеристик.

Примечание. Не каждый стационарный случайный процесс является эргодическим. Примером может служить процесс $X(t)$, каждая реализация которого постоянна во времени (см. рисунок 2.3).

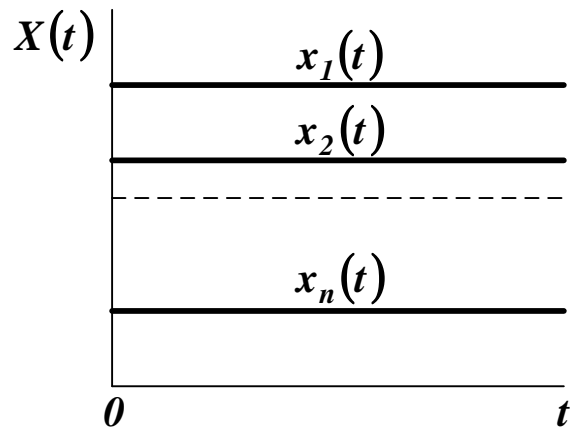


Рисунок 2.3 — Пример стационарного неэргодического случайного процесса

Один и тот же процесс может быть эргодическим по отношению к одним статистическим характеристикам и неэргодическим по отношению к другим. В дальнейшем будет считаться, что по отношению ко всем статистическим характеристикам условия эргодичности выполняются.

2.2 Корреляционные функции случайных процессов

Статистические характеристики, перечисленные в п. 2.1, не отражают в полной мере характера случайного процесса. Например, процессы на рисунке 2.4 различны по своей структуре, хотя и имеют одинаковые значения математического ожидания и дисперсии (штриховыми линиями показаны значения $m_X(t) \pm 3 \cdot \sigma_X(t)$; при нормальном распределении значение $m_X(t)$ попадает в этот диапазон с вероятностью **0,997**). Процесс на рисунке 2.4 (а) протекает относительно плавно, и статистическая связь между его сечениями достаточно сильная. Процесс на рисунке 2.4 (б) характеризуется сильной изменчивостью, связь между его сечениями слабая. Однако ни по математическому ожиданию, ни по дисперсии определить это невозможно.

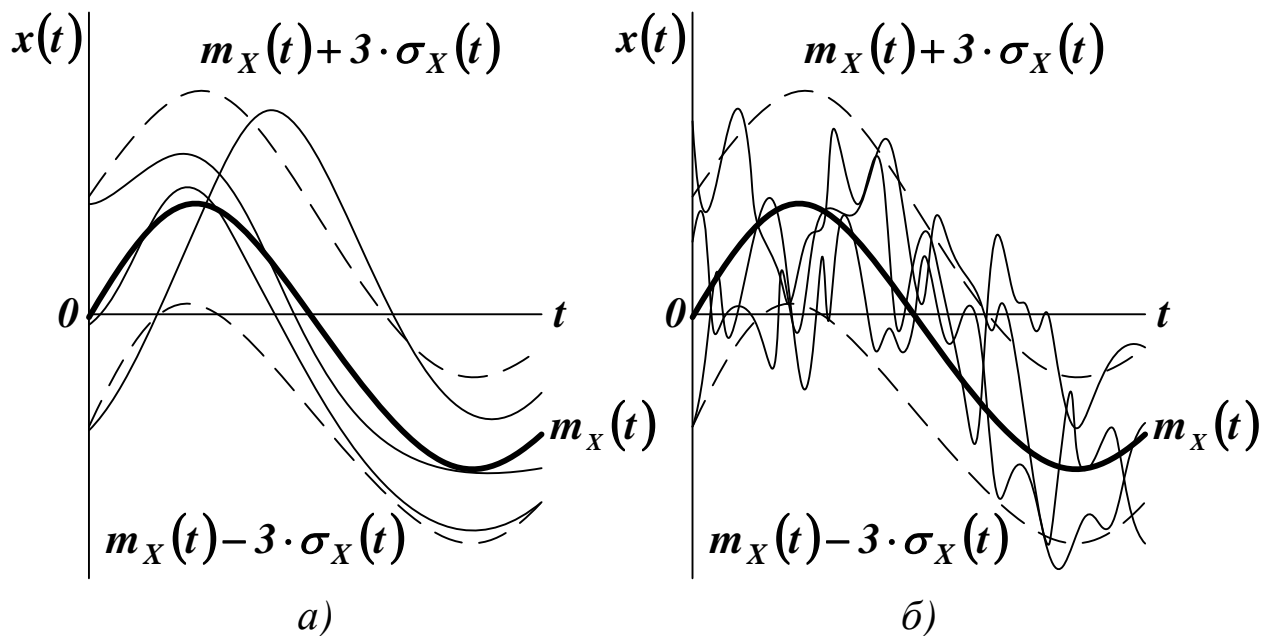


Рисунок 2.4 — Случайные процессы различной структуры

Чтобы учесть статистическую связь между различными сечениями случайного процесса, используют корреляционные функции.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию двух аргументов t_1 и t_2 , которая для каждой пары произвольно выбранных моментов времени равна

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m_X(t_1)] \cdot [x_2 - m_X(t_2)] \cdot \varpi_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Корреляционная функция случайного процесса, стационарного в узком смысле, не зависит от разности аргументов t_2 и t_1 . Корреляционная функция случайного процесса, стационарного в широком смысле, зависит только от одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= R_X(t, t + \tau) = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m_X(t)] \cdot [x_2 - m_X(t + \tau)] \cdot \varpi_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если ограничиться рассмотрением процессов с нулевым математическим ожиданием, стационарных в широком смысле, то можно упростить выражение для корреляционной функции

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= M \left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot \varpi_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для эргодических процессов корреляционную функцию можно определить как среднее по времени от произведения

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \overline{[x(t) - \bar{x}] \cdot [x(t + \tau) - \bar{x}]} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}] \cdot [x(t + \tau) - \bar{x}] dt,
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

где $x(t)$ — любая реализация случайного процесса $X(t)$. Если среднее по времени равно нулю, то

$$R_X(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt.
 \tag{2.28}$$

Физический смысл корреляционной функции состоит в оценке вероятности того, что сечения случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 отличаются незначительно. При $t_2 \rightarrow t_1$ влияние $X(t_1)$ на $X(t_2)$ достаточно велико, и $R_X(t_1, t_2)$ стремится к максимуму. По мере увеличения разности $t_2 - t_1$ влияние $X(t_1)$ на $X(t_2)$ ослабевает, и значение $R_X(t_1, t_2)$ уменьшается. При $t_2 - t_1 \rightarrow +\infty$ вероятность того, что $X(t_1)$ мало отличается от $X(t_2)$, практически равна нулю.

Основные свойства корреляционных функций следующие.

1) Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов.

Доказательство:

$$R_X(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right] = M \left[\overset{\circ}{X}(t_2) \cdot \overset{\circ}{X}(t_1) \right] = R_X(t_2, t_1).$$

• • •

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция есть четная функция τ .

Доказательство:

$$R_X(\tau) = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau) \right] = M \left[\overset{\circ}{X}(t - \tau) \cdot \overset{\circ}{X}(t) \right] = R_X(-\tau).$$

• • •

2) Значение корреляционной функции случайного процесса при $t_1 = t_2 = t$ равно его дисперсии.

Доказательство:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t) = M \left[\overset{\circ}{X}^2(t) \right] = D_X(t).$$

• • •

Начальное значение корреляционной функции стационарного случайного процесса равно его дисперсии.

Доказательство:

$$R_X(0) = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t) \right] = D_X.$$

• • •

3) Значение корреляционной функции по модулю не может превысить среднего геометрического дисперсий при t_1 и t_2 .

Доказательство. Используем известное ограничение для коэффициента корреляции ρ_{xy} двух случайных величин x и y

$$|\rho_{xy}| = \frac{|\text{cov}(x, y)|}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{|M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)]|}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{|M[x \cdot y] - m_x \cdot m_y|}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \leq 1.$$

Величина $\text{cov}(x, y)$ называется ковариацией (корреляционным моментом) случайных величин x и y . Для корреляционной функции случайного процесса можно записать

$$\frac{\left| M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right] \right|}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} = \frac{|R_X(t_1, t_2)|}{\sqrt{D_X(t_1) \cdot D_X(t_2)}} \leq 1,$$

$$|R_X(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_X(t_1) \cdot D_X(t_2)}.$$

• • •

Для стационарного процесса значение корреляционной функции при любом τ не может превысить по модулю его дисперсии.

Доказательство:

$$|R_X(\tau)| \leq \sqrt{D_X(t) \cdot D_X(t + \tau)} \leq D_X = R_X(0).$$

• • •

4) Корреляционная функция процесса $Z(t) = X(t) + g(t)$ (где $X(t)$ — случайный процесс, $g(t)$ — регулярная функция времени) определится соотношением

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2). \quad (2.29)$$

Доказательство:

$$Z(t) = X(t) + g(t),$$

$$\overset{\circ}{Z}(t) = [X(t) + g(t)] - [m_X(t) + g(t)] = \overset{\circ}{X}(t),$$

$$R_Z(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{Z}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Z}(t_2) \right] = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2) \right] = R_X(t_1, t_2).$$

• • •

5) Корреляционная функция процесса $Z(t) = X(t) \cdot g(t)$ (где $X(t)$ — случайный процесс, $g(t)$ — регулярная функция времени) определится соотношением

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \cdot g(t_1) \cdot g(t_2). \quad (2.30)$$

Доказательство:

$$Z(t) = X(t) \cdot g(t),$$

$$\dot{Z}(t) = X(t) \cdot g(t) - m_X(t) \cdot g(t) = [X(t) - m_X(t)] \cdot g(t) = \dot{X}(t) \cdot g(t),$$

$$R_Z(t_1, t_2) = M \left[\dot{Z}(t_1) \cdot \dot{Z}(t_2) \right] = M \left\{ \left[\dot{X}(t_2) \cdot g(t_2) \right] \cdot \left[\dot{X}(t_1) \cdot g(t_1) \right] \right\}.$$

Учитывая свойства математического ожидания,

$$R_Z(t_1, t_2) = M \left[\dot{X}(t_1) \cdot \dot{X}(t_2) \right] \cdot g(t_1) \cdot g(t_2) = R_X(t_1, t_2) \cdot g(t_1) \cdot g(t_2).$$

• • •

6) Корреляционная функция случайного процесса, содержащего постоянную составляющую, также будет содержать постоянную составляющую.

Доказательство. Пусть наблюдаемый процесс представляет собой постоянный сигнал $x(t) = A_0$ (см. рисунок 2.5 (а)). Тогда

$$R_X(t_1, t_2) = M[x(t_1) \cdot x(t_2)] = M[A_0 \cdot A_0] = A_0^2.$$

• • •

7) Корреляционная функция случайного процесса, содержащего периодическую составляющую, также будет содержать периодическую составляющую.

Доказательство. Пусть наблюдаемый процесс представляет собой периодический сигнал $x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$ (см. рисунок 2.5 (б)). Введем обозначения $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$ и используем формулу (2.28).

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_1^2}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \tau + \varphi_1) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_1^2}{4 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T [\cos(\omega_1 \cdot \tau) - \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \tau + 2 \cdot \varphi_1)] dt.
\end{aligned}$$

Примем T равным периоду функции $x(t)$, т. е. $T_1 = 2 \cdot \pi / \omega_1$. Тогда, используя периодичность подынтегральных функций, при $T \rightarrow +\infty$ интеграл с пределами от $-T$ до T можно заменить суммой интегралов с пределами от $(k-1) \cdot T_1$ до $k \cdot T_1$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Учитывая такую замену, можно записать

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \frac{A_1^2}{2 \cdot T_1} \cdot \left[\int_0^{T_1} \cos(\omega_1 \cdot \tau) dt - \int_0^{T_1} \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \tau + 2 \cdot \varphi_1) dt \right] = \\
&= \frac{A_1^2}{2 \cdot T_1} \cdot \cos(\omega_1 \cdot \tau) \cdot \int_0^{T_1} dt - \frac{A_1^2}{2 \cdot T_1} \cdot \int_0^{T_1} \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \tau + 2 \cdot \varphi_1) dt = \\
&= \frac{A_1^2}{2 \cdot T_1} \cdot \cos(\omega_1 \cdot \tau) \cdot t \Big|_0^{T_1} - \frac{A_1^2}{4 \cdot \omega_1 \cdot T_1} \cdot \sin(2 \cdot \omega_1 \cdot t + \omega_1 \cdot \tau + 2 \cdot \varphi_1) \Big|_0^{T_1} = \\
&= \frac{A_1^2}{2} \cdot \cos(\omega_1 \cdot \tau).
\end{aligned}$$

Полученная корреляционная функция не содержит никаких сведений о фазовом сдвиге.

Если наблюдаемый сигнал описывается функцией времени, разлагаемой в ряд Фурье $x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_i)$, то, используя результаты, полученные в предыдущих примерах, можно записать

$$R_X(\tau) = A_0^2 + \sum_{i=1}^k \frac{A_i^2}{2} \cdot \cos(\omega_i \cdot \tau).$$



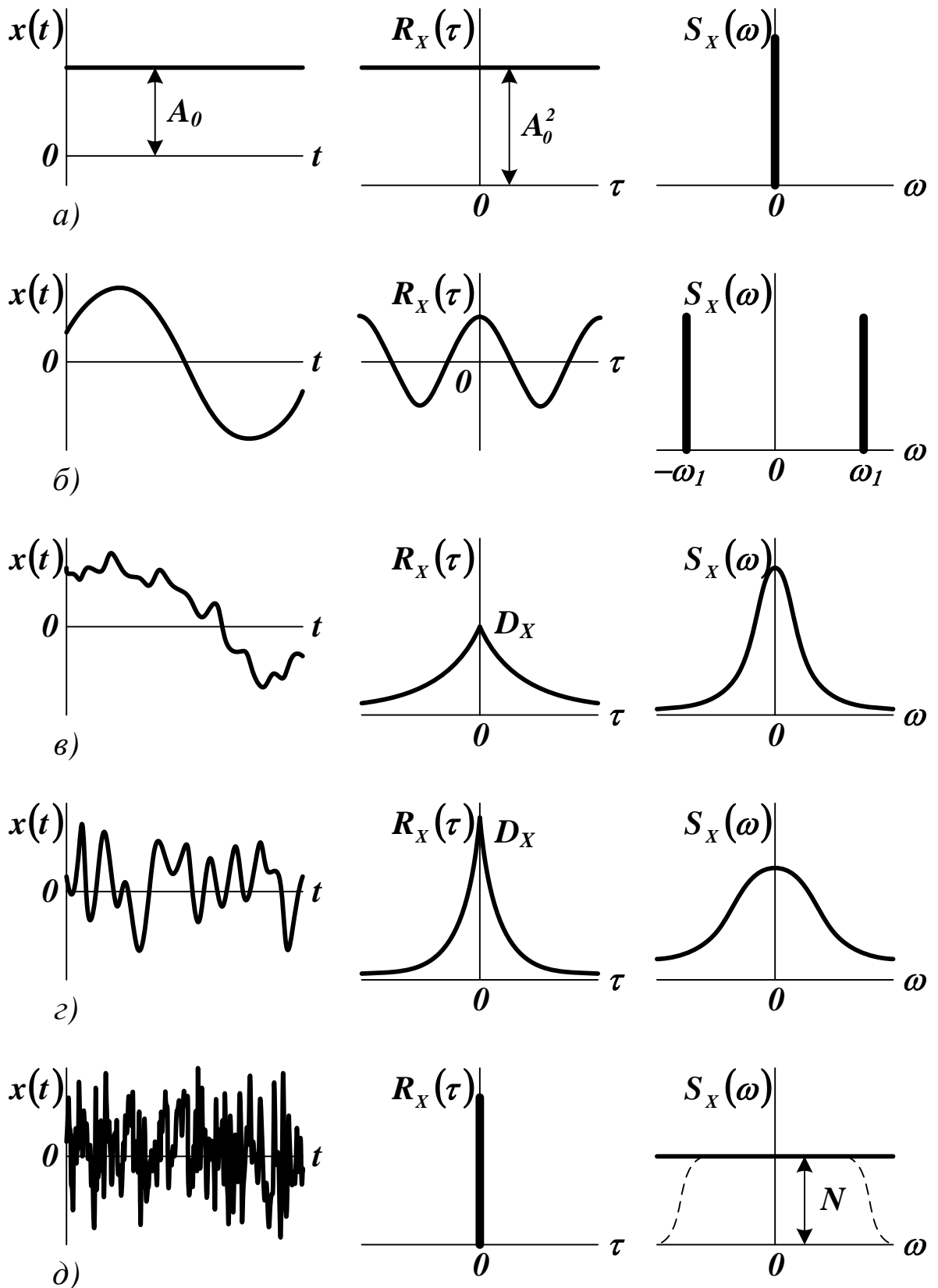


Рисунок 2.5 — Корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов различной структуры

Корреляционная функция стационарного случайного процесса, не содержащего периодической составляющей, может быть аппроксимирована выражением вида

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|), \quad (2.31)$$

где α — параметр затухания.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса, содержащего периодическую составляющую, может быть аппроксимирована выражением вида

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau), \quad (2.32)$$

где β — резонансная частота системы.

На рисунке 2.5 (в) и (г) приведены примеры случайных процессов и их корреляционных функций. Очевидно, что с ростом τ связь между сечениями случайного процесса ослабевает. Корреляционная функция, соответствующая процессу с более тонкой структурой (большим значением α), убывает быстрее. Так как для случайного процесса типа белого шума характерно отсутствие взаимосвязи сечениями, его корреляционная функция представляется δ -функцией, расположенной в начале координат (см. рисунок 2.5 (д))

$$R_X(\tau) = N \cdot \delta(\tau), \quad (2.33)$$

где N — некоторая константа.

Статистическая связь двух случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ характеризуется **взаимной корреляционной функцией**, которая для каждой пары произвольно выбранных моментов времени равна

$$\begin{aligned} R_{XG}(t_1, t_2) &= M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{G}(t_2) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t_1)] \cdot [g - m_G(t_2)] \cdot \varpi_2(x, t_1; g, t_2) dx dg. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для эргодических случайных процессов

$$R_{XG}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}] \cdot [g(t + \tau) - \bar{g}] dt, \quad (2.35)$$

где $x(t)$ и $g(t)$ — любые реализации процессов $X(t)$ и $G(t)$.

Центрированные случайные процессы считаются *коррелированными*, если их взаимная корреляционная функция не равна нулю. В противном случае они считаются *некоррелированными*.

Взаимная корреляционная функция не является симметричной относительно своих аргументов, однако справедливо соотношение

$$R_{XG}(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{G}(t_2) \right] = M \left[\overset{\circ}{G}(t_2) \cdot \overset{\circ}{X}(t_1) \right] = R_{GX}(t_2, t_1). \quad (2.36)$$

Если взаимная корреляционная функция двух случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ зависит только от разности своих аргументов, т. е.

$$R_{XG}(t_1, t_2) = R_{XG}(t_2 - t_1) = R_{XG}(\tau), \quad (2.37)$$

то такие процессы считают *стационарно-связанными*. Для стационарно-связанных случайных процессов

$$R_{XG}(\tau) = R_{GX}(-\tau). \quad (2.38)$$

Корреляционная функция суммы двух случайных процессов $Z(t) = X(t) + G(t)$ вычисляется по формуле

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + R_G(t_1, t_2) + R_{XG}(t_1, t_2) + R_{GX}(t_1, t_2). \quad (2.39)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
R_Z(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) + G(t_1)] \cdot [X(t_2) + G(t_2)]\} = \\
&= M[X(t_1) \cdot X(t_2)] + M[G(t_1) \cdot G(t_2)] + \\
&\quad + M[X(t_1) \cdot G(t_2)] + M[G(t_1) \cdot X(t_2)] = \\
&= R_X(t_1, t_2) + R_G(t_1, t_2) + R_{XG}(t_1, t_2) + R_{GX}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

• • •

Корреляционная функция произведения двух некоррелированных случайных процессов $Z(t) = X(t) \cdot G(t)$ находится по соотношению

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \cdot R_G(t_1, t_2). \quad (2.40)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
R_Z(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) \cdot G(t_1)] \cdot [X(t_2) \cdot G(t_2)]\} = \\
&= M[X(t_1) \cdot X(t_2)] \cdot M[G(t_1) \cdot G(t_2)] = R_X(t_1, t_2) \cdot R_G(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

• • •

При решении практических задач часто пользуются нормированными корреляционными функциями

$$\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{D_X}, \quad \rho_{XG}(\tau) = \frac{R_{XG}(\tau)}{\sqrt{D_X \cdot D_G}}. \quad (2.41)$$

Корреляционную функцию можно использовать для выявления полезного периодического полезного сигнала на фоне случайной помехи. Для этого ее определяют при больших значениях τ , когда влияние случайного сигнала сказывается слабо (см. рисунок 2.6, пунктиром показана корреляционная функция помехи).

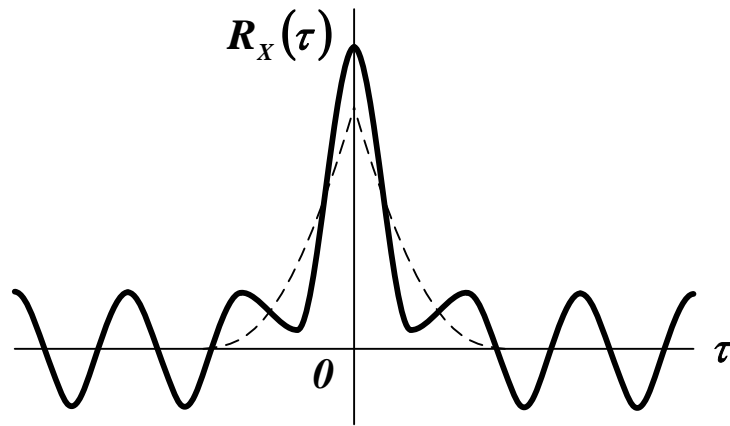


Рисунок 2.6 — Фильтрация полезного периодического сигнала с использованием его корреляционной функции

2.3 Спектральные плотности случайных процессов

Спектральная плотность стационарного случайного процесса определяется как преобразование корреляционной функции по Фурье

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau - j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Так как $R_X(\tau)$ — четная, а $\sin(\omega \cdot \tau)$ — нечетная функция τ , то в (2.42) второй интеграл равен нулю. Учитывая, что $\cos(\omega \cdot \tau)$ — четная функция τ , получаем

$$S_X(\omega) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau.
 \tag{2.43}$$

Если спектральная плотность известна, то с помощью обратного преобразования Фурье можно найти соответствующую ей корреляционную функцию

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

Можно установить важную зависимость статистическими характеристиками случайного процесса

$$D_X = R_X(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega. \tag{2.45}$$

Физический смысл спектральной плотности заключается в том, что она характеризует распределение мощности случайного процесса по частотному спектру.

Доказательство. Если считать $x(t)$ реализацией случайных флуктуаций напряжения на проводнике с сопротивлением **1 Ом**, то, согласно теории электрических колебаний, средняя мощность, рассеиваемая на этом проводнике за время $2 \cdot T$, равна

$$P_{cp} = \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

Если принять $2 \cdot T \rightarrow +\infty$ и использовать формулы (2.28) и (2.44) при $\tau = 0$, то можно записать

$$P_{cp} = R_X(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega.$$

Таким образом, средняя мощность сигнала может быть найдена, как бесконечная сумма элементарных слагаемых $S_X(\omega) d\omega$ в диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, каждая элементарная мощность для частоты ω будет пропорциональна $S_X(\omega)$.

• • •

Пример 2.1. Определение спектральной плотности случайного процесса, корреляционная функция которого находится по соотношению (2.31). Используя формулу (2.42) и учитывая, что $|\tau| = \tau$ при $\tau \geq 0$ и $|\tau| = -\tau$ при $\tau < 0$, запишем

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= D_X \cdot \left\{ \int_{-\infty}^0 \exp[(\alpha - j \cdot \omega) \cdot \tau] d\tau + \int_0^{+\infty} \exp[-(\alpha + j \cdot \omega) \cdot \tau] d\tau \right\} = \\ &= \frac{2 \cdot D_X \cdot \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

• • •

Пример 2.2. Определение спектральной плотности случайного процесса, корреляционная функция которого находится по соотношению (2.32). Используя формулу (2.42) и производя замену

$$\cos(\beta \cdot \tau) = \frac{\exp(-j \cdot \beta \cdot \tau) + \exp(j \cdot \beta \cdot \tau)}{2},$$

запишем

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= \frac{D_X}{2} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha \cdot |\tau| - j \cdot (\omega + \beta) \cdot \tau] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha \cdot |\tau| - j \cdot (\omega - \beta) \cdot \tau] d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Оба интеграла могут быть найдены так же, как и в примере 2.1, после замены $(\omega + \beta)$ и $(\omega - \beta)$ на ω' и ω'' . Тогда

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= D_X \cdot \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega')^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega'')^2} \right] = \\
 &= D_X \cdot \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right].
 \end{aligned}$$

• • •

Основные свойства спектральных плотностей, определяемые свойствами корреляционных функций (см. п. 2.2), следующие.

1) Спектральная плотность случайного процесса является действительной и четной функцией частоты.

Доказательство. Подынтегральное выражение в (2.43) содержит произведение четных функций $R_X(\tau)$ и $\cos(\omega \cdot \tau)$, поэтому будет справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau = \\
 &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} R_X(-\tau) \cdot \cos(-\omega \cdot \tau) d\tau = S_X(-\omega).
 \end{aligned}$$

• • •

2) Спектральная плотность случайного процесса, содержащего постоянную составляющую, будет иметь импульс (δ -функцию) при частоте, равной нулю.

Доказательство. Пусть наблюдаемый процесс представляет собой постоянный сигнал $x(t) = A_0$ (см. рисунок 2.5 (а)). Тогда, используя подход от противного, можно записать

$$S_X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot A_0^2 \cdot \delta(\omega),$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot A_0^2 \cdot \delta(\omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega =$$

$$= A_0^2 \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) \Big|_{\omega=0} = A_0^2$$

График спектральной плотности показывает, что вся мощность постоянного сигнала сосредоточена при нулевой частоте.

• • •

3) Спектральная плотность случайного процесса, содержащего периодическую составляющую с частотой ω_1 , будет иметь импульсы (δ -функции) при частотах $\pm\omega_1$.

Доказательство. Пусть наблюдаемый процесс представляет собой периодический сигнал $x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$ (см. рисунок 2.5 (б)). Тогда, используя подход от противного, можно записать

$$S_X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{A_0^2}{4} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)],$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \pi \cdot \frac{A_0^2}{4} \cdot [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega =$$

$$= \frac{A_0^2}{4} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_1) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + \omega_1) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega \right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{4} \cdot [\exp(j \cdot \omega_1 \cdot \tau) + \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot \tau)] = \frac{A_0^2}{2} \cdot \cos(\omega_1 \cdot \tau).$$

График спектральной плотности показывает, что вся мощность периодического сигнала сосредоточена при двух частотах.

Если наблюдаемый сигнал описывается функцией времени, разлагаемой в ряд Фурье $x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_i)$, то его спек-

тральная плотность будет иметь вид линейчатого спектра с δ -функциями, расположенными на положительных и отрицательных частотах гармоник. Используя полученные ранее результаты, можно записать

$$S_X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \left\{ A_0^2 \cdot \delta(\omega) + \sum_{i=1}^k \frac{A_i^2}{4} \cdot [\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i)] \right\}.$$

• • •

Спектральная плотность случайного процесса, не содержащего периодической составляющей, может быть приближенно представлена выражением

$$S_X(\omega) = \frac{2 \cdot D_X \cdot T_X}{1 + T_X^2 \cdot \omega^2}, \quad (2.46)$$

где T_X — постоянная времени. Такой спектральной плотности соответствует корреляционная функция (2.31).

Примечание. Формуле (2.46) соответствует спектральная плотность, полученная в примере 2.1, если принять $\alpha = 1 / T_X$.

На рисунке 2.5 (в) и (г) приведены примеры спектральных плотностей и корреляционных функций случайных процессов различной структуры. Очевидно, что, чем шире график спектральной плотности, тем уже график соответствующей корреляционной функции. Это соответствует физической сущности процесса (чем более высокие частоты представлены в спектральной плотности, тем выше степень его изменчивости). Спектральная плотность белого шума считается постоянной во всем диапазоне частот (см. рисунок 2.5 (д)).

Доказательство (от противного):

$$R_X(\tau) = N \cdot \delta(\tau),$$

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} N \cdot \delta(\tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = N \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) \Big|_{\tau=0} = N.$$

• • •

Постоянство спектральной плотности белого шума во всем диапазоне частот формально означает, что его энергия распределена по всему спектру равномерно, а суммарная энергия процесса равна бесконечности. Это указывает на *невозможность физической реализации белого шума*.

Примечание. Если спектральную плотность сигнала можно считать постоянной в достаточно широком частотном диапазоне, а границы этого диапазона находятся вне полосы частот пропускающей системы, то идеализация такого сигнала в виде белого шума вполне целесообразна.

Взаимная спектральная плотность двух стационарных случайных процессов $X(t)$ и $G(t)$ определяется как преобразование взаимной корреляционной функции по Фурье

$$S_{XG}(j \cdot \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XG}(\tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau. \quad (2.47)$$

В отличие от спектральной плотности $S_X(\omega)$ взаимная спектральная плотность $S_{XG}(j \cdot \omega)$ действительной и четной функцией частоты не является.

Если процессы $X(t)$ и $G(t)$ некоррелированные, а их средние значения равны нулю, то их взаимная спектральная плотность также равна нулю.

На практике часто используют нормированную спектральную плотность, имеющую размерность времени, которая является преобразованием нормированной корреляционной функции по Фурье

$$\beta_X = \frac{S_X(\omega)}{D_X}, \quad \beta_{XG}(\omega) = \frac{S_{XG}(\omega)}{\sqrt{D_X \cdot D_G}}. \quad (2.48)$$

Спектральную плотность можно использовать для выявления полезного периодического сигнала на фоне случайной помехи. Присутствие периодической составляющей обнаруживается по всплескам на графике спектральной плотности (см. рисунок 2.7).

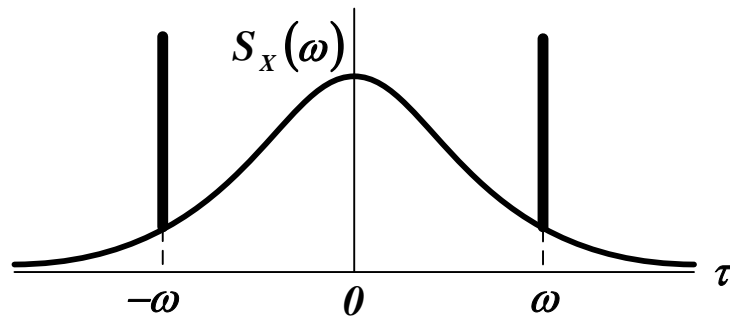


Рисунок 2.7 — Фильтрация полезного периодического сигнала с помощью его спектральной плотности

2.4 Экспериментальное определение статистических характеристик

Экспериментальные методы определения статистических характеристик основаны на том, что при достаточно большом числе испытаний вероятность события можно заменить его относительной частотой, а математическое ожидание случайных величин — их средним арифметическим. Статистические характеристики, полученные путем обработки результатов такого эксперимента, называют *оценками* истинных статистических характеристик.

На практике число испытаний всегда ограничено. В таких условиях относительная частота и среднее арифметическое могут считаться случайными величинами, поэтому оценки статистических характеристик определяются с некоторой ошибкой.

Пусть ξ — искомая статистическая характеристика, а $\hat{\xi}$ — ее оценка. Тогда ошибка в определении ξ определится, как $\varepsilon = \hat{\xi} - \xi$. Так как эта ошибка является случайной, то в качестве меры точности определения статистических характеристик можно принять математическое ожидание и дисперсию ошибки

$$M[\varepsilon] = M[\hat{\xi}] - \xi, \quad D[\varepsilon] = D[\hat{\xi}] \quad (2.49)$$

Примечание. Искомая характеристика ξ является неизвестной, но не случайной, поэтому $M[\xi] = \xi$ и $D[\xi] = 0$.

Если математическое ожидание ошибки ε равно нулю, то оценку $\hat{\xi}$ называют *несмещенной*. В противном случае она считается *смещенной* оценкой.

Пусть имеется выборка экспериментальных данных, полученная путем наблюдения за случайной величиной x с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x . Данные получены в n независимых испытаниях, проводимых в одинаковых условиях.

Используя частотный подход, аналог **функции распределения** случайной величины x можно найти по формуле

$$\hat{F}_x(\xi) = \sum_{i=1}^{\mu(\xi)} \frac{1}{n}, \quad (2.50)$$

где $\mu(\xi)$ — число элементов в выборке, для которых $x_i < \xi$.

Примечание. Для $x > x_{max}$ значение $\hat{F}_x(\xi)$ равно 1. Если $n \rightarrow +\infty$, то $\hat{F}_x(\xi) \rightarrow F_x(\xi)$.

Аналог **плотности вероятности** случайной величины x может быть найден по формуле

$$\hat{w}_x(\xi) = \sum_{i=1}^{\eta(\xi)} \frac{1}{n}, \quad (2.51)$$

где $\eta(\xi)$ — число элементов в выборке, для которых выполняется условие $\xi - \frac{\Delta}{2} \leq x_i < \xi + \frac{\Delta}{2}$. Ширину интервала Δ находят, как

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}, \quad (2.52)$$

где k — число интервалов (квантов), на которое разбивается область значений x , определяемое по оценочной формуле

$$k = 1 + 3,2 \cdot \lg(n). \quad (2.53)$$

Оценкой **математического ожидания** случайной величины x может служить среднее арифметическое ее реализаций,

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.54)$$

Ошибка оценки m_x равна

$$\varepsilon = \hat{m}_x - m_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - m_x. \quad (2.55)$$

Характеристики ошибки

$$m_\varepsilon = M \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - m_x \right] = 0, \quad D_\varepsilon = D \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - m_x \right] = \frac{D_x}{n}, \quad (2.56)$$

показывают, что среднее арифметическое реализаций x является несмещенной оценкой ее математического ожидания, а дисперсия ошибки этой оценки неограниченно убывает с ростом n .

Оценка **дисперсии** может быть найдена по формуле

$$\hat{D}_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)^2. \quad (2.57)$$

Примечание. На практике для оценки дисперсии бывает удобно использовать соотношение

$$\hat{D}_x = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{m}_x^2 \right]. \quad (2.58)$$

Оценка \hat{D}_x является несмещенной оценкой дисперсии при любом распределении случайной величины x .

Статистические характеристики неэргодического случайного процесса $X(t)$ могут быть найдены по множеству его реализаций $x_i(t)$, где $i = 1, \dots, n$. Их значения определяются для моментов времени t_j , где $j = 1, \dots, q$.

Примечание. Моменты времени t_j целесообразно выбирать равноотстоящими. Период наблюдений целесообразно выбирать из условия удовлетворительного воспроизведения реализаций $x_i(t)$ по экспериментальным точкам.

Оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции случайного процесса $X(t)$ вычисляются по формулам

$$\hat{m}_X(t_j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i(t_j), \quad (2.59)$$

$$\hat{D}_X(t_j) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_X(t_j)]^2, \quad (2.60)$$

$$\hat{R}_X(t_j, t_k) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_X(t_j)] \cdot [x_i(t_k) - \hat{m}_X(t_k)], \quad (2.61)$$

где $j, k = 1, \dots, q$.

Примечание. На практике для оценки дисперсии и корреляционной функции бывает удобно использовать соотношения

$$\hat{D}_X(t_j) = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i(t_j)^2 - \hat{m}_X(t_j)^2 \right], \quad (2.62)$$

$$\hat{R}_X(t_j, t_k) = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i(t_j) \cdot x_i(t_k) - \hat{m}_X(t_j) \cdot \hat{m}_X(t_k) \right]. \quad (2.63)$$

Статистические характеристики эргодического случайного процесса $X(t)$ могут быть найдены по его единственной реализации $x(t)$, наблюдаемой в течение достаточно длительного положительного промежутка времени T . Для оценки математического ожидания (среднего по времени) и корреляционной функции можно использовать формулы (2.19) и (2.28), представленные в виде

$$\hat{m}_X = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt, \quad (2.64)$$

$$\hat{R}_X(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \cdot \int_0^{T-\tau} [x(t) - \hat{m}_X] \cdot [x(t+\tau) - \hat{m}_X] dt. \quad (2.65)$$

Примечание. Уменьшение в (2.65) интервала T на величину τ объясняется тем, что значения $x(t+\tau)$ известны только до момента времени $t = T - \tau$.

Промежуток времени наблюдения T должен быть разбит на n равных интервалов $\Delta = T/n$ так, чтобы за время Δ функция $x(t)$ изменялась незначительно (см. рисунок 2.8). Чем больше T и чем меньше Δ , тем точнее оценка статистических характеристик.

Параметрам t и τ придаются дискретные значения

$$\begin{aligned} t_i &= i \cdot \Delta, \quad i = 1, 2, \dots \\ \tau_j &= j \cdot \Delta, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

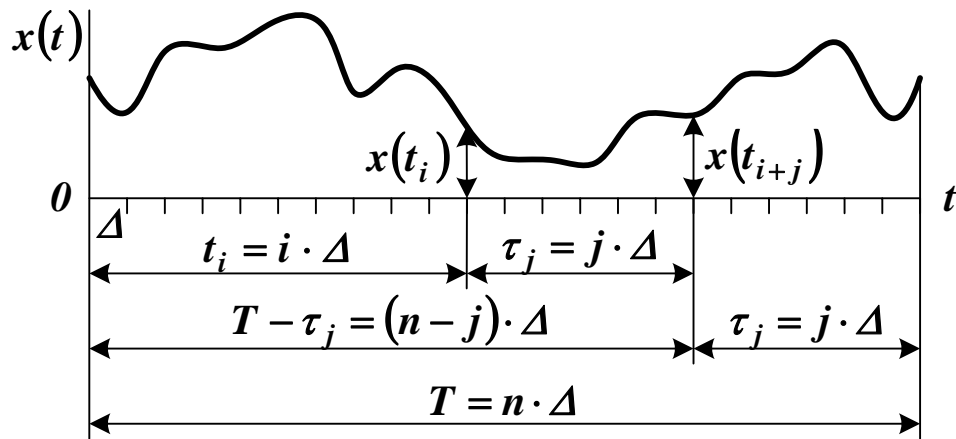


Рисунок 2.8 — Определение корреляционной функции по экспериментальным данным

При сделанных допущениях интегралы в формулах (2.64) и (2.65) могут быть приближенно заменены суммами

$$\hat{m}_X = \frac{\Delta}{T} \cdot \sum_{i=1}^n x(t_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x(t_i), \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_X(\tau_j) &= \hat{R}_X\left(\frac{j \cdot \Delta}{n}\right) = \frac{\Delta}{T - j \cdot \Delta} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} [x(t_i) - \hat{m}_X] \cdot [x(t_{i+j}) - \hat{m}_X] = \\ &= \frac{1}{n - j} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} [x(t_i) - \hat{m}_X] \cdot [x(t_i + \tau_j) - \hat{m}_X] \end{aligned} \quad (2.68)$$

Вычисления по формуле (2.68) выполняются до таких значений j , при которых $\hat{R}_X(\tau_j)$ начинает совершать небольшие нерегулярные колебания относительно нуля. Для получения ошибки не более 2% желательно, чтобы выполнялось условие $j \leq 0,1 \cdot n$.

Дисперсию D_X можно оценить по (2.68) при $\tau = 0$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что считается случайным процессом? Что называется реализацией и сечением случайного процесса?
2. Какие случайные процессы считаются марковскими, эргодическими, стационарными, центрированными?
3. Что показывают функция распределения и плотность вероятности? Какие основные виды распределений существуют?
4. Что характеризует среднее по множеству, среднее по времени, дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайного процесса?
5. Что характеризует корреляционная функция случайного процесса? Каков ее физический смысл? Каковы свойства корреляционных функций?
6. Что характеризует взаимная корреляционная функция двух случайных процессов? Каковы свойства взаимных корреляционных функций? Какие случайные процессы считаются коррелированными, некоррелированными, стационарно-связанными?
7. Как можно использовать корреляционную функцию для фильтрации полезного сигнала?
8. Что характеризует спектральная плотность случайного процесса? Каков ее физический смысл? Каковы свойства спектральных плотностей?
9. Что характеризует взаимная спектральная плотность двух случайных процессов?
10. Как можно использовать спектральную плотность для фильтрации полезного сигнала?
11. Какой случайный процесс называется белым шумом? Каковы его основные свойства?
12. Как определить статистические характеристики случайного процесса экспериментально?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Для стационарного случайного процесса $X(t)$, имеющего постоянную спектральную плотность $S_X(\omega) = N$ в диапазоне частот от $-\omega_1$ до $+\omega_1$ определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

2.2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$, имеющего математическое ожидание $m_X = 5$, равна

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) + m_X^2 = 100 \cdot \exp(-5 \cdot |\tau|) + 25.$$

Определить спектральную плотность этого процесса.

2.3. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$, имеющего математическое ожидание $m_X = 5$, равна

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \left[\cos(\beta \cdot \tau) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \sin(\beta \cdot \tau) \right].$$

Определить спектральную плотность этого процесса.

2.4. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ является кусочно-непрерывной

$$R_X(\tau) = \begin{cases} D_X \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Определить спектральную плотность этого процесса.

2.5. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна $R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot \tau^2)$. Определить спектральную плотность этого процесса.

3 АНАЛИЗ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

3.1 Преобразование случайных сигналов линейной системой

Пусть имеется одномерная линейная система, на вход которой поступает случайный процесс $G(t)$, имеющий математическое ожидание $m_G(t)$ и корреляционную функцию $R_G(t_1, t_2)$. Система преобразует его в выходной случайный процесс $X(t)$, статистические характеристики которого требуют определения. Совокупность преобразований, которые необходимо выполнить над реализацией $G(t)$, чтобы получить реализацию $X(t)$, определяет *оператор системы* $\Omega^{(t)}\{ \}$ (верхний индекс указывает на аргумент, по которому применяется оператор). Преобразование входного случайного процесса с помощью такого оператора можно определить, как

$$X(t) = \Omega^{(t)}\{G(t)\}. \quad (3.1)$$

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ находится с учетом переместительности линейных операторов M и $\Omega^{(t)}$, как результат преобразования

$$m_X(t) = M[\Omega^{(t)}\{G(t)\}] = \Omega^{(t)}\{m_G(t)\}. \quad (3.2)$$

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ находится также с учетом переместительности операторов M и $\Omega^{(t)}$, как результат двойного преобразования

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right] = M\left[\Omega^{(t_1)}\left\{\overset{\circ}{G}(t_1)\right\} \cdot \Omega^{(t_2)}\left\{\overset{\circ}{G}(t_2)\right\}\right] = \\ &= \Omega^{(t_1)}\Omega^{(t_2)}\left\{M\left[\overset{\circ}{G}(t_1) \cdot \overset{\circ}{G}(t_2)\right]\right\} = \Omega^{(t_1)}\Omega^{(t_2)}\{R_G(t_1, t_2)\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Примечание. Порядок выполнения преобразований в (3.3) не имеет значения.

Пример 3.1. Определение математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса на выходе суммирующего звена. Будем считать, что на вход такого звена поступают n случайных процессов $G_i(t)$, имеющих математические ожидания $m_{G_i}(t)$ и корреляционные функции $R_{G_i G_j}(t_1, t_2)$, где $i, j = 1, \dots, n$. Каждой операции преобразования соответствует оператор $\Omega_i^{(t)}\{ \} = I\{ \}$. Тогда после суммирования

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^n I\{m_{G_i}(t)\} = \sum_{i=1}^n m_{G_i}(t),$$

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I\{I\{R_{G_i G_j}(t_1, t_2)\}\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{G_i G_j}(t_1, t_2). \quad (3.4)$$

В частном случае, когда входные сигналы являются некоррелированными случайными процессами,

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{G_i}(t_1, t_2). \quad (3.5)$$

• • •

Пример 3.2. Определение математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса на выходе усилительного звена. Такое звено выполняет операцию преобразования $X(t) = c(t) \cdot G(t)$ (где $c(t)$ — неслучайная функция), которой соответствует оператор $\Omega^{(t)}\{ \} = c(t) \cdot \{ \}$. Тогда

$$m_X(t) = c(t) \cdot m_G(t),$$

$$R_X(t_1, t_2) = c(t_1) \cdot c(t_2) \cdot R_G(t_1, t_2). \quad (3.6)$$

• • •

Пример 3.3. Определение математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса на выходе дифференцирующего звена. Для такого звена оператор $\Omega^{(t)}\{ \} = \frac{d}{dt}\{ \}$. Тогда

$$m_X(t) = \frac{d}{dt} m_G(t),$$

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} R_G(t_1, t_2).$$
(3.7)

• • •

Пример 3.4. Определение математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса на выходе интегрирующего звена. Для такого звена оператор $\Omega^{(t)}\{ \} = \int_{t_0}^t \{ \} d\lambda$. Тогда

$$m_X(t) = \int_{t_0}^t m_G(\lambda) d\lambda,$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} R_G(\lambda, \mu) d\lambda d\mu.$$
(3.8)

• • •

3.2 Статистические характеристики случайных процессов на выходе линейной системы во временной области

Пусть имеется устойчивая **стационарная линейная система**, для которой известна импульсная переходная характеристика (или *весовая функция*) $k(t)$ (см. рисунок 3.1). Функция $k(t)$ должна удовлетворять *условию физической реализуемости системы*

$$k(t) = 0, \text{ если } t < 0. \quad (3.9)$$

Условие (3.9) определяет, что реакция системы не может наступить раньше момента поступления входного сигнала

На вход системы подается случайный процесс $G(t)$ с математическим ожиданием $m_G(t)$ и корреляционной функцией $R_G(t_1, t_2)$. Он преобразуется в выходной случайный процесс $X(t)$ (см. рисунок 3.1), для которого требуется определить статистические характеристики.

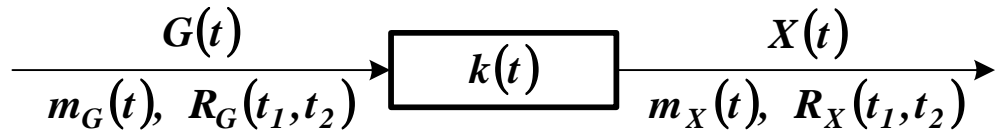


Рисунок 3.1 — Линейная система с весовой функцией $k(t)$, находящаяся под влиянием случайного воздействия

Связь между реализациями случайных процессов на входе и выходе системы устанавливается на основании формулы свертки

$$X(t) = \int_{t_0}^t k(t - \mu) \cdot G(\mu) d\mu = \int_0^{t-t_0} k(\lambda) \cdot G(t - \lambda) d\lambda, \quad (3.10)$$

где τ и $\lambda = t - \mu$ — независимые параметры интегрирования. Формула (3.10) определяет оператор системы $\Omega^{(t)}\{ \cdot \} = \int_0^{t-t_0} k(\lambda) \cdot \{ \cdot \} d\lambda$. Ис-

пользуя правила (3.2) и (3.3), можно записать

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_0^{t-t_0} k(\lambda) \cdot m_G(t - \lambda) d\lambda, \\ R_X(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1-t_0} \int_0^{t_2-t_0} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(t_1 - \lambda, t_2 - \mu) d\lambda d\mu, \\ D_X(t) &= \int_0^{t-t_0} \int_0^{t-t_0} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(t - \lambda, t - \mu) d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если $G(t)$ — стационарный случайный процесс, то $m_G = \text{const}$, а R_G зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$. Тогда

$$m_X(t) = m_G \cdot \int_0^{t-t_0} k(\lambda) d\lambda,$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_1-t_0} \int_0^{t_2-t_0} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(t_2 - t_1 + \lambda - \mu) d\lambda d\mu, \quad (3.12)$$

$$D_X(t) = \int_0^{t-t_0} \int_0^{t-t_0} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(\lambda - \mu) d\lambda d\mu.$$

Формулы (3.12) показывают, что случайный процесс $X(t)$ на выходе устойчивой стационарной линейной системы в переходном режиме будет нестационарным, даже если свойствами стационарности обладает входной случайный процесс $G(t)$

В установившемся режиме при $t_0 \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$)

$$m_X = m_G \cdot \int_0^{+\infty} k(\lambda) d\lambda = \text{const},$$

$$R_X(\tau) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu, \quad (3.13)$$

$$D_X = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(\lambda - \mu) d\lambda d\mu = \text{const}.$$

Формулы (3.13) показывают, что случайный процесс $X(t)$ на выходе устойчивой стационарной линейной системы в установившемся режиме будет стационарным, если свойствами стационарности обладает входной случайный процесс $G(t)$.

Если система является **нестационарной**, то ее весовая функция будет зависеть не только от времени наблюдения t , но и от времени поступления единичного импульса на вход системы λ . Условие физической реализуемости системы примет вид

$$k(t, \lambda) = 0, \text{ если } t < \lambda. \quad (3.14)$$

Связь между реализациями случайных процессов на входе и выходе системы определяет соотношение, аналогичное (3.10),

$$X(t) = \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot G(\lambda) d\lambda. \quad (3.15)$$

В этом случае оператор системы $\Omega^{(t)}\{ \} = \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot \{ \} d\lambda$. На основании правил (3.2) и (3.3)

$$m_X(t) = \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot m_G(\lambda) d\lambda,$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} k(t_1, \lambda) \cdot k(t_2, \mu) \cdot R_G(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \quad (3.16)$$

$$D_X(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k(t_1, \lambda) \cdot k(t_2, \mu) \cdot R_G(\lambda, \mu) d\lambda d\mu.$$

Если в (3.16) принять $t_0 \rightarrow -\infty$, то можно получить соответствующие формулы для определения статистических характеристик в установившемся режиме (если он существует).

Формулы (3.16) показывают, что *случайный процесс $X(t)$ на выходе нестационарной линейной системы всегда будет нестационарным, независимо от характера входного случайного процесса $G(t)$.*

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что нестационарность процесса на выходе линейной системы определяется как минимум одной из трех причин:

- нестационарность входного случайного процесса; тогда для стационарной системы в установившемся режиме

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(t_1 - \lambda, t_2 - \mu) d\lambda d\mu;$$

- нестационарность режима работы; тогда для стационарной системы и стационарного входного случайного процесса

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{t_1-t_0} \int_0^{t_2-t_0} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(t_2 - t_1 + \lambda - \mu) d\lambda d\mu;$$

- нестационарность системы; тогда

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} k(t_1, \lambda) \cdot k(t_2, \mu) \cdot R_G(\lambda, \mu) d\lambda d\mu.$$

Пример 3.5. Определение статистических характеристик случайного процесса на выходе системы с весовой функцией $k(t) = \exp(-t)$, на вход которой поступает центрированный случайный процесс с единичной дисперсией и корреляционной функцией $R_G(\tau) = \exp(-|\tau|)$.

Для определения корреляционной функции выходного случайного процесса в установившемся режиме воспользуемся формулами (3.13)

$$R_X(\tau) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda) \cdot \exp(-\mu) \cdot \exp(-|\tau + \lambda - \mu|) d\lambda d\mu.$$

Дисперсия выходного случайного процесса в переходном режиме находится по формулам (3.12). Примем $t_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} D_X(t) &= \int_0^t \int_0^t \exp(-\lambda) \cdot \exp(-\mu) \cdot \exp(-|\lambda - \mu|) d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^t \exp(-\lambda) \cdot \left[\int_0^t \exp(-\mu) \cdot \exp(-|\lambda - \mu|) d\mu \right] d\lambda. \end{aligned}$$

При расчете внутреннего интеграла учтем

$$\exp(-|\lambda - \mu|) = \begin{cases} \exp(\mu - \lambda), & \mu < \lambda, \\ \exp(\lambda - \mu), & \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp(-\mu) \cdot \exp(-|\lambda - \mu|) d\mu = \\ &= \int_0^\lambda \exp(-\mu) \cdot \exp(\mu - \lambda) d\mu + \int_\lambda^t \exp(-\mu) \cdot \exp(\lambda - \mu) d\mu = \\ &= \exp(-\lambda) \cdot \int_0^\lambda d\mu + \exp(\lambda) \cdot \int_\lambda^t \exp(-2 \cdot \mu) d\mu = \\ &= \lambda \cdot \exp(-\lambda) - \frac{1}{2} \cdot \exp(\lambda) \cdot [\exp(-2 \cdot t) - \exp(-2 \cdot \lambda)] = \\ &= \lambda \cdot \exp(-\lambda) - \frac{1}{2} \cdot \exp(\lambda - 2 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-\lambda). \end{aligned}$$

Подставим найденное значение внутреннего интеграла в выражение для определения дисперсии

$$\begin{aligned} D_X(t) &= \int_0^t \exp(-\lambda) \cdot \left[\lambda \cdot \exp(-\lambda) - \frac{1}{2} \cdot \exp(\lambda - 2 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-\lambda) \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \exp(-2 \cdot t) - t \cdot \exp(-2 \cdot t). \end{aligned}$$

В установившемся режиме при $t \rightarrow +\infty$, $D_X = 1/2$.

• • •

Если на систему подается несколько случайных процессов, то характеристики выходного процесса могут быть определены по принципу суперпозиции с использованием формул (3.4) и (3.5).

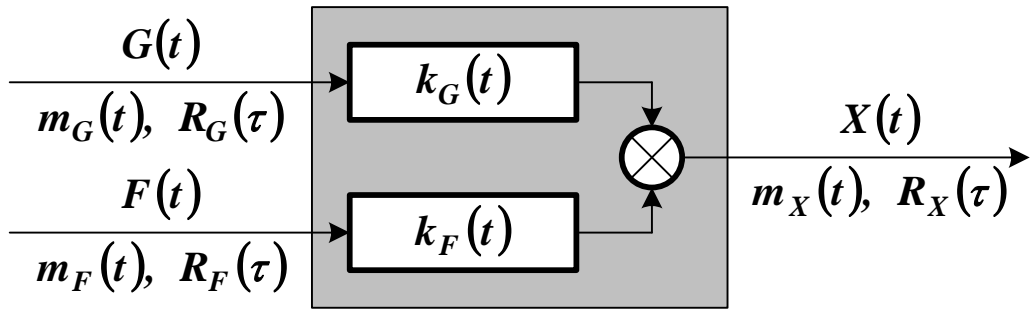


Рисунок 3.2 — Система, находящаяся под влиянием двух случайных воздействий

Пример 3.6. Определение корреляционной функции случайного процесса $X(t)$ на выходе стационарной линейной системы, на вход которой подаются два центрированных стационарных случайных процесса $G(t)$ и $F(t)$ (см. рисунок 3.2) с корреляционными функциями $R_G(\tau)$ и $R_F(\tau)$. Реакцию системы по каждому входу определяют весовые функции $k_G(t)$ и $k_F(t)$

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ в установившемся режиме может быть найдена по формулам (3.4) и (3.13)

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) = & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_G(\lambda) \cdot k_G(\mu) \cdot R_G(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu + \\
 & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_G(\lambda) \cdot k_F(\mu) \cdot R_{GF}(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu + \\
 & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_F(\lambda) \cdot k_G(\mu) \cdot R_{FG}(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu + \\
 & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_F(\lambda) \cdot k_F(\mu) \cdot R_F(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu.
 \end{aligned}$$

Если входные процессы статистически независимы, то

$$R_X(\tau) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_G(\lambda) \cdot k_G(\mu) \cdot R_G(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu + \\ + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k_F(\lambda) \cdot k_F(\mu) \cdot R_F(\tau + \lambda - \mu) d\lambda d\mu.$$

• • •

3.3 Статистические характеристики случайных процессов на выходе линейной системы в частотной области

Пусть имеется устойчивая стационарная линейная система, для которой известна передаточная функция $W(s)$ комплексной переменной s (см. рисунок 3.3). На вход системы подается случайный процесс $G(t)$ со спектральной плотностью $S_G(\omega)$. Он преобразуется в выходной случайный процесс $X(t)$, для которого требуется определить статистические характеристики.

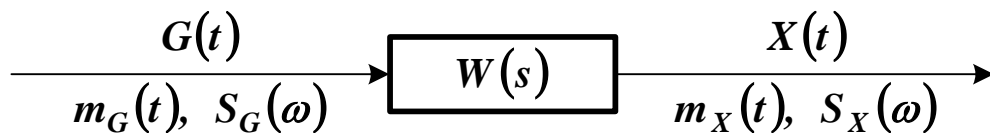


Рисунок 3.3 — Линейная система с передаточной функцией $W(s)$, находящаяся под влиянием случайного воздействия

В подобных условиях выходной случайный процесс будет обладать свойствами стационарности. Наибольший практический интерес представляет определение его статистических характеристик *в установившемся режиме*.

Математическое ожидание $X(t)$ в установившемся режиме может быть найдено по формуле

$$m_X(t) = \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot m_G(t - \lambda) d\lambda. \quad (3.17)$$

Разложим $m_G(t - \lambda)$ в ряд Тейлора

$$m_G(t - \lambda) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \cdot \frac{m_G^{(i)}(t)}{i!} \cdot \lambda^i. \quad (3.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \cdot \frac{m_G^{(i)}(t)}{i!} \cdot \lambda^i d\lambda = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m_G^{(i)}(t)}{i!} \cdot (-1)^i \cdot \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \lambda^i d\lambda. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Весовая и передаточная функции системы связаны соотношением

$$W(s) = \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \exp(-s \cdot \lambda) d\lambda. \quad (3.20)$$

Дифференцируя (3.20) по s нужное число раз, определим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} W(s) &= - \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \lambda \cdot \exp(-s \cdot \lambda) d\lambda, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} W(s) &= \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \lambda^2 \cdot \exp(-s \cdot \lambda) d\lambda, \\ &\dots \\ W^{(i)}(s) &= (-1)^i \cdot \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \lambda^i \cdot \exp(-s \cdot \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Принимая в (3.21) $s = 0$, получим

$$W^{(i)}(0) = (-1)^i \cdot \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \lambda^i d\lambda. \quad (3.22)$$

Подставив (3.22) в (3.19), найдем

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m_G^{(i)}(t)}{i!} \cdot W^{(i)}(0) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m_G^{(i)}(t)}{i!} \cdot \left. \frac{\partial^i W(s)}{\partial s^i} \right|_{s=0}. \quad (3.23)$$

Примечание. Формулой (3.23) можно пользоваться как для стационарного, так и для нестационарного входного случайного процесса. Необходимо, чтобы функция $m_G(t - \lambda)$ раскладывалась в ряд Тейлора, сходящийся при всех значениях аргумента, а передаточная функция $W(s)$ дифференцировалась требуемое число раз.

Формула (3.23) определяет следующий оператор системы

$$\Omega^{(t)}\{ \} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{W^{(i)}(0)}{i!} \cdot \frac{d^i}{dt^i} \{ \}. \quad (3.24)$$

Спектральная плотность случайного процесса $X(t)$ может быть определена по его корреляционной функции с использованием формулы (1.42). Учитывая (3.13), можно записать

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(\tau + \lambda - \mu) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\lambda d\mu d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot R_G(\tau + \lambda - \mu) \cdot \exp[-j \cdot \omega \cdot (\tau + \lambda - \mu)] \times \\ &\quad \times \exp(j \cdot \omega \cdot \lambda) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \mu) d\lambda d\mu d\tau = \\ &= \left\{ \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \lambda) d\lambda \right\} \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} k(\mu) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \mu) d\mu \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R_G(\tau + \lambda - \mu) \cdot \exp[-j \cdot \omega \cdot (\tau + \lambda - \mu)] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 W(-j \cdot \omega) &= \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \lambda) d\lambda, \\
 W(j \cdot \omega) &= \int_0^{+\infty} k(\mu) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \mu) d\mu,
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

$$S_G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_G(\tau + \lambda - \mu) \cdot \exp[-j \cdot \omega \cdot (\tau + \lambda - \mu)] d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= W(-j \cdot \omega) \cdot W(j \cdot \omega) \cdot S_G(\omega) = \\
 &= |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) = A^2(\omega) \cdot S_G(\omega),
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

где $A^2(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика системы.

Корреляционную функцию случайного процесса на выходе системы можно найти по формуле (1.44) с учетом (3.27)

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Дисперсию случайного процесса $X(t)$ можно определить по формуле (3.28)

$$\begin{aligned}
 D_X = R_X(0) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Примечание. Расчет дисперсии выходного случайного процесса в установившемся режиме через спектральную плотность системы по формуле (3.29) значительно проще, чем аналогичное определение этого же параметра через корреляционную функцию системы по

формуле (3.13). Кроме того, в этом случае дисперсия (как и спектральная плотность) может быть представлена как функция параметров системы (импульсная переходная характеристика, как правило, явно через параметры системы не выражается).

Если $W(j \cdot \omega)$ и $S_G(\omega)$ являются дробно-рациональными функциями ω , то задача определения дисперсии по формуле (3.29) сводится к вычислению стандартных интегралов вида

$$J_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(j \cdot \omega)}{A_n(j \cdot \omega) \cdot A_n(-j \cdot \omega)} d\omega, \quad (3.30)$$

где полиномы $A_n(j \cdot \omega)$ и $B_n(j \cdot \omega)$ равны

$$\begin{aligned} A_n(j \cdot \omega) &= a_0 \cdot (j \cdot \omega)^n + a_1 \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \dots + a_n, \\ B_n(j \cdot \omega) &= b_0 \cdot (j \cdot \omega)^{2 \cdot n-2} + b_1 \cdot (j \cdot \omega)^{2 \cdot n-4} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Полином $B_n(j \cdot \omega)$ содержит только четные степени мнимой частоты. Для устойчивой системы полином $A_n(j \cdot \omega)$ имеет все корни, расположенные в левой полуплоскости $j \cdot \omega$. Интеграл (3.30) при любом n вычисляется по формуле

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot a_0} \cdot \frac{U_n}{\Delta_n}, \quad (3.32)$$

где Δ_n — старший определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома $A_n(j \cdot \omega)$, U_n — определитель Δ_n , в котором первая строка заменена коэффициентами полинома $B_n(j \cdot \omega)$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad U_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.33)$$

Таблица значений стандартных интегралов J_n приведена в приложении А.

Пример 3.7. Определение статистических характеристик случайного процесса на выходе системы с передаточной функцией $W(s) = (s + 1)/(s^2 + s + 1)$, на вход которой поступает центрированный случайный процесс с единичной дисперсией и спектральной плотностью $S_G(\omega) = 1/(1 + \omega^2)$.

Спектральная плотность случайного процесса на выходе системы находится по уравнению (3.27)

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) = \left| \frac{(j \cdot \omega)^2 + 1}{(j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2} = \\ &= \left| \frac{(j \cdot \omega)^2 + 1}{(j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot \frac{1}{|1 + (j \cdot \omega)|^2} = \\ &= \left| \frac{(j \cdot \omega)^2 + 1}{(j \cdot \omega)^3 + 2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 2 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 = \\ &= \frac{(1 - \omega^2)^2}{(1 - 2 \cdot \omega^2)^2 + \omega \cdot (2 - \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Дисперсия случайного процесса на выходе системы в установившемся режиме находится по уравнению (3.29)

$$\begin{aligned}
 D_X &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(j \cdot \omega)^2 + 1}{(j \cdot \omega)^3 + 2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 2 \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(j \cdot \omega)^4 + 1}{\left| (j \cdot \omega)^3 + 2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 2 \cdot (j \cdot \omega) + 1 \right|^2} d\omega.
 \end{aligned}$$

В данном случае $n = 3$. Коэффициенты полиномов $A_3(j \cdot \omega)$ и $B_3(j \cdot \omega)$ равны

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1,$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Значения определителей находятся по формуле (3.33)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$U_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Значение дисперсии в установившемся режиме находится по формуле (3.32)

$$D_X = \frac{(-1)^{3+1}}{2 \cdot a_0} \cdot \frac{U_3}{\Delta_3} = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

• • •

Интеграл (3.29) может быть определен численно по приближенной формуле

$$D_X \approx \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\tilde{\omega}} S_X(\omega) d\omega, \quad (3.34)$$

где частота $\tilde{\omega}$ выбирается так, чтобы в диапазоне $[0, \tilde{\omega}]$ сосредотачивалась основная часть мощности сигнала (до 90%). Схема численного определения дисперсии показана на рисунке 3.4.

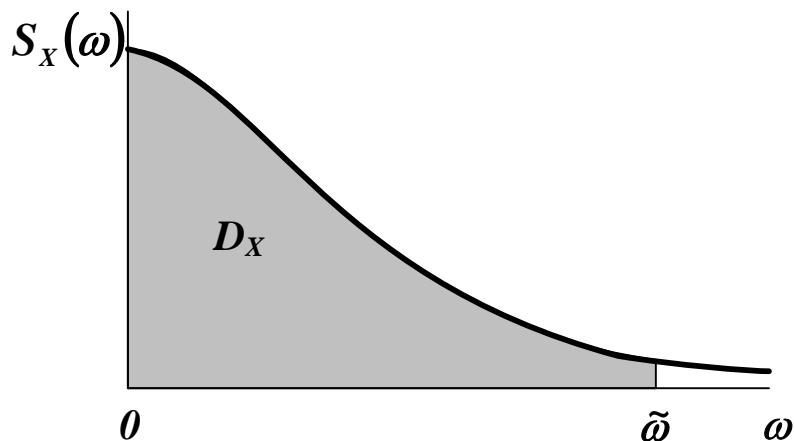


Рисунок 3.4 — Численное определение дисперсии

Если на систему подается несколько случайных процессов $G_i(t)$ с взаимными спектральными плотностями $S_{G_i G_j}(j \cdot \omega)$, то спектральная плотность выходного процесса может быть определена по принципу суперпозиции

$$S_X(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{G_i}(-j \cdot \omega) \cdot W_{G_j}(j \cdot \omega) \cdot S_{G_i G_j}(j \cdot \omega). \quad (3.35)$$

Если входные случайные процессы статистически независимы, то выражение (3.34) примет вид

$$S_X(\omega) = \sum_{i=1}^n |W_{G_i}(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_{G_i}(\omega). \quad (3.36)$$

Пример 3.8. Определение спектральной плотности случайного процесса $X(t)$ на выходе стационарной линейной системы, на вход которой подаются два центрированных случайных процесса $G(t)$ и $F(t)$ (см. рисунок 3.5) со спектральными плотностями $S_G(\omega)$ и $S_F(\omega)$. Реакцию системы по каждому входу определяют передаточные функции $W_G(s)$ и $W_F(s)$

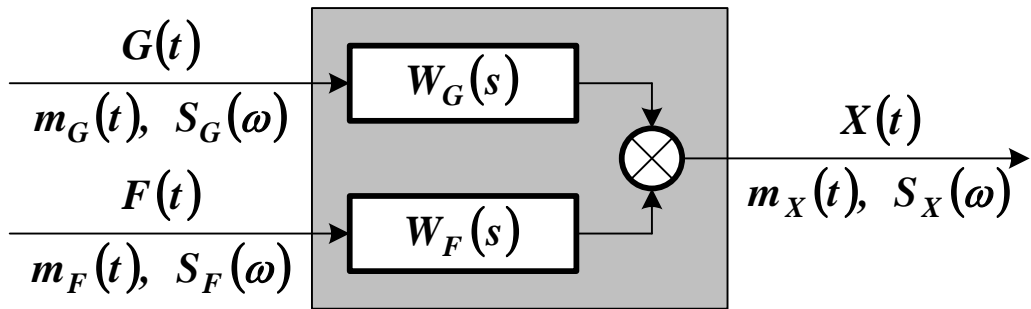


Рисунок 3.5 — Система, находящаяся под влиянием двух случайных воздействий

Связь спектральных плотностей случайных процессов на входе и выходе системы при двух входных воздействиях определяется соотношением

$$S_X(\omega) = |W_G(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) + W_G(-j \cdot \omega) \cdot W_F(j \cdot \omega) \cdot S_{GF}(j \cdot \omega) + \\ + W_G(j \cdot \omega) \cdot W_F(-j \cdot \omega) \cdot S_{FG}(j \cdot \omega) + |W_F(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(\omega).$$

Если входные процессы статистически независимы, то

$$S_X(\omega) = |W_G(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) + |W_F(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(\omega).$$

• • •

3.4 Анализ точности систем при случайных воздействиях

Пусть имеется линейная замкнутая система, на входы которой подается полезный сигнал $G(t)$ и помеха $F(t)$, приложенная в произвольной точке (см. рисунок 3.6).

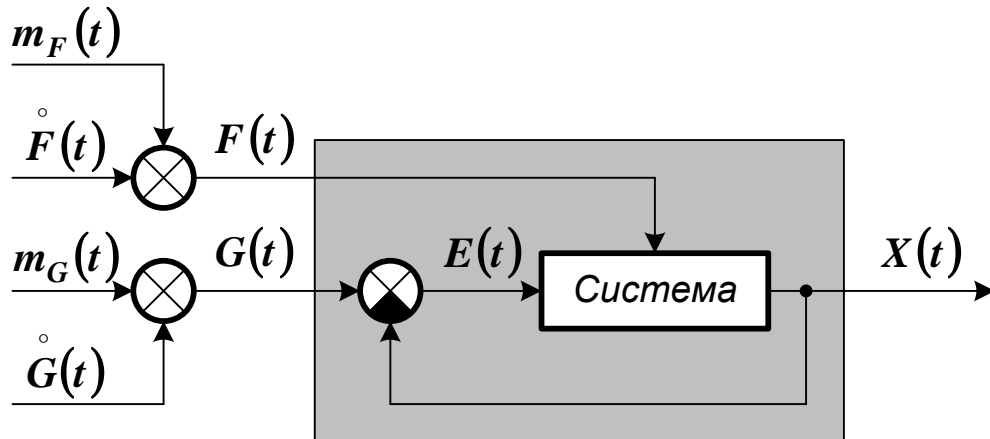


Рисунок 3.6 — Система, находящаяся под влиянием двух случайных воздействий

В общем случае воздействия на систему представляют собой произвольно изменяющиеся во времени регулярные сигналы, на которые наложены центрированные случайные процессы

$$G(t) = m_G(t) + \overset{\circ}{G}(t), \quad (3.37)$$

$$F(t) = m_F(t) + \overset{\circ}{F}(t),$$

где $m_G(t)$, $m_F(t)$ — эквивалентные регулярные составляющие полезного сигнала и помехи, включающие в себя как соответствующий регулярный сигнал, так и математическое ожидание соответствующего случайного процесса.

Любую искомую координату системы можно представить в виде двух составляющих: эквивалентной регулярной и центрированной

случайной. Тогда ошибка системы, характеризующая ее динамическую точность, может быть определена, как

$$E(t) = G(t) - X(t) = m_E(t) + \overset{\circ}{E}(t). \quad (3.38)$$

На основании принципа суперпозиции составляющие ошибки складываются из составляющих от действия полезного сигнала и помехи, которые можно находить независимо друг от друга.

Регулярную составляющую ошибки $m_E(t)$ можно рассматривать как реакцию системы на регулярные внешние воздействия

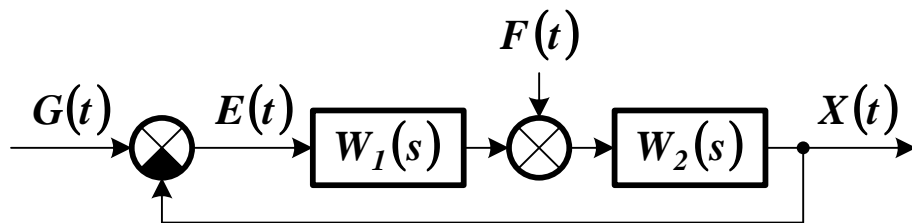
$$m_E(t) = m_E^G(t) + m_E^F(t). \quad (3.39)$$

В изображениях по Лапласу

$$\begin{aligned} M_E(s) &= M_E^G(s) + M_E^F(s) = \\ &= W_{GE}(s) \cdot M_G(s) + W_{FE}(s) \cdot M_F(s), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $W_{GE}(s)$ и $W_{FE}(s)$ — передаточные функции замкнутой системы по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка».

Примечание. Структурная схема типовой замкнутой системы имеет вид



Если $W_1(p) = 1$, то можно считать, что помеха подается на вход разомкнутой системы, а если $W_2(p) = 1$ на ее выход.

Передаточные функции по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка» находятся по формулам

$$\begin{aligned}
 W_{GE}(p) &= \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}, \\
 W_{FE}(p) &= \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

При медленно изменяющихся входных воздействиях регулярную составляющую ошибки обычно определяют *методом коэффициентов ошибок*.

Величину составляющей $m_G^E(t)$ можно найти по соотношению, аналогичному (3.23)

$$\begin{aligned}
 m_E^G(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{W_{GE}^{(i)}(0)}{i!} \cdot m_G^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} C_i \cdot m_G^{(i)}(t), \\
 C_i^G &= \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{\partial^i}{\partial s^i} W_{GE}(s) \right]_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

где C_i^G — коэффициенты ошибок системы по каналу «полезный сигнал — ошибка». Определить их можно без выполнения операций дифференцирования $W_{GE}(s)$ по формулам

$$\begin{aligned}
 C_0^G &= W_{GE}(s)|_{s=0}, \\
 C_i^G &= \frac{1}{s^i} \cdot \left[W_{GE}(s) - \sum_{j=0}^{i-1} C_j \cdot s^j \right]_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.43}$$

Соотношения, аналогичные (3.42) и (3.43), могут быть получены и для канала «помеха ошибка».

Если регулярные внешние воздействия постоянны или отсутствуют, а случайные воздействия представляют собой стационарные случайные процессы, то ошибка будет стационарным случайным процессом, математическое ожидание которого определяется через уравнение статики системы

$$m_E = W_{GE}(0) \cdot m_G + W_{FE}(0) \cdot m_F. \quad (3.43)$$

Центрированную случайную составляющую ошибки $\overset{\circ}{E}(t)$ можно рассматривать как реакцию системы на центрированные случайные составляющие полезного сигнала и помехи и определять ее через корреляционные функции $R_G(\tau)$ и $R_F(\tau)$, или через спектральные плотности $S_G(\omega)$ и $S_F(\omega)$ (если входные воздействия коррелированы, то должны задаваться их взаимная корреляционная функция или их взаимная спектральная плотность). По этим данным находят корреляционную функцию или спектральную плотность ошибки, а затем — дисперсию ошибки.

В практических расчетах чаще всего используют спектральную плотность, рассчитываемую по формуле

$$\begin{aligned} S_E(\omega) = & |W_{GE}(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) + \\ & + W_{GE}(-j \cdot \omega) \cdot W_{FE}(j \cdot \omega) \cdot S_{GF}(j \cdot \omega) + \\ & + W_{GE}(j \cdot \omega) \cdot W_{FE}(-j \cdot \omega) \cdot S_{FG}(j \cdot \omega) + \\ & - |W_{FE}(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(\omega). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Чтобы найти дисперсию ошибки при случайных воздействиях, необходимо вычислить интеграл

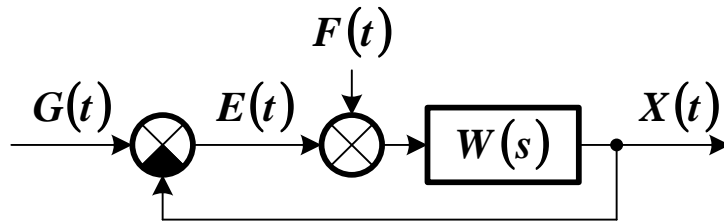
$$D_E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_E(\omega) d\omega. \quad (3.45)$$

Дисперсия ошибки состоит из отдельных составляющих, определяемых слагаемыми (3.44),

$$D_E = D_E^G + D_E^{GF} + D_E^{FG} + D_E^F. \quad (3.46)$$

Все составляющие дисперсии могут вычисляться отдельно. Затем они должны суммироваться.

Пример 3.9. Определение дисперсии выходного случайного процесса. На вход замкнутой следящей системы поступает полезный случайный процесс со спектральной плотностью $S_G(\omega)$. На вход разомкнутой системы поступает случайная помеха со спектральной плотностью $S_F(\omega)$. Корреляция между входными процессами отсутствует. Внешние воздействия не содержат регулярных составляющих. Структурная схема системы имеет вид



$$W(s) = \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)}, \quad S_G(\omega) = \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2}, \quad S_F(\omega) = N.$$

Передаточные функции замкнутой системы по ошибке

$$W_{GE}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{T \cdot s^2 + s}{T \cdot s^2 + s + K},$$

$$W_{FE}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K}{T \cdot s^2 + s + K}.$$

Спектральная плотность ошибки равна

$$S_E(\omega) = \left| \frac{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega)}{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K} \right|^2 \cdot S_G(j \cdot \omega) +$$

$$+ \left| \frac{K}{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K} \right|^2 \cdot S_F(\omega).$$

Составляющая дисперсии ошибки, обусловленная полезным сигналом, находится из выражения

$$\begin{aligned}
D_E^G &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega)}{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K} \right|^2 \cdot \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} d\omega = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega)}{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K} \right|^2 \cdot \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{|1 + T_G \cdot (j \cdot \omega)|^2} d\omega = \\
&= 2 \cdot D_G \cdot T_G \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T^2 \cdot (j \cdot \omega)^4 - (j \cdot \omega)^2}{\left| T \cdot T_G \cdot (j \cdot \omega)^3 + (T + T_G) \cdot (j \cdot \omega)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (1 + K \cdot T_G) \cdot (j \cdot \omega) + K \right|^2} d\omega = \\
&= 2 \cdot D_G \cdot T_G \cdot J_3.
\end{aligned}$$

В данном случае $n = 3$. Коэффициенты полиномов $A_3(j \cdot \omega)$ и $B_3(j \cdot \omega)$ равны

$$\begin{aligned}
a_0 &= T \cdot T_G, \quad a_1 = T + T_G, \quad a_2 = 1 + K \cdot T_G, \quad a_3 = K, \\
b_0 &= T^2, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$J_3 = \frac{1}{2 \cdot T_G} \cdot \frac{T + K \cdot T \cdot T_G + T_G}{T + K \cdot T_G^2 + T_G}.$$

Составляющая дисперсии ошибки, обусловленная полезным случайным процессом, равна

$$D_E^G = 2 \cdot D_G \cdot T_G \cdot J_3 = D_G \cdot \frac{T + K \cdot T \cdot T_G + T_G}{T + K \cdot T_G^2 + T_G}.$$

Составляющая дисперсии ошибки, обусловленная помехой, находится из выражения

$$\begin{aligned}
 D_E^F &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{K}{T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K} \right|^2 \cdot N d\omega = \\
 &= \frac{K^2 \cdot N}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left| T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + K \right|^2} d\omega = K^2 \cdot N \cdot J_2.
 \end{aligned}$$

В данном случае $n = 2$. Коэффициенты полиномов $A_2(j \cdot \omega)$ и $B_2(j \cdot \omega)$ равны

$$a_0 = T, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = K, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1.$$

Тогда

$$J_2 = \frac{1}{2 \cdot K}.$$

Составляющая дисперсии ошибки, обусловленная помехой, равна

$$D_E^F = K^2 \cdot N \cdot J_2 = \frac{K \cdot N}{2}.$$

Результирующее значение дисперсии:

$$D_E = D_G \cdot \frac{T + K \cdot T \cdot T_G + T_G}{T + K \cdot T_G^2 + T_G} + \frac{K \cdot N}{2}.$$

• • •

3.5 Формирующие фильтры

Формирующим фильтром называют динамическую систему, которая при входном сигнале $G(t)$ в виде белого шума имеет на выходе случайный процесс $X(t)$ с заданными статистическими харак-

теристиками (математическим ожиданием, корреляционной функцией или спектральной плотностью).

Использование формирующего фильтра позволяет перейти от системы с произвольным входным воздействием к *эквивалентной системе*, на вход которой действует белый шум. Это достигается последовательным соединением формирующего фильтра и исследуемой системы (см. рисунок 3.7).

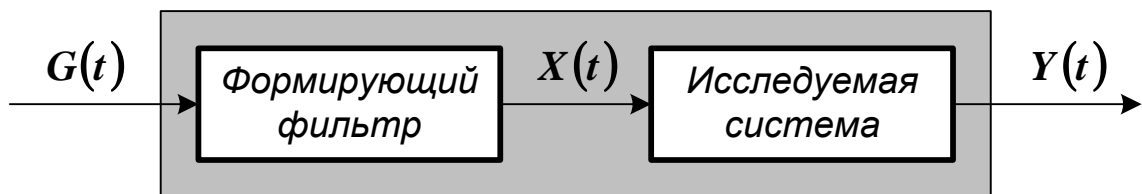


Рисунок 3.7 — Схема эквивалентной системы

Если случайные процессы $G(t)$ и $X(t)$ являются стационарными, то частотную характеристику линейного формирующего фильтра $\Psi(j \cdot \omega)$ можно найти из соотношения

$$S_X(\omega) = |\Psi(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega). \quad (3.47)$$

Если $S_G(\omega) = N$, то

$$|\Psi(j \cdot \omega)|^2 = \frac{S_X(\omega)}{S_G(\omega)} = \frac{S_X(\omega)}{N} = \frac{S_X(j \cdot \omega)}{\sqrt{N}} \cdot \frac{S_X(-j \cdot \omega)}{\sqrt{N}}. \quad (3.48)$$

В качестве искомой частотной характеристики фильтра берется тот из сомножителей (3.48), который имеет нули и полюсы в левой полуплоскости $j \cdot \omega$

$$\Psi(j \cdot \omega) = \frac{S_X(j \cdot \omega)}{\sqrt{N}}. \quad (3.49)$$

Если $S_X(\omega)$ — дробно-рациональная функция, то частотную характеристику линейного формирующего фильтра по формуле (3.49) определить можно всегда.

Пример 3.10. Определение частотной характеристики формирующего фильтра для получения стационарного случайного процесса со спектральной плотностью $S_X(\omega) = 2 \cdot D_X \cdot T_X / (1 + T_X^2 \cdot \omega^2)$ из белого шума со спектральной плотностью $S_G(\omega) = N$.

По формуле (3.48) найдем

$$|\Psi(j \cdot \omega)|^2 = \frac{2 \cdot D_X \cdot T_X}{1 + T_X^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot D_X \cdot T_X}{N}}}{1 + T_X \cdot (j \cdot \omega)} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot D_X \cdot T_X}{N}}}{1 - T_X \cdot (j \cdot \omega)}.$$

Отсюда

$$\Psi(j \cdot \omega) = \sqrt{\frac{2 \cdot D_X \cdot T_X}{N}} \cdot \frac{1}{1 + T_X \cdot (j \cdot \omega)} = \frac{K}{1 + T \cdot (j \cdot \omega)},$$

где $K = \sqrt{2 \cdot D_X \cdot T_X / N}$, $T = T_X$. Передаточная функция фильтра в изображениях по Лапласу

$$W(s) = \frac{K}{1 + T \cdot s}.$$

• • •

Отбеливающим фильтром называют систему, которая преобразует случайный процесс $G(t)$ со спектральной плотностью $S_G(\omega)$ в белый шум. Для стационарных процессов $G(t)$ и $X(t)$ его частотная характеристика равна

$$\Phi(j \cdot \omega) = \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} = \frac{\sqrt{N}}{S_G(j \cdot \omega)}. \quad (3.49)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как выполняется преобразование входных случайных сигналов линейной системой? Что определяет оператор системы?
2. Какая связь существует между статистическими характеристиками случайных процессов на входе и выходе линейной системы во временной области? Как определить их аналитически?
3. Каковы условия стационарности случайного процесса на выходе линейной системы?
4. Какая связь существует между статистическими характеристиками случайных процессов на входе и выходе линейной системы в частотной области? Как определить их аналитически?
5. Какой общий подход к анализу точности систем при случайных воздействиях?
6. Как находится регулярная составляющая ошибки системы?
7. Как находится случайная составляющая ошибки системы?
8. Что называется формирующим фильтром? Каково его назначение?
9. Что называется отбеливающим фильтром? Каково его назначение?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. На вход усилительного звена поступает случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t)$ и корреляционной функцией $R_X(t_1, t_2)$. Требуется найти математическое ожидание и корреляционную функцию выходного случайного процесса $Y(t)$, если коэффициент усиления $K = 8$.

3.2. Определить корреляционную функцию $R_Y(t_1, t_2)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе дифференцирующего звена, если корреляционная функция входного случайного процесса $X(t)$ равна

$$R_X(t_1, t_2) = \exp\left[-\alpha \cdot (t_1 - t_2)^2\right].$$

3.3. Решить предыдущую задачу при условии

$$R_X(t_1, t_2) = D_X \cdot \frac{\cos[\omega \cdot (t_2 - t_1)]}{t_1 + t_2}.$$

3.4. Случайный процесс $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_X(t)$ и корреляционную функцию $R_X(t_1, t_2)$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $Y(t)$, если

$$Y(t) = \int_0^t X(\lambda) \cdot \exp(-\lambda) d\lambda.$$

3.5. На вход дифференцирующего звена поступает случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_X(t) = A \cdot \sin(t)$ и корреляционной функцией

$$R_X(t_1, t_2) = 2 \cdot \exp\left[-\frac{(t_2 - t_1)^2}{2}\right].$$

Найти математическое ожидание и дисперсию D_Y выходного случайного процесса $Y(t)$.

3.6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе апериодического звена

$$T \cdot \frac{d}{dt} Y(t) + Y(t) = K \cdot X(t),$$

если на его вход с момента времени t_0 поступает возмущение, представляющее собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием $m_X = \text{const}$ и корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|).$$

3.7. Найти дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе аperiodического звена

$$T \cdot \frac{d}{dt} Y(t) + Y(t) = X(t),$$

если на его вход с момента времени t_0 поступает белый шум со спектральной плотностью $S_X(\omega) = c^2$.

3.8. На вход нестационарного звена с импульсной переходной характеристикой

$$k(t, \tau) = \frac{1}{T} \cdot \exp\left(-\frac{t - \tau}{T}\right)$$

поступает нестационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием

$$m_X(t) = a_0 + a_1 \cdot t$$

и корреляционной функцией

$$R_X(t, \tau) = D_X \cdot \exp[2 \cdot (t + \tau) - |t - \tau|].$$

Определить математическое ожидание и дисперсию выходного случайного процесса $Y(t)$.

3.9. На один и тот же вход следящей системы поступает полезный случайный процесс $G(t)$ и случайная помеха $F(t)$. Стационар-

ный случайный процесс $G(t)$ имеет математическое ожидание $m_G = \text{const}$ и корреляционную функцию

$$R_G(\tau) = 2 \cdot \exp(-4 \cdot |\tau|).$$

Помеха $F(t)$ является стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$R_F(\tau) = 3 \cdot \exp(-3 \cdot |\tau|).$$

Случайные процессы $G(t)$ и $F(t)$ взаимно не коррелированы. Импульсная переходная характеристика системы

$$k(t) = 4 \cdot \exp(-2 \cdot t).$$

Требуется определить математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $X(t)$ на выходе системы.

3.10. Решить предыдущую задачу, используя спектральные плотности случайных процессов и передаточную функцию системы.

3.11. Линейная система описывается уравнением вида

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt} Y(t) + a_0 \cdot Y(t) = b_1 \cdot \frac{d}{dt} X(t) + b_0 \cdot X(t).$$

Случайный процесс $X(t)$ на входе системы имеет корреляционную функцию

$$R_X(\tau) = D_X \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|).$$

Найти дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы.

3.12. На вход замкнутой системы поступает белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega) = N$. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{s \cdot (T \cdot s + 1)}.$$

Показать, что дисперсия сигнала $Y(t)$ на выходе системы не зависит от постоянной времени T .

4 СИНТЕЗ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

4.1 Общая постановка задачи синтеза систем при случайных воздействиях

Пусть имеется система, на входы которой поступают полезный сигнал $G(t)$ и помеха $F(t)$ (см. рисунок 4.1).

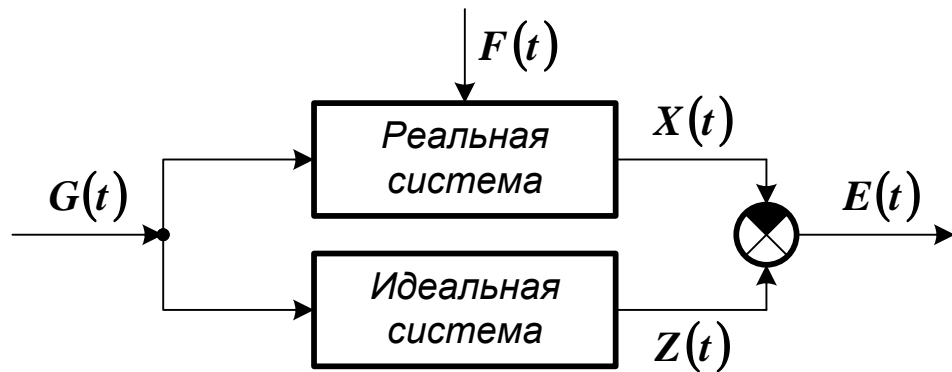


Рисунок 4.1 — Схема преобразования полезного сигнала

Система должна как можно более точно воспроизводить некоторую функцию от $G(t)$, которая задается оператором $\Phi^{(t)}\{ \}$, т. е.

$$Z(t) = \Phi^{(t)}\{G(t)\}. \quad (4.1)$$

В зависимости от вида оператора $\Phi^{(t)}\{ \}$ система может решать следующие задачи:

- **воспроизведение**, если $\Phi^{(t)}\{ \} = c(t) \cdot \{ \}$ (если $c(t) = 1$, система становится *следящей*);
- **дифференцирование**, если $\Phi^{(t)}\{ \} = \frac{d}{dt}\{ \}$;
- **интегрирование**, если $\Phi^{(t)}\{ \} = \int_{t_0}^t \{ \} d\lambda$;
- **упреждение** или **экстраполяция**, если $\Phi^{(t)}\{ \} = I^{(t+\tau)}\{ \}$ (где τ — время упреждения).

В общем случае преобразующий оператор $\Phi^{(t)}\{ \}$ может быть произвольным.

Идеальное преобразование полезного сигнала в соответствии с формулой (4.1) невозможно из-за невозможности точной реализации полезного сигнала $G(t)$ и влияния помехи $F(t)$. Выходной сигнал системы $X(t)$ будет отличаться от требуемого сигнала $Z(t)$ на величину ошибки

$$E(t) = Z(t) - X(t), \quad (4.2)$$

поэтому может ставиться задача подавления помех, которую называют задачей **фильтрации** (сглаживания).

Если входные сигналы $G(t)$ и $F(t)$ представляют собой случайные процессы, то ошибка системы $E(t)$ также будет являться случайным процессом. При таких условиях синтез системы заключается в ее **статистической оптимизации**, после которой будет обеспечиваться наилучшее значение некоторого *критерия оптимальности*. Основные требования к нему:

- возможность количественной оценки качества системы и ее успешности в достижении поставленной цели;
- возможность математического (аналитического) решения задачи оптимизации.

Наиболее употребительным и простым критерием оптимальности системы является минимум среднего квадрата ее ошибки

$$\overline{\varepsilon^2} = M[E^2(t)] = M[\{Z(t) - X(t)\}^2] = m_E^2(t) + D_E \rightarrow \min. \quad (4.3)$$

Очевидно, что критерий $\min(\overline{\varepsilon^2})$ учитывает и регулярную составляющую ошибки $m_E^2(t)$, и ее случайную составляющую D_E .

При статистической оптимизации могут решаться следующие частные задачи.

Определение оптимальных параметров системы. В этом случае структура системы и статистические характеристики входных воздействий считаются известными. Синтез системы заключается в определении таких ее параметров, при которых выражение (4.3) имеет минимум.

Примечание. На практике наиболее часто решается именно такая задача, так как структура системы обычно определяется ее функциональным назначением, в то время как параметры системы допускают подстройку.

Синтез оптимальной системы с произвольной структурой. В этом случае имеется информация только о принадлежности системы к некоторому классу, и известны статистические характеристики входных воздействий. Синтез системы заключается в определении такой ее передаточной функции $W(s)$, при которой выражение (4.3) имеет минимум. При этом должно учитываться условие *физической реализуемости системы*.

Примечание. В этом случае становится возможным теоретически определить предел совершенствования систем выбранного класса и использовать полученную информацию для корректного формулирования требований к ним на этапе проектирования.

Синтез оптимальной системы с непроизвольной структурой. В этом случае структура одной части системы (например, объекта управления) задана, а другая ее часть (например, устройство управления) может произвольно выбираться из некоторого класса подсистем. Статистические характеристики входных воздействий известны. Синтез системы заключается в определении такой передаточной функции изменяемой части системы $W(s)$, при которой выражение (4.3) имеет минимум.

Примечание. Такая постановка задачи является реальной, так как на практике выбор структуры системы всегда ограничен. В ряде случаев становится возможным, используя решение предыдущей задачи, выделить из системы оптимальную подсистему.

В зависимости от соотношения спектральной плотности полезного сигнала и помехи задача синтеза может решаться по-разному.

Если спектры частот полезного сигнала $S_G(\omega)$ и помехи $S_F(\omega)$ не накладываются друг на друга (см. рисунок 4.2 (а)), то амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) замкнутой системы $A(\omega)$ должна располагаться в области спектра полезного сигнала.

Если спектр частот полезного сигнала быстро убывает с возрастанием частоты, а спектр помех близок к белому шуму (см. рисунок 4.2 (б)), то амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы $|W_p(j \cdot \omega)|$ должна располагаться в области низких частот, где сосредотачивается основная энергия полезного сигнала.

Если спектры частот полезного сигнала и помехи накладываются друг на друга и имеют произвольную форму (см. рисунок 4.2 (в)), задача синтеза не имеет тривиального решения.

4.2 Определение оптимальных параметров системы

В этом случае минимума средней квадратичной ошибки (4.3) добиваются путем изменения значений параметров системы.

Если на систему одновременно действуют полезный сигнал $G(t)$ и помеха $F(t)$, то из-за разного характера их влияния простой подбор параметров обычно не обеспечивает оптимальности (например, стремление уменьшить в (4.46) составляющую D_E^G может приводить к росту D_E^F и наоборот). Должно искаться некоторое *компромиссное решение*.

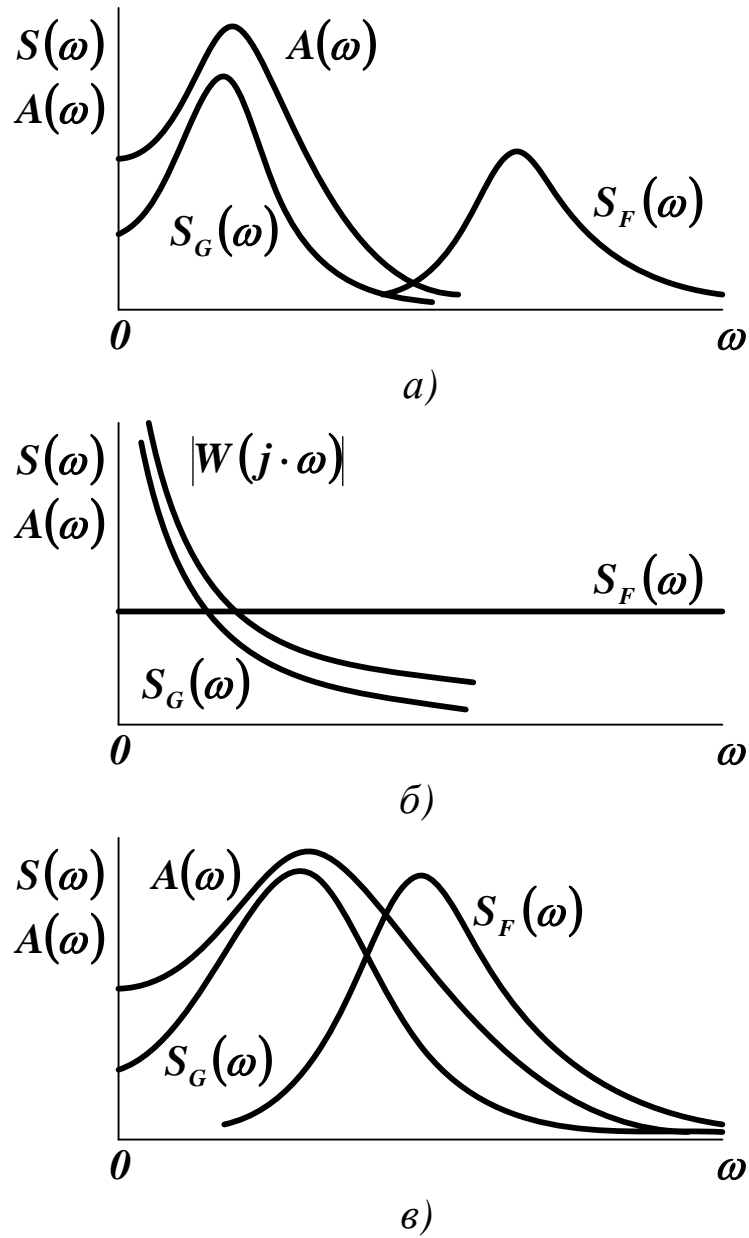


Рисунок 4.2 — Соотношение спектральной плотности полезного сигнала и помехи

Для решения задачи синтеза передаточная функция системы, отображающая ее структуру, представляется в виде

$$W(s) = W(s, \beta_1, \dots, \beta_m), \quad (4.4)$$

где β_1, \dots, β_m — параметры системы, подбором которых минимизируется выражение (4.3). Их выбор должен быть обоснованным. Значения большинства параметров определяются техническими или конструктивными соображениями, поэтому изменять их трудно или невозможно. Обычно для коррекции выбирают два-три параметра (например, постоянные времени корректирующих звеньев, коэффициент усиления разомкнутой системы и т. п.).

Задача синтеза решается в следующем порядке.

1) Определяются передаточные функции системы по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка» как функции параметров системы

$$\begin{aligned} W_{GE}(s) &= W_{GE}(s, \beta_1, \dots, \beta_m), \\ W_{FE}(s) &= W_{FE}(s, \beta_1, \dots, \beta_m). \end{aligned} \quad (4.5)$$

2) По соответствующим передаточным функциям и спектральным плотностям полезного сигнала и помехи определяют спектральную плотность ошибки как функцию параметров системы. При отсутствии корреляции входных сигналов

$$\begin{aligned} S_E^G(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m) &= |W_{GE}(j \cdot \omega, \beta_1, \dots, \beta_m)|^2 \cdot S_G(\omega), \\ S_E^F(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m) &= |W_{FE}(j \cdot \omega, \beta_1, \dots, \beta_m)|^2 \cdot S_F(\omega), \\ S_E(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m) &= S_E^G(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m) + S_E^F(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m). \end{aligned} \quad (4.6)$$

3) По спектральной плотности ошибки определяют дисперсию ошибки как функцию параметров системы

$$D_E(\beta_1, \dots, \beta_m) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_E(\omega, \beta_1, \dots, \beta_m) d\omega. \quad (4.7)$$

4) Дифференцируя (4.7) по β_1, \dots, β_m и приравнявая нулю полученные частные производные, получают систему m уравнений, решением которой находят оптимальные параметры $\beta_{1_{opt}}, \dots, \beta_{m_{opt}}$, обеспечивающие минимум средней квадратичной ошибки.

5) Значения $\beta_{1_{opt}}, \dots, \beta_{m_{opt}}$ оценивают, исходя из возможности их технической реализации и допустимых динамических показателей системы (времени регулирования, наличия и величины перерегулирования, устойчивости и т. д.).

Данная методика может также применяться при одновременном воздействии на систему регулярных и случайных сигналов.

Если спектральные плотности сигналов и частотные передаточные функции системы являются дробно-рациональными функциями ω , то оптимальные значения параметров системы могут быть найдены аналитически.

Пример 4.1. Определение коэффициента усиления разомкнутой системы, рассмотренной в примере 3.9, который бы обеспечивал минимальное значение ее среднеквадратичной ошибки. Так как оговорено, что внешние воздействия не содержат регулярных составляющих, среднеквадратическая ошибка $\overline{\varepsilon^2}$ будет совпадать с дисперсией ошибки D_E .

Полученное в примере 3.9 значение дисперсии ошибки

$$D_E(K) = D_G \cdot \frac{T + K \cdot T \cdot T_G + T_G}{T + K \cdot T_G^2 + T_G} + \frac{K \cdot N}{2}.$$

Для исследования дисперсии ошибки на минимум необходимо приравнять нулю производную от $D_E(K)$ по коэффициенту усиления разомкнутой системы K

$$\frac{\partial D_E(K)}{\partial K} = -\frac{D_G \cdot T_G \cdot (T_G^2 - T^2)}{(T + K \cdot T_G^2 + T_G)^2} + \frac{N}{2} = 0.$$

Отсюда находится оптимальное значение коэффициента усиления разомкнутой системы

$$K_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_G \cdot (T_G^2 - T^2)}{N \cdot T_G^3}} - \frac{T_G + T}{T_G^2}.$$

• • •

Минимум функции (4.7) может быть также найден любым численным методом.

4.3 Синтез оптимальной системы с произвольной структурой

Пусть имеется система, служащая для преобразования полезного сигнала $G(t)$ при наличии случайной помехи $F(t)$. Входные сигналы являются стационарными случайными процессами с равными нулю математическими ожиданиями. Так как структура системы неизвестна, будем считать, что $G(t)$ и $F(t)$ приложены к одному и тому же входу (см. рисунок 4.3).

Примечание. Если сигналы $G(t)$ и $F(t)$ приложены к разным входам, то привести их к одному входу можно методом эквивалентных преобразований.

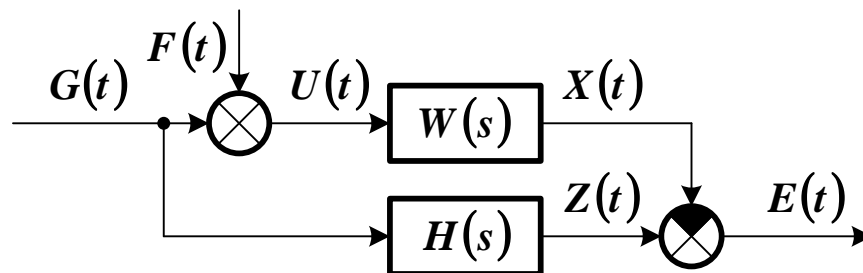


Рисунок 4.3 — Схема преобразования полезного сигнала

Известными считаются спектральные плотности сигналов $S_G(\omega)$, $S_F(\omega)$ и оператор преобразования $H(s)$. Решение проводится для упрощенного, но часто встречающегося случая, когда полезный сигнал и помеха статистически независимы. Суммарный сигнал на входе системы будет равен

$$U(t) = G(t) + F(t). \quad (4.8)$$

В изображениях по Лапласу выходной сигнал системы $X(t)$ связан с входным сигналом $U(t)$ соотношением

$$X(s) = W(s) \cdot U(s) = W(s) \cdot [G(s) + F(s)], \quad (4.9)$$

где $W(s)$ — передаточная функция замкнутой системы.

Любая реализация случайной суммарной ошибки может быть найдена, как

$$\begin{aligned} E(s) &= Z(s) - X(s) = H(s) \cdot G(s) - W(s) \cdot [G(s) + F(s)] = \\ &= [H(s) - W(s)] \cdot G(s) - W(s) \cdot F(s). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выражение для спектральной плотности ошибки имеет вид

$$S_E(\omega) = |H(j \cdot \omega) - W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) + |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(\omega). \quad (4.11)$$

Частотные передаточные функции могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} W(j \cdot \omega) &= A(\omega) \cdot \exp[j \cdot \varphi(\omega)] = \\ &= A(\omega) \cdot \cos[\varphi(\omega)] + j \cdot A(\omega) \cdot \sin[\varphi(\omega)], \\ H(j \cdot \omega) &= H(\omega) \cdot \exp[j \cdot \psi(\omega)] = \\ &= H(\omega) \cdot \cos[\psi(\omega)] + j \cdot H(\omega) \cdot \sin[\psi(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |H(j \cdot \omega) - W(j \cdot \omega)|^2 &= \\ &= H^2(\omega) + A^2(\omega) - 2 \cdot H(\omega) \cdot A(\omega) \cdot \cos[\psi(\omega) - \varphi(\omega)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $A(\omega) = |W(j \cdot \omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы, $H(\omega) = |H(j \cdot \omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика преобразователя.

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= \left\{ \begin{array}{l} H^2(\omega) + A^2(\omega) - \\ - 2 \cdot H(\omega) \cdot A(\omega) \cdot \cos[\psi(\omega) - \varphi(\omega)] \end{array} \right\} \cdot S_G(\omega) + \\ &+ A^2(\omega) \cdot S_F(\omega). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Дисперсия ошибки

$$D_E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega) d\omega, \quad (4.15)$$

будет минимальной, когда наименьшее значение принимает подынтегральное выражение. Так как входящие в (4.14) $H(\omega)$, $A(\omega)$, $S_G(\omega)$, $S_F(\omega)$ положительны при любом значении частоты, для минимизации $S_E(\omega)$ необходимо, чтобы наибольшее значение принимало выражение $2 \cdot H(\omega) \cdot A(\omega) \cdot \cos[\psi(\omega) - \varphi(\omega)]$. Это достигается при

$$\varphi(\omega) = \psi(\omega). \quad (4.16)$$

С учетом (4.16) выражение (4.14) запишется, как

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= [H^2(\omega) + A^2(\omega) - 2 \cdot H(\omega) \cdot A(\omega)] \cdot S_G(\omega) + \\ &+ A^2(\omega) \cdot S_F(\omega). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для определения минимума функции спектральной плотности ошибки $S_E(\omega)$ приравняем нулю ее производную по $A(\omega)$

$$\frac{\partial S_E(\omega)}{\partial A(\omega)} = [2 \cdot A(\omega) - 2 \cdot H(\omega)] \cdot S_G(\omega) + 2 \cdot A(\omega) \cdot S_F(\omega) = 0. \quad (4.18)$$

Отсюда находится оптимальная амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы

$$A(\omega) = \frac{S_G(\omega)}{S_G(\omega) + S_F(\omega)} \cdot H(\omega). \quad (4.19)$$

Объединяя (4.16) и (4.19), можно получить оптимальные характеристики замкнутой системы

$$A_{opt}(\omega) = \frac{S_G(\omega)}{S_G(\omega) + S_F(\omega)} \cdot H(\omega), \quad (4.20)$$

$$\varphi_{opt}(\omega) = \psi(\omega).$$

Выражение для оптимальной частотной передаточной функции замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W_{opt}(j \cdot \omega) &= A_{opt}(\omega) \cdot \exp[j \cdot \varphi_{opt}(\omega)] = \\ &= \frac{S_G(\omega)}{S_G(\omega) + S_F(\omega)} \cdot H(\omega) \cdot \exp[j \cdot \psi(\omega)] = \\ &= \frac{S_G(\omega)}{S_G(\omega) + S_F(\omega)} \cdot H(j \cdot \omega). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Полученная частотная передаточная функция $W_{opt}(j \cdot \omega)$ может оказаться физически нереализуемой.

Примечание. Знаменатель выражения (4.21) содержит сумму двух положительных величин. После разложения его на комплексно-сопряженные сомножители один из них обязательно будет иметь нули в

правой полуплоскости $j \cdot \omega$. Импульсная переходная характеристика для передаточной функции (4.21) будет существовать и при отрицательных значениях времени (до приложения входных воздействий), что свидетельствует о нереализуемости $W_{opt}(j \cdot \omega)$. Кроме того, в реальных системах всегда существует связь между их амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками, которая не учитывалась при выводе формулы (4.21).

Если исключить из (4.21) нереализуемую составляющую, можно получить квазиоптимальную передаточную функцию — лучшую из всех возможных с точки зрения минимизации среднеквадратичной ошибки системы.

Если использовать методику Г. Боде и К. Шеннона, то задача синтеза решается в следующем порядке.

1) Выполняется разложение знаменателя (4.21) на комплексно-сопряженные множители (т. н. «факторизация»)

$$S_G(\omega) + S_F(\omega) = |\Psi(j \cdot \omega)|^2 = \Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega), \quad (4.22)$$

где $\Psi(j \cdot \omega)$ — функция, все полюсы которой лежат в левой полуплоскости $j \cdot \omega$ (в области реализуемости системы), $\Psi(-j \cdot \omega)$ — функция, все полюсы которой лежат в правой полуплоскости $j \cdot \omega$ (в области нереализуемости системы).

Выражение (4.21) после факторизации примет вид

$$W_{opt}(j \cdot \omega) = \frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega)}. \quad (4.23)$$

2) Выполняется разложение выражения (4.23) на реализуемые и нереализуемые составляющие (т. н. «расщепление»)

$$W_{\text{отн}}(j \cdot \omega) = \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} \right]_+ + \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} \right]_-, \quad (4.24)$$

где реализуемая часть системы отмечается знаком «плюс», а нереализуемая — знаком «минус». После отбрасывания нереализуемой части записывается выражение для передаточной функции замкнутой системы

$$W(j \cdot \omega) = \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} \right]_+. \quad (4.25)$$

3) Выполняется разложение выражения, стоящего в (4.25) в квадратных скобках, на простейшие слагаемые

$$\frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} = \frac{Q_1(j \cdot \omega)}{P(j \cdot \omega)} + \frac{Q_2(j \cdot \omega)}{P(-j \cdot \omega)}. \quad (4.26)$$

Из (4.26) исключается составляющая $Q_2(j \cdot \omega)/P(-j \cdot \omega)$, соответствующая неустойчивой системе. Тогда квазиоптимальная частотная передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$W(j \cdot \omega) = \frac{Q_1(j \cdot \omega)}{\Psi(j \cdot \omega) \cdot P(j \cdot \omega)}. \quad (4.27)$$

Передаточную функцию замкнутой системы в изображениях по Лапласу $W(s)$ получают по найденной частотной передаточной функции, заменяя $j \cdot \omega$ на s .

Физически реализуемая передаточная функция разомкнутой системы находится по соотношению

$$W_p(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)}. \quad (4.28)$$

Пример 4.2. Определение передаточной функции следящей системы ($H(s) = 1$) по критерию минимума ее среднеквадратичной ошибки. На вход системы поступает полезный сигнал $G(t)$, на который накладывается случайная помеха $F(t)$ типа «белый шум» (см. рисунок 4.3). Спектральные плотности входных сигналов равны

$$S_G(\omega) = \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} = \frac{S_G(0)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2},$$

$$S_F(\omega) = N = S_F(0).$$

Спектральная плотность суммарного входного сигнала равна

$$S_G(\omega) + S_F(\omega) = \frac{S_G(0) + S_F(0) \cdot (1 + T_G^2 \cdot \omega^2)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2}.$$

Разложение этого выражения на комплексно-сопряженные сомножители даст результат

$$\begin{aligned} & \frac{S_G(0) + S_F(0) \cdot (1 + T_G^2 \cdot \omega^2)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} = \\ & = [S_G(0) + S_F(0)] \cdot \frac{1 + T_G^2 \cdot \omega^2 \cdot S_F(0) / (S_G(0) + S_F(0))}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} = \\ & = [S_G(0) + S_F(0)] \cdot \frac{1 + \alpha^2 \cdot \omega^2}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} = \\ & = [S_G(0) + S_F(0)] \cdot \frac{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega} \cdot \frac{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega}{1 - j \cdot T_G \cdot \omega} = \\ & = \Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega), \end{aligned}$$

где $\alpha = T_G \cdot \sqrt{S_F(0) / [S_G(0) + S_F(0)]}$.

Очевидно, что

$$\Psi(j \cdot \omega) = \sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)} \cdot \frac{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega},$$

$$\Psi(-j \cdot \omega) = \sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)} \cdot \frac{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega}{1 - j \cdot T_G \cdot \omega}.$$

После разложения на элементарные дроби исключается часть, соответствующая неустойчивой системе.

$$\begin{aligned} \frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} &= \frac{S_G(\theta)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)}} \cdot \frac{1 - j \cdot T_G \cdot \omega}{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega} = \\ &= \frac{S_G(\theta)}{\sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)}} \cdot \frac{1}{(1 + j \cdot T_G \cdot \omega) \cdot (1 - j \cdot \alpha \cdot \omega)} = \\ &= \frac{S_G(\theta)}{\sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)}} \cdot \left[\frac{T_G}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega} + \frac{\alpha}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega} \right]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках имеет полюсы, расположенные в правой комплексной полуплоскости $j \cdot \omega$. Оно отбрасывается.

Определяется реализуемая частотная передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned} W(j \cdot \omega) &= \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_G(\theta)}{\sqrt{S_G(\theta) + S_F(\theta)}} \cdot \frac{T_G}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega} \right] = \\ &= \frac{S_G(\theta)}{S_G(\theta) + S_F(\theta)} \cdot \frac{T_G}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega} = \frac{K}{T \cdot (j \cdot \omega) + 1}, \end{aligned}$$

где $K = S_G(\theta) / [S_G(\theta) + S_F(\theta)] \cdot T_G / (T_G + \alpha)$ — коэффициент усиления замкнутой системы, $T = \alpha$ — ее постоянная времени.

Записывается реализуемая передаточная функция замкнутой системы в изображениях по Лапласу

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1}.$$

Находится передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)} = \frac{K}{T \cdot s + (1 - K)}$$

Определяется передаточная функция системы по ошибке

$$W_{GE}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{T \cdot s + (1 - K)}{T \cdot s + 1}$$

Находится спектральная плотность ошибки

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= |W_{GE}(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(j \cdot \omega) + |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(j \cdot \omega) = \\ &= \left| \frac{T \cdot (j \cdot \omega) + (1 - K)}{T \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} + \left| \frac{K}{T \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot N = \\ &= \left| \frac{T \cdot (j \cdot \omega) + (1 - K)}{T \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{|1 + T_G \cdot (j \cdot \omega)|^2} + \left| \frac{K}{T \cdot (j \cdot \omega) + 1} \right|^2 \cdot N = \\ &= \frac{-T^2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + (1 - K)^2}{|T \cdot T_G \cdot (j \cdot \omega)^2 + (T + T_G) \cdot (j \cdot \omega) + 1|^2} \cdot 2 \cdot D_G \cdot T_G + \\ &+ \frac{K^2}{|T \cdot (j \cdot \omega) + 1|^2} \cdot N. \end{aligned}$$

Аналитически определяется дисперсия ошибки (см. п. 3.4)

$$D_E = \frac{T + T_G \cdot (1 - K)}{T + T_G} \cdot D_G + \frac{K^2}{2 \cdot T} \cdot N.$$

• • •

4.4 Фильтр Винера

В 1949 году американский математик Н. Винер предложил методику определения реализуемой частотной передаточной функции замкнутой системы, обеспечивающей минимум ее среднеквадратичной ошибки (*фильтра Винера*).

При синтезе фильтра Винера исходят из предположения, что на вход системы поступает аддитивная смесь $U(t)$ случайного полезного сигнала $G(t)$ и помехи $F(t)$ (см. рисунок 4.3), которые являются стационарными случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями. Их статистические характеристики известны.

Необходимым и достаточным условием оптимальности системы по критерию (4.3) является отсутствие статистической связи между ошибкой $E(t)$ и выходом идеальной системы $Z(t)$. Для центрированных процессов

$$M[E(t) \cdot Z(t)] = M[\{Z(t) - X(t)\} \cdot Z(t)] = 0. \quad (4.29)$$

Из (4.29) может быть получено **интегральное уравнение Винера-Хопфа**, связывающее оптимальную весовую функцию замкнутой системы и статистические характеристики случайных процессов

$$R_{ZU}(\tau) = \int_0^{+\infty} k_{onm}(\eta) \cdot R_U(\tau - \eta) d\eta, \quad \tau \geq 0. \quad (4.30)$$

Вывод уравнения Винера-Хопфа. Значения на выходах идеальной и синтезируемой систем $Z(t)$ и $X(t)$ могут быть найдены, как

$$Z(t) = \Phi^{(t)}\{G(t)\}, \quad X(t) = \Omega^{(t)}\{U(t)\},$$

где $\Phi^{(t)}\{ \}$ предварительно заданный оператор преобразования (см. п. 4.1), $\Omega^{(t)}\{ \}$ оператор системы, подлежащий определению.

Дисперсия ошибки определяется по формуле

$$D_E = M \left[\{Z(t) - X(t)\}^2 \right] = M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} \right)^2 \right].$$

Используем положения теории вариационного исчисления. Предположим, что оператор $\Omega^{(t)} \{ \}$ является оптимальным, и ему соответствует значение $D_{E_{min}}$. Задавая его вариацию, найдем новое значение дисперсии

$$D_E^* = M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} - \gamma \cdot \Theta^{(t)} \{U(t)\} \right)^2 \right],$$

где $\Theta^{(t)} \{ \}$ — произвольный оператор из рассматриваемого класса, γ — малый параметр. Эта формула может быть преобразована

$$D_E^* = D_{E_{min}} - 2 \cdot \gamma \cdot M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} \right) \cdot \Theta^{(t)} \{U(t)\} \right] + \gamma^2 \cdot M \left[\Theta^{(t)} \{U(t)\}^2 \right].$$

Пренебрегая малыми порядка γ^2 и выше, получим вариацию D_E

$$\delta D_E = D_E^* - D_{E_{min}} = -2 \cdot \gamma \cdot M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} \right) \cdot \Theta^{(t)} \{U(t)\} \right].$$

Дифференцируя δD_E по γ и приравнивая производную нулю, определим необходимое условие оптимальности $\Omega^{(t)} \{ \}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta D_E &= 2 \cdot M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} \right) \cdot \Theta^{(t)} \{U(t)\} \right] = 0, \\ M \left[\left(Z(t) - \Omega^{(t)} \{U(t)\} \right) \cdot \Theta^{(t)} \{U(t)\} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Входящие в данное условие значения могут быть найдены по формулам, аналогичным (4.15), т. е.

$$\Omega^{(t)}\{U(t)\} = \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot U(\lambda) d\lambda,$$

$$\Theta^{(t)}\{U(t)\} = \int_{t_0}^t \theta(t, \mu) \cdot U(\mu) d\mu,$$

где $k(t, \lambda)$ исходная оптимальная весовая функция системы, $\theta(t, \mu)$ произвольная весовая функция. Тогда

$$M \left[\left(Z(t) - \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot U(\lambda) d\lambda \right) \cdot \int_{t_0}^t \theta(t, \mu) \cdot U(\mu) d\mu \right] =$$

$$= \int_{t_0}^t \left\{ M[Z(t) \cdot U(\mu)] - \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot M[U(\lambda) \cdot U(\mu)] d\lambda \right\} \cdot \theta(t, \mu) d\mu.$$

Для произвольной функции $\theta(t, \mu)$ это выражение будет равно нулю только при равенстве нулю выражения в фигурных скобках

$$M[Z(t) \cdot U(\mu)] - \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot M[U(\lambda) \cdot U(\mu)] d\lambda = 0, \quad t_0 \leq \mu \leq t.$$

Отсюда можно получить

$$R_{ZU}(t, \mu) = \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot R_U(\lambda, \mu) d\lambda, \quad t_0 \leq \mu \leq t.$$

Так как входные процессы и сама система являются стационарными, то для установившегося режима ($t_0 \rightarrow +\infty$) полученное уравнение можно записать в виде

$$R_{ZU}(t - \mu) = \int_0^{+\infty} k(t - \lambda) \cdot R_U(\lambda - \mu) d\lambda, \quad t_0 \leq \mu \leq t.$$

Выполнив замену переменных $\tau = t - \mu$ и $\eta = t - \lambda$, можно получить уравнение (4.30).

• • •

Для стационарных входных случайных процессов уравнение (4.30) решают путем применения преобразования Фурье $F\{\}$ к его левой и правой частям.

Примечание. В правой части (4.30) выполняется свертка функций $k_{onm}(\eta)$ и $R_U(\tau - \eta)$, преобразование которой по Фурье равно произведению преобразований свертываемых функций по Фурье. Преобразование импульсной переходной характеристики по Фурье определит оптимальную передаточную функцию системы.

После выполнения преобразований получим

$$\begin{aligned} F\{R_{ZU}(\tau)\} &= F\{k_{onm}(\tau)\} \cdot F\{R_U(\tau)\}, \\ S_{ZU}(j \cdot \omega) &= W_{onm}(j \cdot \omega) \cdot S_U(\omega), \\ W_{onm}(j \cdot \omega) &= \frac{S_{ZU}(j \cdot \omega)}{S_U(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned} S_U(\omega) &= S_G(\omega) + S_{GF}(j \cdot \omega) + S_{FG}(j \cdot \omega) + S_F(\omega), \\ S_{ZU}(j \cdot \omega) &= S_{ZG}(j \cdot \omega) + S_{ZF}(j \cdot \omega) = \\ &= H(j \cdot \omega) \cdot [S_G(\omega) + S_{GF}(j \cdot \omega)]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

При отсутствии взаимной корреляции полезного сигнала и помехи

$$W(j \cdot \omega) = \frac{S_G(\omega)}{S_G(\omega) + S_F(\omega)} \cdot H(j \cdot \omega), \quad (4.33)$$

что совпадает с (4.21).

Передаточная функция (4.31) в общем случае будет физически нереализуемой. Если спектральные плотности входных случайных

процессов являются дробно-рациональными функциями, то получить квазиоптимальную передаточную функцию системы можно, используя методику Боде и Шеннона (см. п. 4.3).

Пример 4.3. Синтез оптимального фильтра Винера для следящей системы ($H(j \cdot \omega) = 1$). На вход системы поступает случайный процесс $U(t)$, на ее выходе наблюдается процесс $X(t)$. Спектральные плотности сигналов равны

$$S_U(\omega) = \frac{S_U(0)}{1 + T_U^2 \cdot \omega^2}, \quad S_{XU}(\omega) = \frac{S_{XU}(0)}{1 + T_{XU}^2 \cdot \omega^2}.$$

Факторизация спектральной плотности входного случайного процесса даст результат

$$S_U(\omega) = \Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega),$$

$$\Psi(j \cdot \omega) = \frac{\sqrt{S_U(0)}}{1 + T_U \cdot (j \cdot \omega)}, \quad \Psi(-j \cdot \omega) = \frac{\sqrt{S_U(0)}}{1 - T_U \cdot (j \cdot \omega)}.$$

Физически реализуемая часть передаточной функции замкнутой системы определится с помощью выражения

$$\begin{aligned} \frac{S_{XU}(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} &= \frac{S_{XU}(0)}{\sqrt{S_U(0)}} \cdot \frac{1 - T_U \cdot (j \cdot \omega)}{1 + T_{XU}^2 \cdot \omega^2} = \\ &= \frac{S_{XU}(0)}{\sqrt{S_U(0)}} \cdot \frac{1 - T_U \cdot (j \cdot \omega)}{(1 + j \cdot T_{XU} \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot T_{XU} \cdot \omega)} = \\ &= \frac{S_{XU}(0)}{\sqrt{S_U(0)}} \cdot \frac{1}{2 \cdot T_{XU}} \cdot \left[\frac{T_U + T_{XU}}{1 + T_{XU} \cdot (j \cdot \omega)} - \frac{T_U - T_{XU}}{1 - T_{XU} \cdot (j \cdot \omega)} \right], \end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках имеет полюсы в правой полуплоскости $j \cdot \omega$. Оно отбрасывается.

Реализуемая частотная передаточная функция равна

$$W(j \cdot \omega) = \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_{XU}(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} \right]_+ =$$

$$= \frac{S_{XU}(0)}{S_U(0)} \cdot \frac{T_U + T_{XU}}{2 \cdot T_{XU}} \cdot \frac{1 + T_U \cdot (j \cdot \omega)}{1 + T_{XU} \cdot (j \cdot \omega)}.$$

Квазиоптимальная передаточная функция равна

$$W(s) = K \cdot \frac{1 + T_U \cdot s}{1 + T_{XU} \cdot s}, \quad K = \frac{S_{XU}(0)}{S_U(0)} \cdot \frac{T_U + T_{XU}}{2 \cdot T_{XU}}.$$

• • •

Получить реализуемую импульсную переходную характеристику $k(t)$, являющуюся решением (4.30), возможно путем *приведения входного воздействия на систему к белому шуму*.

Пусть на вход замкнутой системы подается случайный процесс $V(t)$ типа белого шума с корреляционной функцией $R_V(\tau) = \delta(\tau)$ и спектральной плотностью $S_V(\omega) = 1$. Для получения входного процесса с заданными характеристиками используется отбеливающий фильтр с частотной характеристикой $\Phi(j \cdot \omega)$ (см. п. 4.5).

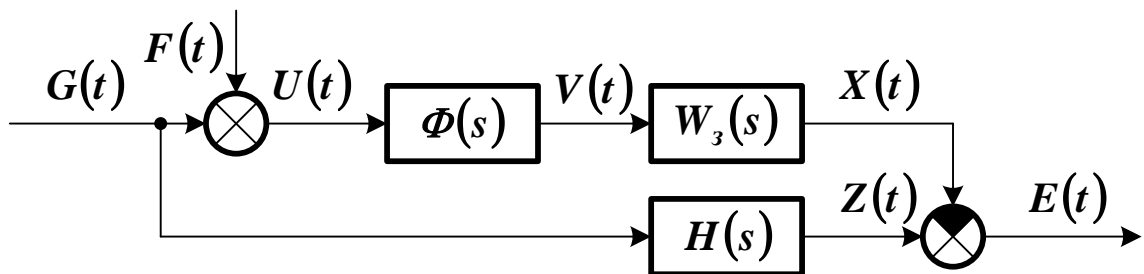


Рисунок 4.4 — Схема преобразования полезного сигнала с использованием отбеливающего фильтра

Частотная характеристика отбеливающего фильтра задается формулой (4.49). Для данного случая

$$\Phi(j \cdot \omega) = \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} = \frac{1}{S_U(j \cdot \omega)}. \quad (4.34)$$

При использовании фильтра оптимальная частотная передаточная функция системы находится по соотношению

$$W_{opt}(j \cdot \omega) = \Phi(j \cdot \omega) \cdot W_3(j \cdot \omega), \quad (4.35)$$

где $W_3(j \cdot \omega)$ передаточная функция замкнутой системы, подлежащая определению.

Используя (4.30) и условие реализуемости системы (4.9), а также равенство единице интеграла от δ -функции в бесконечных пределах, можно найти весовую функцию замкнутой системы

$$k_3(t) = \begin{cases} R_{ZV}(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Преобразовав обе части (4.36) по Фурье, получим

$$\begin{aligned} W_3(j \cdot \omega) &= \int_0^{+\infty} k_3(t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} R_{ZV}(t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ZV}(j \cdot \omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) d\omega \right] \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_{ZV}(j \cdot \omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) d\omega \right] \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Взаимная спектральная плотность $S_{ZV}(j \cdot \omega)$ может быть вычислена по уравнению, аналогичному (4.35).

$$\begin{aligned}
S_{ZV}(j \cdot \omega) &= H(j \cdot \omega) \cdot \Phi(-j \cdot \omega) \cdot S_G(\omega) + \\
&+ H(j \cdot \omega) \cdot \Phi(-j \cdot \omega) \cdot S_{GF}(j \cdot \omega) = \\
&= H(j \cdot \omega) \cdot \Phi(-j \cdot \omega) \cdot [S_G(\omega) + S_{GF}(j \cdot \omega)] = \\
&= \Phi(-j \cdot \omega) \cdot S_{ZU}(j \cdot \omega).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Оптимальная частотная передаточная функция системы находится путем объединения (4.34), (4.37) и (4.38)

$$\begin{aligned}
W_{onm}(j \cdot \omega) &= \\
&= \frac{\Phi(j \cdot \omega)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-j \cdot \omega) \cdot S_{ZV}(j \cdot \omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) d\omega \right] \times \\
&\quad \times \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Если входные случайные процессы $G(t)$ и $F(t)$ статистически независимы, спектральная плотность полезного сигнала описывается дробно-рациональной функцией вида $S_G(\omega) = Q(\omega^2) / P(\omega^2)$, а случайная помеха является белым шумом со спектральной плотностью $S_F(\omega) = S_F(\theta)$, то оптимальная частотная передаточная функция следящей системы определяется по упрощенной формуле

$$W_{onm}(j \cdot \omega) = 1 - \frac{\sqrt{S_F(\theta)}}{\Psi(j \cdot \omega)}, \tag{4.40}$$

где $\Psi(j \cdot \omega)$ вычисляется с помощью (4.22).

Примечание. Если спектральная плотность $S_G(\omega)$ не является дробно-рациональной функцией частоты или получена экспериментально, то для нахождения $W_{onm}(j \cdot \omega)$ ее нужно аппроксимировать дробно-рациональной функцией.

Пример 4.4. Определение передаточной функции следящей системы по критерию минимума ее среднеквадратичной ошибки по данным примера 4.2. Спектральные плотности входных сигналов составляют

$$S_G(\omega) = \frac{2 \cdot D_G \cdot T_G}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} = \frac{S_G(0)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2}, \quad S_F(\omega) = N = S_F(0).$$

Найденное в примере 4.2 значение $\Psi(j \cdot \omega)$ равно

$$\Psi(j \cdot \omega) = \sqrt{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega},$$

Оптимальная частотная передаточная функция замкнутой системы находится следующим образом

$$\begin{aligned} W(j \cdot \omega) &= 1 - \frac{\sqrt{S_G(0)}}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{1 + j \cdot T_G \cdot \omega}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega} = \\ &= \frac{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)} - \sqrt{S_F(0)}}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega} + \\ &+ j \cdot \omega \cdot \frac{\alpha \cdot \sqrt{S_G(0) + S_F(0)} - T_G \cdot \sqrt{S_F(0)}}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Так как $\alpha = T_G \cdot \sqrt{S_F(0) / [S_G(0) + S_F(0)]}$, то второе слагаемое равно нулю. Реализуемая частотная передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W(j \cdot \omega) &= \frac{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)} - \sqrt{S_F(0)}}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega} = \\ &= \left[1 - \sqrt{\frac{S_F(0)}{S_G(0) + S_F(0)}} \right] \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}. \end{aligned}$$

Реализуемая передаточная функция замкнутой системы в изображениях по Лапласу имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1},$$

где $K = 1 - \sqrt{S_F(0) / [S_G(0) + S_F(0)]}$ — коэффициент усиления замкнутой системы, $T = \alpha$ — ее постоянная времени.

• • •

4.5 Фильтр Калмана-Бьюси

В 1960 г. Р. Калман и Р. Бьюси предложили метод синтеза системы, оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной случайной ошибки (*фильтра Калмана-Бьюси*).

Примечание. Фильтр Винера обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки только в установившемся режиме при условии, что случайные процессы являются стационарными. Фильтр Калмана-Бьюси является оптимальным и в переходном режиме (при конечном времени наблюдения), а полезный сигнал и помеха могут не обладать свойством стационарности.

Задача синтеза решается в *пространстве состояний* (во временной области). Оптимальная оценка выходного сигнала системы находится решением системы дифференциальных уравнений, что обычно проще решения уравнения Винера-Хопфа, особенно для нестационарных случайных процессов.

Предполагается, что система должна воспроизводить полезный сигнал $Z(t)$ (в общем случае — нестационарный случайный процесс). На ее входе действует помеха $F(t)$ (в общем случае — белый шум с нулевым математическим ожиданием). Схема воспроизведения сигнала показана на рисунке 4.5.

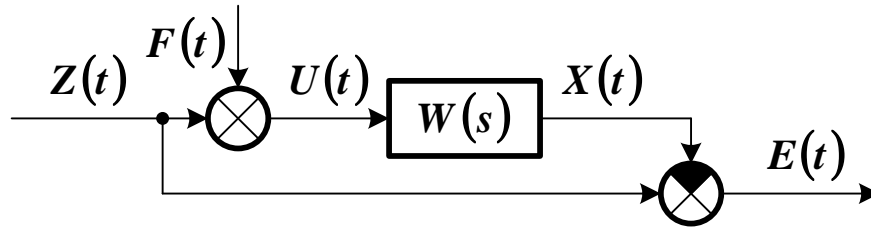


Рисунок 4.5 — Схема воспроизведения полезного сигнала

Задача синтеза оптимального фильтра Калмана-Бьюси заключается в определении его передаточной функции $W(s)$, которая бы обеспечивала минимум среднеквадратичной ошибки (4.3).

Оптимальная система, обеспечивающая в любой момент времени $t > t_0$ воспроизведение сигнала $Z(t)$ при выполнении условия (4.3), описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} X(t) = Q(t) \cdot X(t) + C(t) \cdot U(t), \quad (4.41)$$

где $U(t)$ — суммарный входной сигнал, равный

$$U(t) = Z(t) + F(t). \quad (4.42)$$

Случайный процесс $Z(t)$ определяется дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d}{dt} Z(t) = A(t) \cdot Z(t) + V(t), \quad (4.43)$$

где $A(t)$ — функция времени, зависящая от характеристик $Z(t)$; $V(t)$ — нестационарный процесс типа «белый шум» с нулевым математическим ожиданием. Корреляционные функции нестационарных случайных процессов $V(t)$ и $F(t)$ считаются равными

$$\begin{aligned}
 R_V(t, \tau) &= M[V(t) \cdot V(\tau)] = L(t) \cdot \delta(t - \tau), \\
 R_F(t, \tau) &= M[F(t) \cdot F(\tau)] = N(t) \cdot \delta(t - \tau), \\
 R_{VF}(t, \tau) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

где $L(t) \geq 0$ и $N(t) > 0$ — непрерывные непрерывно дифференцируемые функции времени. Для стационарных случайных процессов $V(t)$ и $F(t)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
 R_V(\tau) &= L \cdot \delta(t - \tau), \quad R_F(\tau) = N \cdot \delta(t - \tau), \\
 R_{VF}(\tau) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

где L и N — константы.

Для получения $Z(t)$ необходим формирующий фильтр, структура которого, определяемая (4.43), показана на рисунке 4.6 ($W_\phi(s)$ — передаточная функция формирующего фильтра).

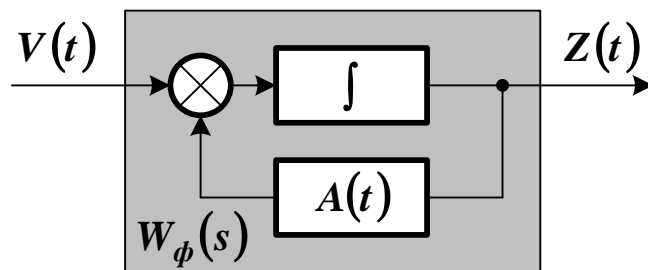


Рисунок 4.6 — Структурная схема формирующего фильтра

Структура оптимального фильтра, определяемая уравнением (4.41), показана на рисунке 4.7 ($W(s)$ — передаточная функция оптимального фильтра).

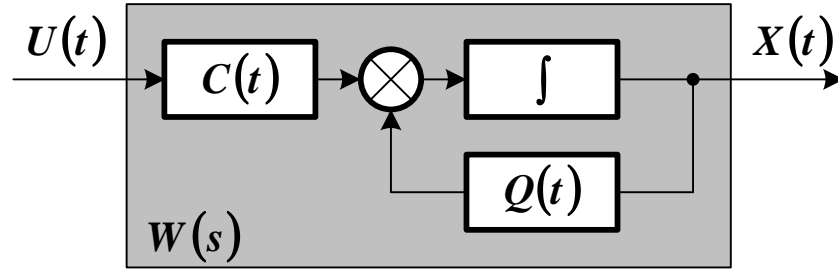


Рисунок 4.7 — Структурная схема оптимального фильтра

В теории оптимальной фильтрации доказывается, что минимум критерия (4.3) достигается при

$$Q(t) = A(t) - C(t), \quad C(t) = \frac{r(t)}{N(t)}. \quad (4.46)$$

Функция $r(t)$ находится путем решения дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{d}{dt} r(t) = L(t) + 2 \cdot A(t) \cdot r(t) - r^2(t)/N(t). \quad (4.47)$$

С учетом (4.46) уравнение оптимального фильтра Калмана-Бьюси можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{dt} X(t) = A(t) \cdot X(t) + C(t) \cdot [U(t) - X(t)]. \quad (4.48)$$

Для нестационарных случайных процессов функции $A(t)$, $C(t)$, $Q(t)$ зависят от времени, и оптимальный фильтр Калмана-Бьюси получается нестационарным. Для стационарных случайных процессов $A(t) = A$. В установившемся режиме фильтр Калмана-Бьюси будет стационарным, так как функции $C(t) = C$ и $Q(t) = A - C = Q$ не зависят от времени. Он определяется дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} X(t) = (A - C) \cdot X(t) + C \cdot U(t). \quad (4.49)$$

Примечание. Даже при стационарных воздействиях фильтр Калмана-Бьюси в переходном режиме является нестационарным, так как коэффициент $C(t)$ изменяется во времени.

Уравнению (4.48) соответствует структурная схема фильтра, показанная на рисунке 4.8 (она эквивалентна схеме с рисунка 4.7). Очевидно, что при таком представлении *оптимальный фильтр Калмана-Бьюси можно рассматривать как динамическую систему с отрицательной обратной связью.*

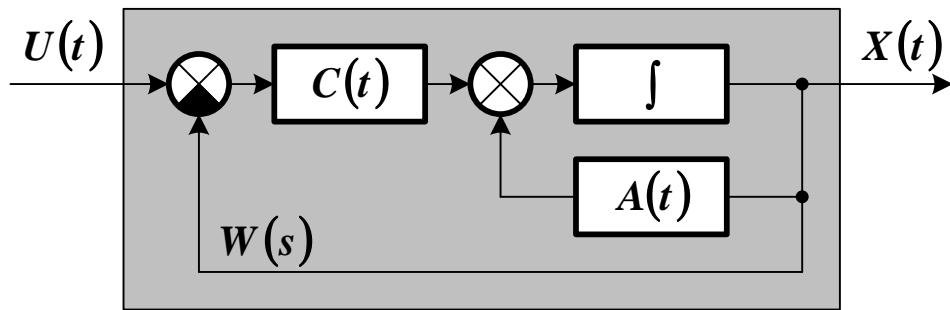


Рисунок 4.8 — Структурная схема оптимального фильтра

Решение задачи синтеза оптимального фильтра сводится к определению функций $Q(t)$ и $C(t)$, при которых обеспечивается выполнение условия (4.3). Оно проводится в три этапа.

1) Определяются параметры формирующего фильтра, который при воздействии на его вход белого шума $V(t)$ со спектральной плотностью $S_V(\omega)$ позволяет получить на выходе случайный процесс $Z(t)$ с заданной спектральной плотностью $S_Z(\omega)$.

Если случайные процессы являются стационарными, а спектральная плотность $S_Z(\omega)$ является дробно-рациональной функцией частоты, то (см. формулы (4.49) и (4.44))

$$W_{\phi}(j \cdot \omega) = \frac{\Psi(j \cdot \omega)}{\sqrt{L}}, \quad (4.50)$$

где $\Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega) = S_Z(\omega)$. Заменяв в (4.50) s на $j \cdot \omega$, можно получить передаточную функцию формирующего фильтра в изображениях по Лапласу

$$W_{\phi}(s) = \frac{\Psi(s)}{\sqrt{L}}. \quad (4.51)$$

По передаточной функции (4.51) можно найти уравнение (4.43), связывающее случайные процессы $Z(t)$ и $V(t)$.

2) Определяется дисперсия случайной ошибки $D_E(t)$ как некоторая функция времени $r(t)$ путем (возможно численного) решения уравнения (4.47). Для этого необходимо знать начальное значение $r(t_0)$ при $t_0 = 0$. Обычно $X(t_0) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} E(t_0) &= Z(t_0) - X(t_0) = Z(t_0), \\ r(t_0) &= M[E^2(t_0)] = M[Z^2(t_0)] = R_Z(t_0, t_0) = D_Z(t_0). \end{aligned} \quad (4.52)$$

3). Находятся параметры оптимального фильтра (функций $C(t)$ и $Q(t)$). Для этого используются формулы (4.46).

Пример 4.5. Синтез оптимального фильтра Калмана-Бьюси. На вход линейной следящей системы поступает стационарный случайный процесс $Z(t)$ и случайная помеха $F(t)$ типа «белый шум». Их спектральные плотности равны

$$\begin{aligned} S_Z(\omega) &= \frac{2 \cdot D_Z \cdot T_Z}{1 + \omega^2 \cdot T_Z^2} = \frac{S_Z(0)}{1 + \omega^2 \cdot T_Z^2}, \\ S_F(\omega) &= N = S_F(0). \end{aligned}$$

Случайный процесс $Z(t)$ рассматривается как реакция формирующего фильтра на стационарный случайный процесс $V(t)$ типа «белый шум», имеющий спектральную плотность

$$S_V(\omega) = L = S_V(0).$$

В соответствии с (4.50) определяется частотная передаточная функция формирующего фильтра

$$S_Z(\omega) = \Psi(j \cdot \omega) \cdot \Psi(-j \cdot \omega) = \frac{\sqrt{S_Z(0)}}{1 + j \cdot \omega \cdot T_Z} \cdot \frac{\sqrt{S_Z(0)}}{1 - j \cdot \omega \cdot T_Z},$$

$$W_\phi(j \cdot \omega) = \frac{\Psi(j \cdot \omega)}{\sqrt{S_V(\omega)}} = \sqrt{\frac{S_Z(0)}{L}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T_Z}.$$

Записывается передаточная функция формирующего фильтра в изображениях по Лапласу

$$W_\phi(s) = \sqrt{\frac{S_Z(0)}{L}} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T_Z}.$$

Полученной передаточной функции соответствует следующее дифференциальное уравнение, связывающее $Z(t)$ и $V(t)$

$$T_Z \cdot \frac{d}{dt} Z(t) + Z(t) = \sqrt{\frac{S_Z(0)}{L}} \cdot V(t),$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = -\frac{1}{T_Z} \cdot Z(t) + \sqrt{\frac{S_Z(0)}{L \cdot T_Z^2}} \cdot V(t).$$

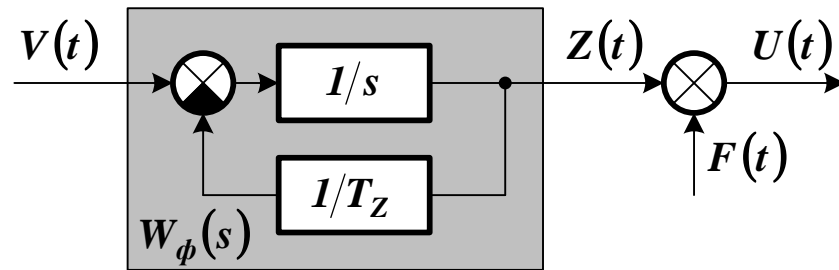
Чтобы привести это уравнение к виду (4.43), спектральная плотность белого шума L принимается равной $2 \cdot D_Z / T_Z$. Тогда

$$\sqrt{\frac{1}{L} \cdot \frac{S_Z(0)}{T_Z^2}} = \sqrt{\frac{T_Z}{2 \cdot D_Z} \cdot \frac{2 \cdot D_Z \cdot T_Z}{T_Z^2}} = 1$$

Окончательно $Z(t)$ можно представить, как

$$\frac{d}{dt} Z(t) = -\frac{1}{T_Z} \cdot Z(t) + V(t) = A \cdot Z(t) + V(t).$$

где $A = -1/T_Z$. Соответствующая этому уравнению структура формирующего фильтра показана на рисунке.



При постоянных A , L и N уравнение (4.47) решается как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{d}{dt} r = L + 2 \cdot A \cdot r - r^2 / N, \quad \int \frac{dr}{L + 2 \cdot A \cdot r - r^2 / N} = \int dt.$$

После интегрирования получается выражение

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + L/N}} \cdot \ln \left(\frac{-r/N + A - \sqrt{A^2 + L/N}}{-r/N + A + \sqrt{A^2 + L/N}} \right) = t + \ln(C),$$

где C — постоянная интегрирования.

Последнее выражение можно переписать следующим образом

$$\ln \left(\frac{1}{C} \cdot \frac{-r/N + A - \sqrt{A^2 + L/N}}{-r/N + A + \sqrt{A^2 + L/N}} \right) = t \cdot \sqrt{A^2 + L/N}.$$

В соответствии с (4.52) $r(0) = R_Z(0,0) = D_Z$, поэтому постоянная интегрирования равна

$$C = \frac{-D_Z/N + A - \sqrt{A^2 + L/N}}{-D_Z/N + A + \sqrt{A^2 + L/N}}.$$

Можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{-r(t)/N + A - \sqrt{A^2 + L/N}}{-r(t)/N + A + \sqrt{A^2 + L/N}} \cdot \frac{-D_Z/N + A + \sqrt{A^2 + L/N}}{-D_Z/N + A - \sqrt{A^2 + L/N}} = \\ & = \exp\left(t \cdot \sqrt{A^2 + L/N}\right) \end{aligned}$$

После необходимых преобразований окончательно определяется функция $r(t)$. При $L = 2 \cdot D_Z / T_Z$ и $A = -1/T_Z$

$$r(t) = \frac{\rho \cdot N}{T_Z} \cdot \frac{(1 - \sqrt{1 + \rho}) - (1 + \sqrt{1 + \rho}) \cdot \exp(\beta \cdot t)}{(2 + \rho - 2 \cdot \sqrt{1 + \rho}) - (2 + \rho + 2 \cdot \sqrt{1 + \rho}) \cdot \exp(\beta \cdot t)},$$

где $\beta = \sqrt{A^2 + L/N}$, $\rho = S_Z(0)/S_F(0)$. После подстановки значения $t \rightarrow +\infty$, определяется величина D_E в установившемся режиме

$$r(\infty) = D_E = \frac{N}{T_Z} \cdot \frac{\rho \cdot (1 + \sqrt{1 + \rho})}{2 + \rho + 2 \cdot \sqrt{1 + \rho}} = \frac{2 \cdot D_Z}{1 + \sqrt{1 + \rho}}.$$

Из уравнения (4.46) находится функция $C(t)$

$$C(t) = \frac{\rho}{T_Z} \cdot \frac{(1 - \sqrt{1 + \rho}) - (1 + \sqrt{1 + \rho}) \cdot \exp(\beta \cdot t)}{(2 + \rho - 2 \cdot \sqrt{1 + \rho}) - (2 + \rho + 2 \cdot \sqrt{1 + \rho}) \cdot \exp(\beta \cdot t)}.$$

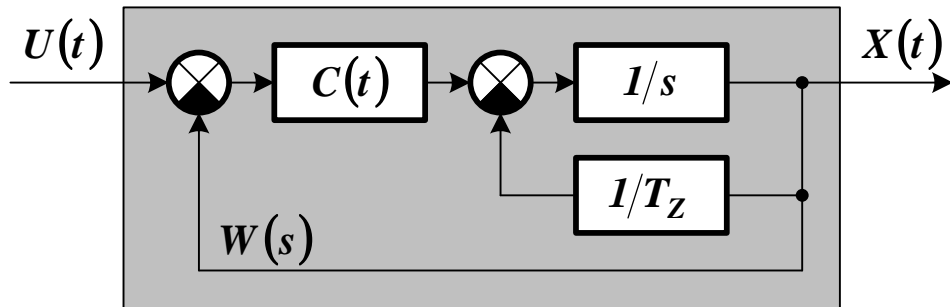
Значения функции $C(t)$ в начальный момент времени (при $t = 0$) и в установившемся режиме (при $t \rightarrow +\infty$) равны

$$C(0) = \frac{\rho}{2 \cdot T_Z} = \frac{D_Z}{N}, \quad C(\infty) = \frac{\rho}{T_Z \cdot (1 + \sqrt{1 + \rho})}.$$

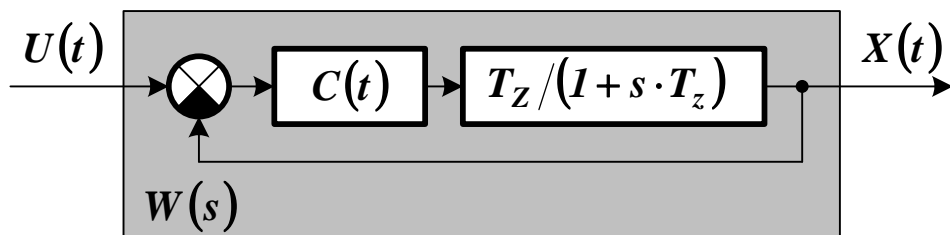
Дифференциальное уравнение оптимального фильтра Калмана-Бьюси, аналогичное (4.48), имеет вид

$$\frac{d}{dt} X(t) = -X(t)/T_Z + C(t) \cdot [U(t) - X(t)].$$

Соответствующая этому уравнению структура оптимального фильтра показана на рисунке.



Заменяя интегрирующее звено, охваченное обратной связью, инерционным звеном, можно представить структуру фильтра Калмана-Бьюси иначе.



Для установившегося режима можно определить передаточную функцию оптимального фильтра как замкнутой системы.

$$W(s) = \frac{C(\infty) \cdot T_Z / (1 + s \cdot T_Z)}{1 + C(\infty) \cdot T_Z / (1 + s \cdot T_Z)} = \frac{K}{1 + s \cdot T},$$

$$K = \frac{C(\infty) \cdot T_Z}{1 + C(\infty) \cdot T_Z} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \rho}}, \quad T = \frac{T_Z}{1 + C(\infty) \cdot T_Z} = \frac{T_Z}{\sqrt{1 + \rho}}.$$



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем заключается общая задача синтеза линейных систем при случайных воздействиях? Какие преобразования входного сигнала может выполнять синтезируемая система?

2. Что понимается под статистической оптимизацией системы? Что считается критерием оптимальности системы при ее статистической оптимизации?

3. Какие задачи могут решаться в ходе статистической оптимизации системы?

4. Как определяются параметры системы с заданной структурой, оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной ошибки? По какому принципу отбираются параметры системы для ее статистической оптимизации?

5. Как синтезируется система с произвольной структурой, оптимальная по критерию минимума среднеквадратичной ошибки?

6. Что считается физически реализуемой системой? В чем заключается методика Боде и Шеннона, применяемая для синтеза физической реализуемой системы?

7. Что считается оптимальным фильтром Винера? Какова область его применения? Каков порядок синтеза оптимального фильтра Винера?

8. Что считается оптимальным фильтром Калмана-Бьюси? Какова область его применения? Каков порядок синтеза оптимального фильтра Калмана-Бьюси?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (см. пример 2.9)

$$W(s) = \frac{K \cdot (T \cdot s + 1)}{s^2}.$$

На вход системы подается регулярный сигнал

$$g(t) = a \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2}$$

и случайная помеха $F(t)$, представляющая собой белый шум со спектральной плотностью $S_F(\omega) = N$. Определить значение постоянной времени T , обеспечивающей минимум среднеквадратичной ошибки системы в установившемся режиме, и величину этой ошибки.

4.2. Решить предыдущую задачу в предположении, что можно изменять как значение постоянной времени T , так и коэффициент усиления K .

4.3. Решить задачу 4.1 в предположении, что передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K \cdot (T \cdot s + 1)}{s^2 \cdot (\tau \cdot s + 1)}.$$

4.4. На вход системы поступают независимые полезный случайный процесс $G(t)$ и помеха $F(t)$ (см. рисунок 4.3). Определить оптимальную по критерию минимума дисперсии ошибки передаточную функцию следящей системы ($H(s) = 1$). Спектральные плотности входных случайных процессов равны

$$S_G(\omega) = \frac{S_G(0)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2}, \quad S_F(\omega) = \frac{S_F(0)}{1 + T_F^2 \cdot \omega^2}.$$

4.5. На вход системы поступают независимые полезный случайный процесс $G(t)$ и помеха $F(t)$ (см. рисунок 4.3). Определить оптимальную по минимуму среднеквадратичной ошибки передаточную

функцию системы, решающей задачу интегрирования ($H(s) = 1/s$).
Спектральные плотности входных случайных процессов равны

$$S_G(\omega) = \frac{S_G(0)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2}, \quad S_F(\omega) = S_F(0).$$

4.6. Решить предыдущую задачу в предположении, что система решает задачу дифференцирования ($H(s) = s$).

4.7. На вход системы поступают независимые полезный случайный процесс $G(t)$ и помеха $F(t)$ (см. рисунок 4.3). Определить импульсную переходную характеристику следящей системы, обеспечивающую ее минимальную среднеквадратичную ошибку, если

$$R_G(\tau) = 3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau|), \quad R_F(\tau) = 2 \cdot \exp(-|\tau|).$$

5 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

5.1 Организация лабораторного практикума

Основной **целью** выполнения лабораторных работ является получение устойчивых практических навыков исследования случайных процессов. В ходе выполнения работ у студента должно сформироваться представление о принципах анализа и синтеза систем, находящихся под влиянием случайных воздействий.

Примечание. Так как выполнение лабораторных работ предполагает широкое использование информационных технологий, то вспомогательной целью практикума может считаться изучение возможностей программных средств решения задач статистической динамики (например, *MathCAD* или *Matlab*).

В ходе выполнения лабораторного практикума должны решаться следующие **задачи**:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- выработка умения оценивать статистические характеристики динамических систем;
- выработка умения самостоятельно ставить и решать задачи анализа и синтеза динамических систем;
- изучение принципов работы прикладного программного обеспечения.

Для выполнения лабораторных работ студент должен **знать**:

- основные положения теории вероятностей и математической статистики;
- основные положения теории функции комплексного переменного и операционного исчисления;
- основные характеристики случайных процессов;

- закономерности и специфику поведения систем под влиянием случайных воздействий;
- методы анализа систем, находящихся под влиянием случайных воздействий;
- методы синтеза систем, оптимальных по выбранным статистическим критериям;
- возможности новых информационных технологий решения математических задач.

Студент должен уметь:

- формулировать требования к системам на этапах их анализа и синтеза;
- корректно использовать математические закономерности поведения систем в условиях статистической неопределенности;
- представлять результаты решения отдельных задач в удобном для восприятия и дальнейшего использования виде.

Практикум предполагает выполнение пяти лабораторных работ, тематика которых в целом соответствует структуре настоящего пособия. В каждой работе решается одна конкретная задача. Полученные один раз результаты могут использоваться на всех последующих этапах лабораторного практикума.

Обязательным условием допуска студента к выполнению лабораторной работы является усвоение соответствующего теоретического материала. Работа считается выполненной и защищенной, если студент ответил на все вопросы по методике ее проведения и теории, получил необходимые результаты и дал им правильную оценку, продемонстрировал уверенное владение соответствующими инструментальными средствами.

Примечание. Для проверки теоретических знаний могут использоваться контрольные вопросы, приведенные в соответствующих разделах пособия.

Практикум не претендует на полноту охвата всех проблем, решаемых при анализе и синтезе стохастических систем. Не ставилась также целью изучение приемов решения прикладных задач в конкретной программной среде. Тем не менее, автор надеется, что реализация предлагаемой программы практической подготовки позволит активизировать самостоятельную работу студентов, упрочить их теоретические знания и усовершенствовать навыки решения задач в области статистической динамики систем.

5.2 Лабораторная работа №1. Определение статистических характеристик случайных процессов

Цель работы — приобретение навыков оценивания основных статистических характеристик случайных процессов.

Содержание работы — расчет статистических характеристик случайных процессов с заданными законами распределения по ограниченному набору опытных данных.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить:

- определение случайных процессов и их виды;
- основные статистические характеристики случайных процессов (функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, спектральную плотность) и их свойства.

Все необходимые теоретические сведения и расчетные формулы содержатся в данном пособии. Варианты заданий для выполнения лабораторной работы приведены в таблице 5.1 (колонки B_1 и B_2 определяют законы распределения, колонки Π_1 и Π_2 — значения параметров распределения из таблицы 5.2).

При выполнении лабораторной работы необходимо:

- сгенерировать две выборки объемом 50 — 100 случайных чисел с заданными законами распределения, имитирующие стационарные эргодические случайные процессы;

- для каждой выборки случайных чисел определить функцию распределения и плотность вероятности, оценить математическое ожидание и дисперсию;
- для каждой выборки случайных чисел определить корреляционные функции, спектральные плотности, взаимные корреляционные функции и взаимные спектральные плотности.

Таблица 5.1 — Варианты заданий для выполнения лабораторной работы №1

<i>№</i>	<i>B₁</i>	<i>П₁</i>	<i>П₂</i>	<i>B₂</i>	<i>П₁</i>	<i>П₂</i>
1	1	0,0	1,0	3	0,0	0,2
2	2	0,5	—	1	3,0	5,0
3	3	1,0	0,5	2	2,0	—
4	1	0,0	2,0	2	0,5	—
5	2	1,0	—	2	1,0	—
6	3	0,0	0,4	1	4,0	5,0
7	1	0,0	3,0	1	1,0	2,0
8	2	1,5	—	1	1,0	3,0
9	3	2,0	0,3	3	1,0	0,3
10	1	0,0	4,0	3	2,0	0,4
11	2	2,0	—	3	0,0	0,5
12	3	0,0	0,2	2	1,5	—
13	1	0,0	5,0	2	2,0	—
14	2	0,5	—	1	2,0	4,0
15	3	1,0	0,1	1	3,0	4,0
16	1	1,0	5,0	1	1,0	4,0
17	2	1,0	—	2	0,5	—
18	3	2,0	0,1	3	1,0	0,4
19	1	2,0	5,0	3	2,0	0,3
20	2	1,5	—	3	0,0	0,2

Таблица 5.2 — Типы и параметры распределений

<i>№</i>	<i>B</i>	<i>П₁</i>	<i>П₂</i>
1	Равномерное распределение	<i>a</i>	<i>b</i>
2	Экспоненциальное распределение	λ	—
3	Нормальное распределение	<i>m_x</i>	σ_x

Функцию распределения рекомендуется находить по выражению (1.50). Аналог плотности вероятности рекомендуется получать по формуле (1.51). Качество дискретной аппроксимации характеристик можно оценить путем их сравнения с результатами, полученными с помощью программных средств (сведения об основных функциях распределения системы *MathCAD* приведены в таблице 5.3).

Таблица 5.3 — Функции распределения *MathCAD*

<i>Функция</i>	<i>Результат</i>
<i>runif</i> (<i>n, a, b</i>)	Вектор <i>n</i> случайных чисел, имеющих равномерное распределение в диапазоне от <i>a</i> до <i>b</i> .
<i>r exp</i> (<i>n, λ</i>)	Вектор <i>n</i> случайных чисел, имеющих экспоненциальное распределение с затуханием λ .
<i>rnorm</i> (<i>n, m, σ</i>)	Вектор <i>n</i> случайных чисел, имеющих нормальное распределение с математическим ожиданием <i>m</i> и среднеквадратическим отклонением σ .
<i>punif</i> (<i>x, a, b</i>)	Функция равномерного распределения <i>x</i> в диапазоне от <i>a</i> до <i>b</i> .
<i>p exp</i> (<i>x, λ</i>)	Функция экспоненциального распределения <i>x</i> с затуханием λ .
<i>pnorm</i> (<i>x, m, σ</i>)	Функция нормального распределения <i>x</i> с математическим ожиданием <i>m</i> и среднеквадратическим отклонением σ .
<i>dunif</i> (<i>x, a, b</i>)	Плотность вероятности равномерного распределения <i>x</i> в диапазоне от <i>a</i> до <i>b</i> .
<i>d exp</i> (<i>x, λ</i>)	Плотность вероятности экспоненциального распределения <i>x</i> с затуханием λ .
<i>dnorm</i> (<i>x, m, σ</i>)	Плотность вероятности нормального распределе-

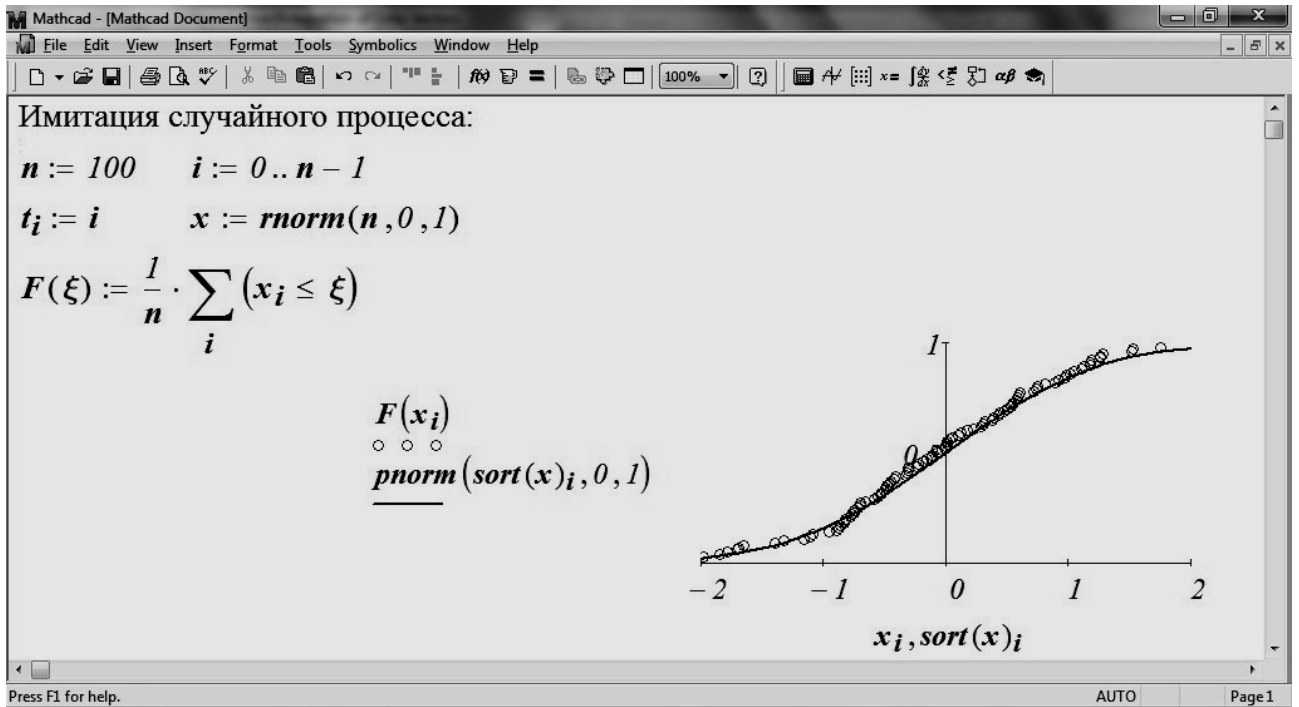
Функция	Результат
	ния x с математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением σ .
$hist(D, x)$	Вектор частотного распределения x по интервалам, границы которых хранятся в векторе D .
$hist(k, x)$	Вектор частотного распределения x по k интервалам от x_{min} до x_{max} .

Фрагменты документа *MathCAD*, иллюстрирующие оценивание характеристик выборки случайных чисел, показаны на рисунке 5.1.

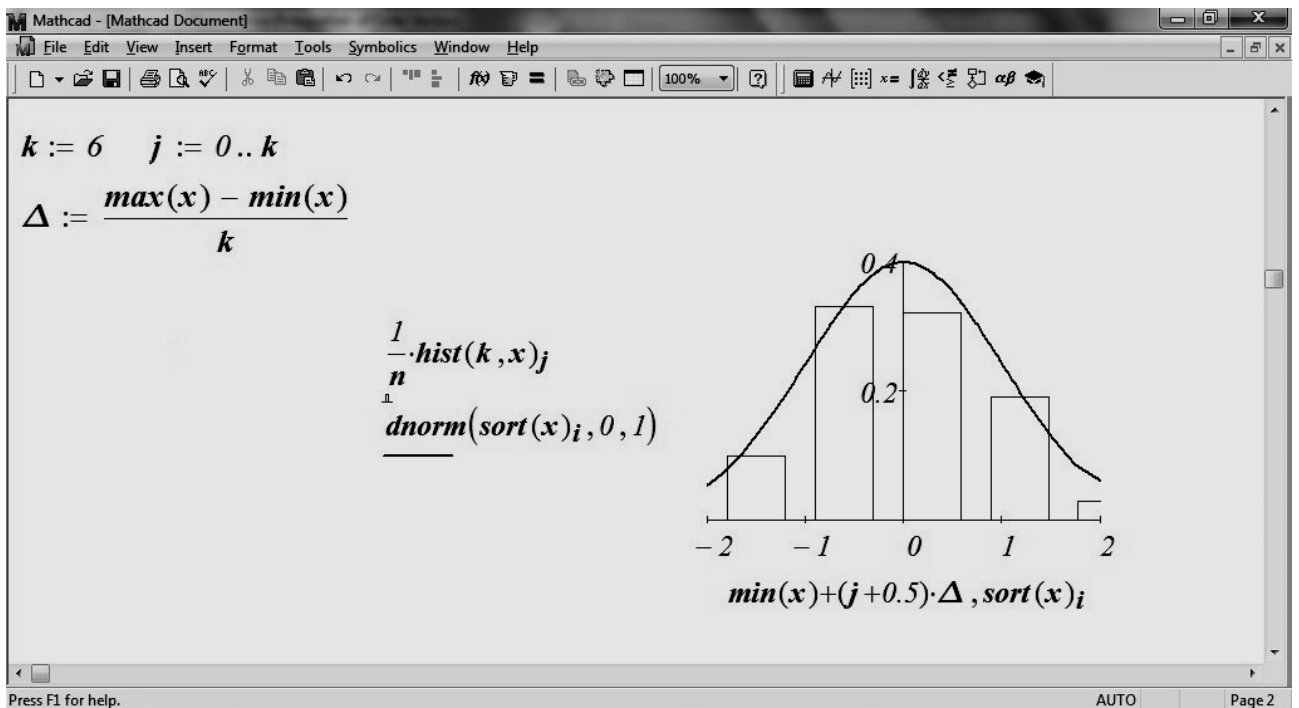
Для вычисления статистических характеристик выборок рекомендуется использовать дискретные соотношения (1.54) и (1.57). Найденные значения рекомендуется сравнить с результатами, полученными с помощью стандартных функций (сведения о статистических функциях *MathCAD* приведены в таблице 5.4).

Таблица 5.4 — Статистические функции *MathCAD*

Функция	Результат
$mean(x)$	Среднее значение x , вычисляемое по формуле $mean(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i .$
$var(x)$	Дисперсия x , вычисляемая по формуле $var(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [x_i - mean(x)]^2 .$ <p>Для практического использования полученное значение должно быть исправлено на число степеней свободы по схеме $var(x) \cdot n / (n - 1)$.</p>
$stdev(x)$	Среднеквадратическое отклонение X , вычисляемое по формуле $stdev(x) = \sqrt{var(x)} .$ <p>Для практического использования полученное значение должно быть исправлено на число степеней свободы по схеме $stdev(x) \cdot \sqrt{n / (n - 1)}$.</p>



a)



б)

Рисунок 5.1 — Определение функции распределения (а) и плотности вероятности (б)

Корреляционные функции выборок и взаимные корреляционные функции могут определяться по формулам вида (2.68). Чтобы снизить погрешность их определения при существенных изменениях случайной величины, рекомендуется выполнить интерполяцию исходных данных для меньшего шага по времени (см. рисунок 5.2 (а)). Спектральные плотности выборок и их взаимные спектральные плотности могут быть найдены путем численного интегрирования найденных экспериментально корреляционных функций с использованием уравнений (2.43) и (2.47).

Фрагменты документа *MathCAD*, иллюстрирующие оценивание этих характеристик, показаны на рисунке 5.2.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- исходные данные для выполнения лабораторной работы;
- результаты оценивания статистических характеристик случайных процессов;
- графики функций распределения, плотностей вероятности, корреляционных функций и спектральных плотностей.

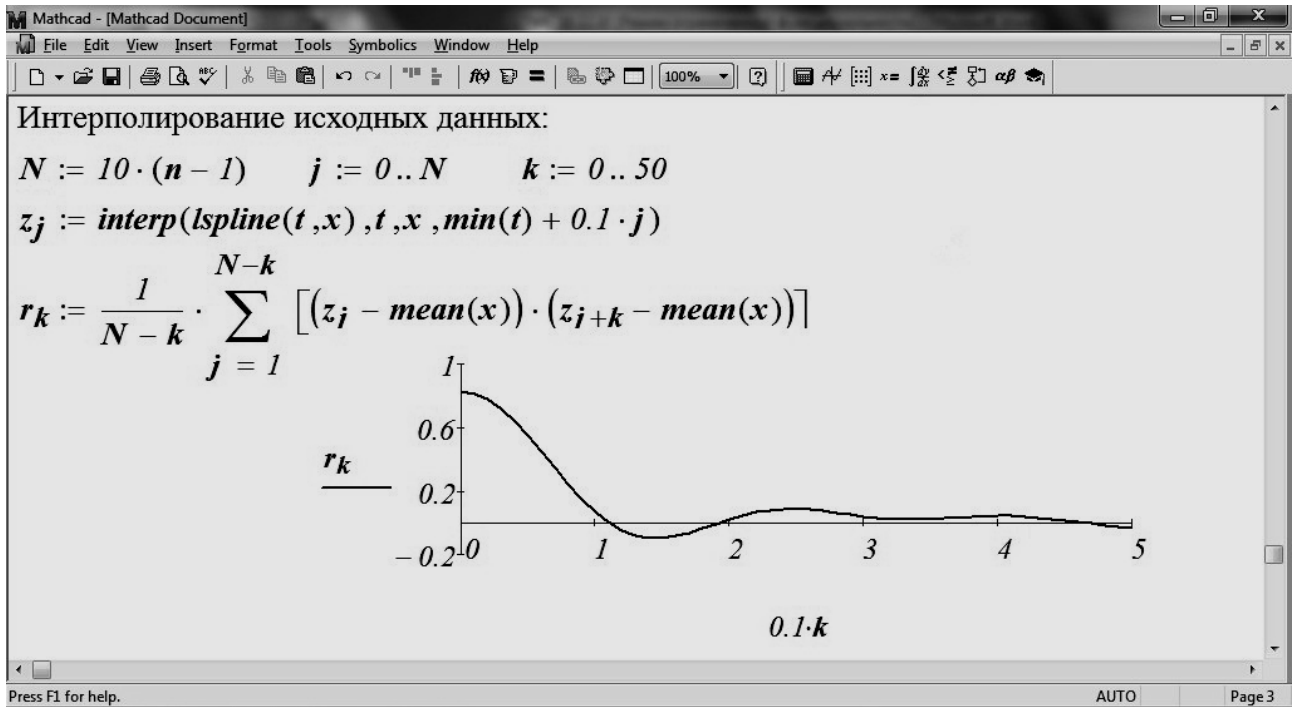
5.3 Лабораторная работа №2. Анализ системы при случайных воздействиях

Цель работы — приобретение навыков расчета линейных систем при случайных воздействиях.

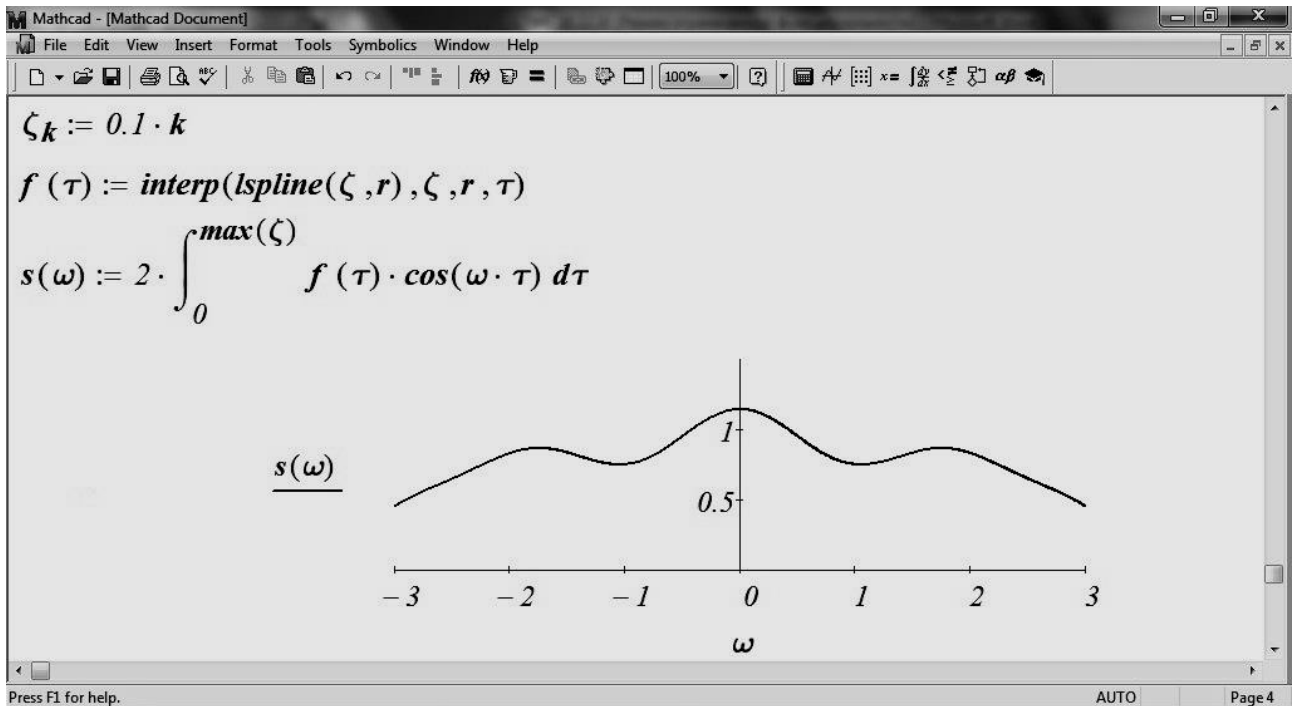
Содержание работы — расчет регулярной и случайной составляющей случайного процесса на выходе линейной системы.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить:

- правила определения характеристик случайных процессов на выходе системы по характеристикам ее входных воздействий;
- правила расчета регулярной составляющей ошибки линейной системы по характеристикам ее входных воздействий;
- правила расчета случайной составляющей ошибки линейной системы по характеристикам ее входных воздействий.



a)



б)

Рисунок 5.2 — Определение корреляционной функции (а) и спектральной плотности (б)

Все необходимые теоретические сведения и расчетные формулы содержатся в данном пособии. Варианты заданий для выполнения лабораторной работы приведены в таблице 5.5 (принять $K = 1$). Структура рассчитываемой системы показана на рисунке 5.3.

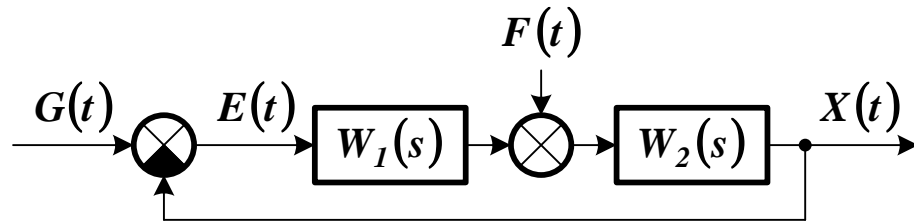


Рисунок 5.3 — Структура рассчитываемой системы

При выполнении лабораторной работы необходимо:

- определить передаточные функции системы по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка»;
- определить регулярную составляющую ошибки по каждому из каналов как реакцию системы на стандартные единичные ступенчатые воздействия;
 - определить дисперсию ошибки по каждому из каналов;
 - промоделировать поведение системы.

Определение дисперсии ошибки целесообразно проводить численно. Для моделирования поведения системы рекомендуется сгенерировать помеху с нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием, рассчитанной дисперсией и наложить ее на регулярную составляющую ошибки (см. рисунок 5.4).

Таблица 5.5 — Варианты заданий для выполнения лабораторных работ №3 и №4

N_2	$W_I(s)$	$W_2(K, s)$	$S_G(\omega)$	$S_F(\omega)$
1	$s + 1$	$K \cdot s / (s + 1)$	$0,4 / (1 + \omega^2)$	0,1
2	$(s + 1) / s$	$K \cdot s / (3 \cdot s + 1)$	$0,3 / (1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,2
3	$1 / s$	$K \cdot s / (5 \cdot s + 1)$	$0,2 / (1 + 3 \cdot \omega^2)$	0,3
4	1	$K \cdot s / (7 \cdot s + 1)$	$0,1 / (1 + 4 \cdot \omega^2)$	0,4
5	s	$K \cdot s / (9 \cdot s + 1)$	$0,1 / (1 + 5 \cdot \omega^2)$	0,1
6	$s + 1$	$K / (s + 1)$	$0,2 / (1 + 6 \cdot \omega^2)$	0,2
7	$(s + 1) / s$	$K / (3 \cdot s + 1)$	$0,3 / (1 + 7 \cdot \omega^2)$	0,3
8	$1 / s$	$K / (5 \cdot s + 1)$	$0,4 / (1 + 8 \cdot \omega^2)$	0,4
9	1	$K / (7 \cdot s + 1)$	$0,1 / (1 + 9 \cdot \omega^2)$	0,1
10	s	$K / (9 \cdot s + 1)$	$0,2 / (1 + 9 \cdot \omega^2)$	0,2
11	$s + 1$	$K \cdot s / (2 \cdot s + 1)$	$0,3 / (1 + 8 \cdot \omega^2)$	0,3
12	$(s + 1) / s$	$K \cdot s / (4 \cdot s + 1)$	$0,4 / (1 + 7 \cdot \omega^2)$	0,4
13	$1 / s$	$K \cdot s / (6 \cdot s + 1)$	$0,1 / (1 + 6 \cdot \omega^2)$	0,4
14	1	$K \cdot s / (8 \cdot s + 1)$	$0,2 / (1 + 5 \cdot \omega^2)$	0,3
15	s	$K / (2 \cdot s + 1)$	$0,3 / (1 + 4 \cdot \omega^2)$	0,2
16	$s + 1$	$K / (4 \cdot s + 1)$	$0,4 / (1 + 3 \cdot \omega^2)$	0,1
17	$(s + 1) / s$	$K / (6 \cdot s + 1)$	$0,1 / (1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,1
18	$1 / s$	$K / (8 \cdot s + 1)$	$0,2 / (1 + \omega^2)$	0,2
19	1	$K \cdot (2 \cdot s + 1) / s^2$	$0,2 / (1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,3
20	$1 / s$	$K \cdot (4 \cdot s + 1) / s$	$0,1 / (1 + \omega^2)$	0,4

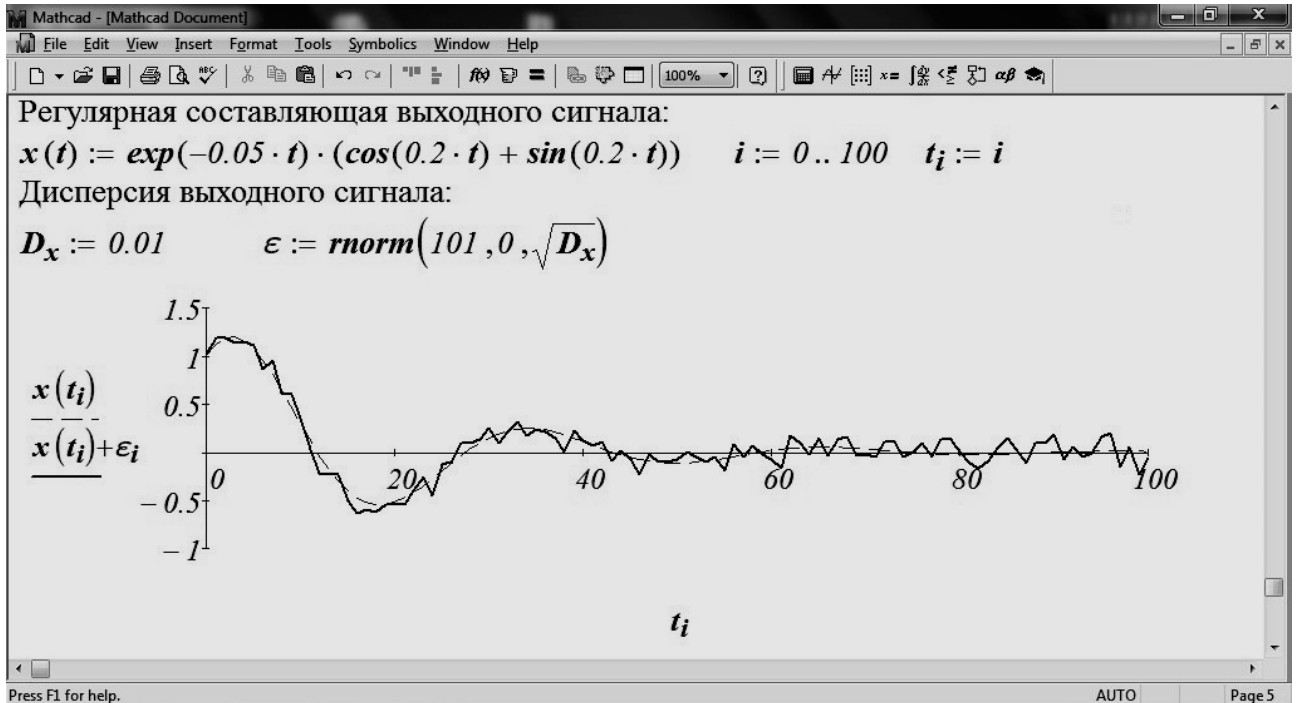


Рисунок 5.4 — Моделирование поведения системы

Содержание отчета о лабораторной работе:

- исходные данные для выполнения лабораторной работы;
- результаты определения передаточных функций системы по ошибке для каждого из каналов;
- результаты расчета регулярных и случайных составляющих ошибки для каждого из каналов;
- графики переходных процессов для каждого из каналов.

5.4 Лабораторная работа №3. Определение оптимальных параметров системы

Цель работы — приобретение навыков синтеза линейных систем с заданной структурой, обеспечивающих минимум среднеквадратичной ошибки, при случайных воздействиях.

Содержание работы — определение параметров линейной системы, обеспечивающих минимум ее среднеквадратичной ошибки.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить:

- общие правила синтеза линейных систем при случайных воздействиях;
- правила синтеза систем с заданной структурой при случайных воздействиях.

Все необходимые теоретические сведения и расчетные формулы содержатся в данном пособии. Варианты заданий для выполнения лабораторной работы приведены в таблице 5.5. Структура синтезируемой системы показана на рисунке 5.3.

При выполнении лабораторной работы необходимо:

- определить передаточные функции системы по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка» как функции коэффициента усиления разомкнутой системы;
 - определить спектральные плотности составляющих ошибки по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка» и суммарную спектральную плотность ошибки как функции коэффициента усиления разомкнутой системы;
 - определить дисперсию ошибки как функцию коэффициента усиления разомкнутой системы;
 - определить оптимальное значение коэффициента усиления разомкнутой системы из условия минимума суммарной дисперсии ошибки;
 - определить регулярную составляющую ошибки для каждого из каналов при выбранном коэффициенте усиления разомкнутой системы как реакцию системы на стандартные единичные ступенчатые воздействия;
 - определить дисперсию ошибки для каждого из каналов при выбранном коэффициенте усиления разомкнутой системы;
 - промоделировать поведение системы.
- Расчет дисперсии и моделирование системы рекомендуется проводить так же, как и в работе №2.
- Содержание отчета о лабораторной работе:
- исходные данные для выполнения лабораторной работы;

- схема определения оптимального коэффициента усиления;
- результаты расчета регулярных и случайных составляющих ошибки для каждого из каналов;
- графики переходных процессов для каждого из каналов.

Рекомендуется также выполнить сравнение найденных показателей точности системы с результатами выполнения работы №2.

5.5 Лабораторная работа №4. Синтез оптимальной системы с произвольной структурой

Цель работы — приобретение навыков синтеза линейных систем с произвольной структурой, обеспечивающих минимум среднеквадратичной ошибки, при случайных воздействиях.

Содержание работы — определение передаточной функции линейной системы, находящейся под влиянием случайного воздействия, которая обеспечивает минимум ее среднеквадратичной ошибки.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить:

- общие правила синтеза линейных систем при случайных воздействиях;
- правила синтеза систем с произвольной структурой при случайных воздействиях.

Все необходимые теоретические сведения и расчетные формулы содержатся в данном пособии. Варианты заданий для выполнения лабораторной работы приведены в таблице 5.6. Структура системы показана на рисунке 4.3.

Таблица 5.6 — Варианты заданий для выполнения лабораторных работ №4 и №5

$N_{\text{д}}$	$S_G(\omega)$	$S_F(\omega)$	$H(s)$	$N_{\text{д}}$	$S_G(\omega)$	$S_F(\omega)$	$H(s)$
1	$0,4/(1 + \omega^2)$	0,1	1	11	$0,3/(1 + 8 \cdot \omega^2)$	0,3	s
2	$0,3/(1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,2	s	12	$0,4/(1 + 7 \cdot \omega^2)$	0,4	1/s
3	$0,2/(1 + 3 \cdot \omega^2)$	0,3	1/s	13	$0,1/(1 + 6 \cdot \omega^2)$	0,4	1
4	$0,1/(1 + 4 \cdot \omega^2)$	0,4	1	14	$0,2/(1 + 5 \cdot \omega^2)$	0,3	s
5	$0,1/(1 + 5 \cdot \omega^2)$	0,1	s	15	$0,3/(1 + 4 \cdot \omega^2)$	0,2	1/s
6	$0,2/(1 + 6 \cdot \omega^2)$	0,2	1/s	16	$0,4/(1 + 3 \cdot \omega^2)$	0,1	1
7	$0,3/(1 + 7 \cdot \omega^2)$	0,3	1	17	$0,1/(1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,1	s
8	$0,4/(1 + 8 \cdot \omega^2)$	0,4	s	18	$0,2/(1 + \omega^2)$	0,2	1/s
9	$0,1/(1 + 9 \cdot \omega^2)$	0,1	1/s	19	$0,2/(1 + 2 \cdot \omega^2)$	0,3	1
10	$0,2/(1 + 9 \cdot \omega^2)$	0,2	1	20	$0,1/(1 + \omega^2)$	0,4	s

При выполнении лабораторной работы необходимо:

- определить физически реализуемую передаточную функцию замкнутой системы, выполняющей заданное преобразование полезного сигнала при минимуме среднеквадратичной ошибки;
- определить передаточную функцию разомкнутой системы;
- определить передаточные функции системы по каналам «полезный сигнал — ошибка» и «помеха — ошибка»;
- определить дисперсию ошибки для каждого из каналов;
- промоделировать поведение системы.

Расчет дисперсии и моделирование системы рекомендуется проводить так же, как и в работах №2-3.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- исходные данные для выполнения лабораторной работы;
- схема определения физически реализуемой передаточной функции разомкнутой системы;

- результаты расчета регулярных и случайных составляющих ошибки для каждого из каналов;
- графики переходных процессов для каждого из каналов.

5.6 Лабораторная работа №5. Синтез оптимального фильтра Калмана-Бьюси

Цель работы — приобретение навыков синтеза в пространстве состояний следящих систем, обеспечивающих минимум среднеквадратичной ошибки, при случайных воздействиях.

Содержание работы — определение передаточной функции линейной системы, находящейся под влиянием случайного воздействия, которая обеспечивает минимум ее среднеквадратичной ошибки.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить:

- основы теории оптимальной линейной фильтрации;
- правила синтеза оптимального фильтра Калмана-Бьюси в пространстве состояний.

Все необходимые теоретические сведения и расчетные формулы содержатся в данном пособии. Спектральные плотности полезного сигнала и помехи, необходимые для выполнения лабораторной работы, приведены в таблице 5.6.

При выполнении лабораторной работы необходимо:

- определить параметры формирующего фильтра;
- разрешить уравнение Риккати для оценки дисперсии случайного процесса на выходе системы;
- определить параметры оптимального фильтра Калмана-Бьюси;
- промоделировать поведение системы.

Моделирование системы рекомендуется проводить так же, как и в предыдущих работах.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- исходные данные для выполнения лабораторной работы;

- результаты расчета параметров формирующего фильтра;
- результаты расчета дисперсии выходного случайного процесса (решения уравнения Риккати);
- результаты расчета параметров оптимального фильтра Калмана-Бьюси;
- графики переходных процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СТАНДАРТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$J_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n(j \cdot \omega)}{A_n(j \cdot \omega) \cdot A_n(-j \cdot \omega)} d\omega.$$

Полиномы $A_n(j \cdot \omega)$ и $B_n(j \cdot \omega)$ порядка n имеют вид

$$A_n(j \cdot \omega) = a_0 \cdot (j \cdot \omega)^n + a_1 \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$B_n(j \cdot \omega) = b_0 \cdot (j \cdot \omega)^{2 \cdot n - 2} + b_1 \cdot (j \cdot \omega)^{2 \cdot n - 4} + \dots + b_{n-1},$$

и все корни $A_n(j \cdot \omega)$ расположены в левой полуплоскости $j \cdot \omega$.

При $n = 1$

$$J_1 = \frac{b_0}{2 \cdot a_0 \cdot a_1}.$$

При $n = 2$

$$J_2 = \frac{-b_0 + a_0 \cdot b_1 / a_2}{2 \cdot a_0 \cdot a_1}.$$

При $n = 3$

$$J_3 = \frac{-a_2 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1 - a_0 \cdot a_1 \cdot b_2 / a_3}{2 \cdot a_0 \cdot (a_0 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_2)}.$$

При $n = 4$

$$J_4 = \frac{U_4}{\Delta_4},$$

$$U_4 = (a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4) \cdot b_0 - a_0 \cdot a_3 \cdot b_1 + a_0 \cdot a_1 \cdot b_2 + \\ + a_0 \cdot (a_0 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_2) \cdot b_3 / a_4,$$

$$\Delta_4 = 2 \cdot a_0 \cdot (a_0 \cdot a_3^2 + a_1^2 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ЛАПЛАСУ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

<i>№</i>	<i>Оригинал $f(t)$</i>	<i>Изображение по Лапласу $F(s)$</i>
1	$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$	1
2	$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
4	$\exp(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
5	$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$\exp(\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
8	$\frac{1}{\omega} \cdot \exp(\alpha \cdot t) \cdot [\alpha \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)]$	$\frac{s}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
9	$A \cdot \exp(\alpha \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi),$ $A = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + \omega^2}, \quad \psi = \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha + \gamma}\right)$	$\frac{s + \gamma}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$

Примечание. α и ω — вещественная и мнимая части корней знаменателя $F(s)$, γ — константа.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 Случайные процессы

1.1. Математическое ожидание случайной величины равно нулю, т. е. $m_X = 0$, так как спектральная плотность при $\omega = 0$ не имеет особенностей типа δ -функции. Дисперсия равна

$$D = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} N d\omega = \frac{N \cdot \omega_1}{\pi}$$

Корреляционная функция случайной величины

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot \tau) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\omega_1} N \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega = \frac{N}{\pi \cdot \tau} \cdot \sin(\omega_1 \cdot \tau). \end{aligned}$$

1.2. Спектральная плотность равна

$$S_X(\omega) = \frac{40}{1 + 0,04 \cdot \omega^2} + 2 \cdot \pi \cdot m_X^2 \cdot \delta(\omega).$$

1.3. Спектральная плотность равна

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot D_X \cdot \left[\frac{2 \cdot \beta - \omega}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2 \cdot \beta + \omega}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right] + \\ &\quad + 2 \cdot \pi \cdot m_X^2 \cdot \delta(\omega). \end{aligned}$$

1.4. Спектральная плотность равна

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau = \\
&= 2 \cdot D_X \cdot \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau = \frac{2 \cdot D_X}{\omega} \cdot \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d[\sin(\omega \cdot \tau)] = \\
&= \frac{2 \cdot D_X}{\omega} \cdot \left[\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) \Big|_0^T + \int_0^T \sin(\omega \cdot \tau) d\left(\frac{\tau}{T}\right) \right] = \\
&= \frac{2 \cdot D_X}{T \cdot \omega^2} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot T)].
\end{aligned}$$

1.5. Спектральная плотность равна

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau = \\
&= D_X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2 \cdot \tau^2 - j \cdot \omega \cdot \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Преобразуем показатель экспоненты к полному квадрату

$$\alpha^2 \cdot \tau^2 + j \cdot \omega \cdot \tau = \left(\alpha \cdot \tau + j \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \alpha} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4 \cdot \alpha^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= D_X \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2}{4 \cdot \alpha^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\alpha \cdot \tau + j \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \alpha}\right)^2\right] d\tau = \\
&= \frac{D_X \cdot \sqrt{\pi}}{\alpha} \cdot \exp\left(-\frac{\omega^2}{4 \cdot \alpha^2}\right).
\end{aligned}$$

2 Анализ систем при случайных воздействиях

2.1. По формулам (3.2) и (3.3) получим

$$m_Y(t) = 8 \cdot \{m_X(t)\} = 8 \cdot m_X(t),$$

$$R_Y(t_1, t_2) = 8 \cdot \{8 \cdot \{R_X(t_1, t_2)\}\} = 64 \cdot R_X(t_1, t_2).$$

2.2. Корреляционная функция

$$R_Y(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} R_X(t_1, t_2) =$$

$$= 2 \cdot \alpha \cdot [1 - 2 \cdot \alpha \cdot (t_1 - t_2)^2] \cdot \exp[-\alpha \cdot (t_1 - t_2)^2]$$

2.3. Корреляционная функция

$$R_Y(t_1, t_2) = D_X \cdot \frac{(t_1 + t_2)^2 \cdot \omega^2 + 2}{(t_1 + t_2)^3} \cdot \cos[\omega \cdot (t_2 - t_1)].$$

2.4. По формулам (3.2) и (3.3) получим

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\lambda) \cdot \exp(-\lambda) d\lambda,$$

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_X(\lambda, \mu) \cdot \exp(-\lambda) \cdot \exp(-\mu) d\lambda d\mu.$$

2.5. По формулам (3.2) и (3.3) получим

$$m_Y(t) = \frac{d}{dt} A \cdot \sin(t) = A \cdot \cos(t),$$

$$R_Y(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} R_X(t_1, t_2) = 2 \cdot \exp\left[-\frac{(t_2 - t_1)^2}{2}\right] \cdot [1 - (t_2 - t_1)^2]$$

$$D_Y(t) = R_Y(t, t) = 2.$$

2.6. Для данной системы весовая функция равна

$$k(t, \lambda) = \frac{K}{T} \cdot \exp\left(-\frac{t - \lambda}{T}\right).$$

Значение математического ожидания

$$\begin{aligned}
 m_Y(t) &= \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot m_X(\lambda) d\lambda = \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{K}{T} \cdot \exp\left(-\frac{t-\lambda}{T}\right) \cdot m_X d\lambda = K \cdot m_X \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{T}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Дисперсия определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 D_Y(t) &= R_Y(t, t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot k(t, \mu) \cdot R_X(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \\
 &= D_X \cdot \frac{K^2}{T^2} \cdot \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-\lambda}{T} - \frac{t-\mu}{T} - \alpha \cdot |\lambda - \mu|\right) d\lambda d\mu = \\
 &= D_X \cdot \frac{K^2}{T^2} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{T}\right) \cdot \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{\lambda + \mu}{T} - \alpha \cdot |\lambda - \mu|\right) d\lambda d\mu.
 \end{aligned}$$

Разобьем интервал интегрирования по переменной μ на две части $[t_0, \lambda]$ и $[\lambda, t]$. Это позволит освободиться от знака модуля и получить табличные интегралы вида

$$\begin{aligned}
 D_Y(t) &= D_X \cdot \frac{K^2}{T^2} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{T}\right) \times \\
 &\times \int_{t_0}^t \left\{ \int_{t_0}^{\lambda} \exp\left[\frac{\lambda + \mu}{T} - \alpha \cdot (\lambda - \mu)\right] d\mu + \int_{\lambda}^t \exp\left[\frac{\lambda + \mu}{T} - \alpha \cdot (\mu - \lambda)\right] d\mu \right\} d\lambda = \\
 &= D_X \cdot \frac{K^2}{1 - \alpha^2 \cdot T^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 - \alpha \cdot T - 2 \cdot \exp\left[-\frac{1 + \alpha \cdot T}{T} \cdot (t - t_0)\right] + \\ &+ (1 + \alpha \cdot T) \cdot \exp\left[-\frac{2}{T} \cdot (t - t_0)\right] \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

2.7. Для данной системы весовая функция равна

$$k(t, \lambda) = \frac{1}{T} \cdot \exp\left(-\frac{t - \lambda}{T}\right).$$

Корреляционная функция белого шума имеет вид

$$R_X(\lambda, \mu) = c^2 \cdot \delta(\lambda - \mu).$$

Дисперсия выходного сигнала

$$\begin{aligned} D_Y(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot k(t, \mu) \cdot R_X(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \\ &= \frac{c^2}{T^2} \cdot \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{2 \cdot t - \lambda - \mu}{T}\right) \cdot \delta(\lambda - \mu) d\lambda d\mu = \\ &= \frac{c^2}{2 \cdot T^2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot t}{T}\right)\right]. \end{aligned}$$

2.8. Значение математического ожидания равно

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^t \exp\left(-\frac{t - \lambda}{T}\right) \cdot (a_0 + a_1 \cdot \lambda) d\lambda = \\ &= a_0 + a_1 \cdot (t - T) - (a_0 - a_1 \cdot T) \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \end{aligned}$$

Дисперсия определится, как

$$\begin{aligned} D_Y(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k(t, \lambda) \cdot k(t, \mu) \cdot R_X(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \\ &= \frac{D_X}{T^2} \cdot \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{2 \cdot t - \lambda - \mu}{T} + 2 \cdot (\lambda + \mu) - |\lambda - \mu|\right] d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Интегрирование производится так же, как и в примере 2.6.

2.9. Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ на выходе системы в установившемся режиме равно

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot [m_G(t-\lambda) + m_F(t-\lambda)] d\lambda = \\
&= \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot (m_G + 0) d\lambda = 4 \cdot m_G \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) d\lambda = \\
&= -2 \cdot m_G \cdot \exp(-2 \cdot \lambda) \Big|_0^{+\infty} = 2 \cdot m_G.
\end{aligned}$$

Дисперсия случайного процесса $X(t)$ находится по формуле

$$\begin{aligned}
D_X &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} k(\lambda) \cdot k(\mu) \cdot [R_G(\lambda - \mu) + R_F(\lambda - \mu)] d\lambda d\mu = \\
&= 32 \cdot \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \exp(-2 \cdot \mu) \cdot \exp(-4 \cdot |\lambda - \mu|) d\lambda d\mu + \\
&+ 48 \cdot \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \exp(-2 \cdot \mu) \cdot \exp(-3 \cdot |\lambda - \mu|) d\lambda d\mu = \\
&= 32 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \left[\int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \mu - 4 \cdot |\lambda - \mu|) d\mu \right] d\lambda + \\
&+ 48 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \left[\int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \mu - 3 \cdot |\lambda - \mu|) d\mu \right] d\lambda = \\
&= 32 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot I_1 d\lambda + 48 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot I_2 d\lambda.
\end{aligned}$$

Разобьем каждый из внутренних интегралов на два. Получим

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\lambda} \exp[-2 \cdot \mu - 4 \cdot (\lambda - \mu)] d\mu + \int_{\lambda}^{+\infty} \exp[-2 \cdot \mu + 4 \cdot (\lambda - \mu)] d\mu = \\
&= \int_0^{\lambda} \exp(2 \cdot \mu - 4 \cdot \lambda) d\mu + \int_{\lambda}^{+\infty} \exp(4 \cdot \lambda - 6 \cdot \mu) d\mu = \\
&= \frac{2}{3} \cdot \exp(-2 \cdot \lambda) - \frac{1}{2} \cdot \exp(-4 \cdot \lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\lambda} \exp[-2 \cdot \mu - 3 \cdot (\lambda - \mu)] d\mu + \int_{\lambda}^{+\infty} \exp[-2 \cdot \mu + 3 \cdot (\lambda - \mu)] d\mu = \\
&= \int_0^{\lambda} \exp(\mu - 3 \cdot \lambda) d\mu + \int_{\lambda}^{+\infty} \exp(3 \cdot \lambda - 5 \cdot \mu) d\mu = \\
&= \frac{6}{5} \cdot \exp(-2 \cdot \lambda) - \exp(-3 \cdot \lambda).
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}
D_X &= 32 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \exp(-2 \cdot \lambda) - \frac{1}{2} \cdot \exp(-4 \cdot \lambda) \right] d\lambda + \\
&+ 48 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-2 \cdot \lambda) \cdot \left[\frac{6}{5} \cdot \exp(-2 \cdot \lambda) - \exp(-3 \cdot \lambda) \right] d\lambda = \\
&= \frac{8}{3} \cdot [\exp(-6 \cdot \lambda) - 4 \cdot \exp(-4 \cdot \lambda)]_0^{+\infty} + \\
&+ \frac{48}{5} \cdot [\exp(-5 \cdot \lambda) - 3 \cdot \exp(-4 \cdot \lambda)]_0^{+\infty} = \frac{112}{15}.
\end{aligned}$$

2.10. Заданным корреляционным функциям соответствуют следующие спектральные плотности входных случайных процессов

$$S_G(\omega) = \frac{16}{16 + \omega^2}, \quad S_F(\omega) = \frac{18}{9 + \omega^2}.$$

Заданной импульсной переходной характеристике соответствует передаточная функция системы

$$W(s) = \frac{4}{s + 2}.$$

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ на выходе системы в изображения по Лапласу равно

$$\begin{aligned}
 M_X(s) &= W(s) \cdot [M_G(s) + M_F(s)] = \\
 &= \frac{4}{s+2} \cdot \left[\frac{m_G}{s} + 0 \right] = 2 \cdot m_G \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right].
 \end{aligned}$$

Оригинал данного выражения

$$m_X(t) = 2 \cdot m_G \cdot [1 - \exp(-2 \cdot t)].$$

В установившемся режиме

$$m_X(\infty) = 2 \cdot m_G \cdot [1 - \exp(-\infty)] = 2 \cdot m_G.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_G(\omega) + |W(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_F(\omega) = \\
 &= \left| \frac{4}{(j \cdot \omega) + 2} \right|^2 \cdot \frac{16}{|4 + (j \cdot \omega)|^2} + \left| \frac{4}{(j \cdot \omega) + 2} \right|^2 \cdot \frac{18}{|3 + (j \cdot \omega)|^2} = \\
 &= \frac{256}{|(j \cdot \omega)^2 + 6 \cdot (j \cdot \omega) + 8|^2} + \frac{288}{|(j \cdot \omega)^2 + 5 \cdot (j \cdot \omega) + 6|^2}.
 \end{aligned}$$

Дисперсия выходного сигнала в установившемся режиме

$$\begin{aligned}
 D_X &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_G(\omega) d\omega = \\
 &= -\frac{256}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 256 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}} - \frac{288}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 288 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{112}{15}.
 \end{aligned}$$

2.11. Дисперсия случайного процесса

$$D_Y = D_X \cdot \frac{\alpha \cdot a_0 \cdot b_1^2 + a_1 \cdot b_0^2}{a_0 \cdot a_1 \cdot (\alpha \cdot a_1 + a_0)}.$$

2.12. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K}{T \cdot s^2 + s + 1}.$$

Спектральная плотность выходного сигнала примет вид

$$S_Y(\omega) = |\Phi(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_X(\omega) = \frac{K^2 \cdot N}{|T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + 1|^2}.$$

Интегрирование $S_Y(\omega)$ по всем частотам дает результат

$$D_Y = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^2 \cdot N}{|T \cdot (j \cdot \omega)^2 + (j \cdot \omega) + 1|^2} d\omega = \frac{K \cdot N}{2}.$$

Очевидно, что дисперсия D_Y не зависит от T .

3 Синтез систем при случайных воздействиях

3.1. Передаточная функция системы по каналу «регулярный сигнал — ошибка» равна

$$W_{GE}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^2}{s^2 + K \cdot T \cdot s + K}.$$

Регулярная составляющая ошибки в установившемся режиме

$$m_E(t) = C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot \frac{d}{dt} g(t) + C_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} g(t) + \dots,$$

где

$$g(t) = a \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2}, \quad \frac{d}{dt} g(t) = a + b \cdot t, \quad \frac{d^2}{dt^2} g(t) = b.$$

Производные более высокого порядка от $g(t)$ по времени равны нулю. Коэффициенты ошибок, найденные после разложения $W_E(s)$ в степенной ряд, равны $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1/K$. Тогда

$$m_E(t) = \frac{b}{K}.$$

Передаточная функция системы по каналу «помеха — ошибка» равна

$$W_{FE}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K \cdot (T \cdot s + 1)}{s^2 + K \cdot T \cdot s + K}.$$

Дисперсия случайной ошибки в установившемся режиме

$$D_E = \frac{K^2 \cdot N}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-T^2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 1}{|(j \cdot \omega)^2 + K \cdot T \cdot (j \cdot \omega) + K|^2} d\omega = \frac{(K \cdot T^2 + 1) \cdot N}{2 \cdot T}.$$

Средний квадрат суммарной ошибки равен

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{b^2}{K^2} + \frac{(K \cdot T^2 + 1) \cdot N}{2 \cdot T}.$$

Для отыскания минимума этого выражения приравняем нулю его первую производную по постоянной времени T

$$2 \cdot K \cdot T^2 - (K \cdot T^2 + 1) = 0,$$

откуда получим $T_{opt} = 1/\sqrt{K}$.

3.2. Дифференцируя выражение для среднего квадрата ошибки по параметрам T и K , получим систему уравнений

$$\begin{cases} T = 1/\sqrt{K}, \\ -\frac{2 \cdot b^2}{K^3} + \frac{T \cdot N}{2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда найдем $K_{opt} = \sqrt[5]{16 \cdot b^4 / N^2}$, $T_{opt} = 1/\sqrt{K_{opt}}$.

3.3. Средний квадрат суммарной ошибки равен

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{b^2}{K^2} + \frac{(K \cdot T^2 + 1) \cdot N}{2 \cdot (T - \tau)}.$$

Оптимальное значение постоянной времени

$$T_{opt} = \tau + \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{K}}.$$

3.4. Спектральная плотность суммарного входного сигнала равна

$$S_G(\omega) + S_F(\omega) = \frac{S_G(0) \cdot (1 + T_F^2 \cdot \omega^2) + S_F(0) \cdot (1 + T_G^2 \cdot \omega^2)}{(1 + T_G^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_F^2 \cdot \omega^2)}.$$

Разложение этого выражения на комплексно-сопряженные сомножители даст результат

$$\Psi(j \cdot \omega) = \sqrt{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega}{(1 + j \cdot T_G \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot T_F \cdot \omega)},$$

$$\Psi(-j \cdot \omega) = \sqrt{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega}{(1 - j \cdot T_G \cdot \omega) \cdot (1 - j \cdot T_F \cdot \omega)}.$$

где $\alpha = T_G \cdot \sqrt{[S_G(0) \cdot T_F^2 + S_F(0) \cdot T_G^2] / [S_G(0) + S_F(0)]}$.

После разложения на элементарные дроби исключается часть, соответствующая неустойчивой системе.

$$\begin{aligned}
\frac{S_G(j \cdot \omega) \cdot H(j \cdot \omega)}{\Psi(-j \cdot \omega)} &= \\
&= \frac{S_G(0)}{1 + T_G^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{(1 - j \cdot T_G \cdot \omega) \cdot (1 - j \cdot T_F \cdot \omega)}{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega} = \\
&= \frac{S_G(0)}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{1 - j \cdot T_F \cdot \omega}{(1 + j \cdot T_G \cdot \omega) \cdot (1 - j \cdot \alpha \cdot \omega)} = \\
&= \frac{S_G(0)}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \left[\frac{T_G + T_F}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega} + \frac{T_F - \alpha}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 - j \cdot \alpha \cdot \omega} \right].
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в скобках имеет полюсы в правой комплексной полуплоскости $j \cdot \omega$. Оно отбрасывается. Реализуемая частотная передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\begin{aligned}
W(j \cdot \omega) &= \frac{1}{\Psi(j \cdot \omega)} \cdot \left[\frac{S_G(0)}{\sqrt{S_G(0) + S_F(0)}} \cdot \frac{T_G + T_F}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot T_G \cdot \omega} \right] = \\
&= \frac{S_G(0)}{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{T_G + T_F}{T_G + \alpha} \cdot \frac{1 + j \cdot T_F \cdot \omega}{1 + j \cdot \alpha \cdot \omega} = K \cdot \frac{T_F \cdot (j \cdot \omega) + 1}{\alpha \cdot (j \cdot \omega) + 1}.
\end{aligned}$$

где коэффициент усиления замкнутой системы

$$K = \frac{S_G(0)}{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{T_G + T_F}{T_G + \alpha}.$$

Реализуемая передаточная функция замкнутой системы в изображениях по Лапласу имеет вид

$$W(s) = K \cdot \frac{T_F \cdot s + 1}{\alpha \cdot s + 1}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = K \cdot \frac{T_F \cdot s + 1}{(\alpha - K \cdot T) \cdot s + (1 - K)}.$$

3.5. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$W(s) = K \cdot \frac{\gamma \cdot s + 1}{s \cdot (\alpha \cdot s + 1)},$$

где значения коэффициентов

$$K = \frac{S_G(0)}{S_G(0) + S_F(0)}, \quad \alpha = T_G \cdot \sqrt{\frac{S_F(0)}{S_G(0) + S_F(0)}}, \quad \gamma = \frac{T_G \cdot \alpha}{T_G + \alpha}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = K \cdot \frac{\gamma \cdot s + 1}{(\alpha - K \cdot \gamma) \cdot s + (1 - K)}.$$

3.6. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{K}{\alpha \cdot s + 1},$$

где значения коэффициентов

$$K = \frac{S_G(0)}{S_G(0) + S_F(0)} \cdot \frac{1}{T_G + \alpha}, \quad \alpha = T_G \cdot \sqrt{\frac{S_F(0)}{S_G(0) + S_F(0)}}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(s) = \frac{K}{\alpha \cdot s + (1 - K)}.$$

3.7. Оптимальная импульсная характеристика системы будет ис-
каться в виде

$$k(t) = D_0 \cdot \delta(t) + D_1 \cdot \exp(-d_1 \cdot t).$$

Требуется найти ее параметры D_0 , D_1 и d_1 . Уравнение Винера-Хопфа в данном случае примет вид

$$\int_0^{+\infty} k(\eta) \cdot R_U(\tau - \eta) d\eta - R_{ZU}(\tau) = 0, \quad \tau \geq 0.$$

Так как синтезируется следящая система, то $Z(t) = G(t)$. Тогда

$$R_U(\tau) = R_G(\tau) + R_F(\tau) = 3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau|) + 2 \cdot \exp(-|\tau|),$$

$$R_{ZU}(\tau) = R_G(\tau) = 3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau|).$$

Подставим значения корреляционных функций и искомой импульсной переходной характеристики в уравнение Винера-Хопфа

$$\int_0^{+\infty} 3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau - \eta|) \cdot [D_0 \cdot \delta(\eta) + D_1 \cdot \exp(-d_1 \cdot \eta)] d\eta +$$

$$+ \int_0^{+\infty} 2 \cdot \exp(-|\tau - \eta|) \cdot [D_0 \cdot \delta(\eta) + D_1 \cdot \exp(-d_1 \cdot \eta)] d\eta -$$

$$- 3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau|) = 0, \quad \tau \geq 0.$$

Преобразуем этот интеграл к виду

$$\int_0^{+\infty} D_0 \cdot \delta(\eta) \cdot [3 \cdot \exp(-2 \cdot |\tau - \eta|) + 2 \cdot \exp(-|\tau - \eta|)] d\eta +$$

$$+ \int_0^{\tau} D_1 \cdot \exp(-d_1 \cdot \eta) \cdot \{3 \cdot \exp[-2 \cdot (\tau - \eta)] + 2 \cdot \exp[-(\tau - \eta)]\} d\eta +$$

$$+ \int_{\tau}^{+\infty} D_1 \cdot \exp(-d_1 \cdot \eta) \cdot \{3 \cdot \exp[-2 \cdot (\eta - \tau)] + 2 \cdot \exp[-(\eta - \tau)]\} d\eta -$$

$$- 3 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) = 0.$$

Выполнив элементарные операции интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
& D_0 \cdot [3 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) + 2 \cdot \exp(-\tau)] + \\
& + \frac{3 \cdot D_1 \cdot \exp(-2 \cdot \tau)}{2 - d_1} \cdot \{\exp[(2 - d_1) \cdot \tau] - 1\} + \\
& + \frac{2 \cdot D_1 \cdot \exp(-\tau)}{1 - d_1} \cdot \{\exp[(1 - d_1) \cdot \tau] - 1\} + \\
& + \frac{3 \cdot D_1 \cdot \exp(2 \cdot \tau)}{2 + d_1} \cdot \exp[-(2 + d_1) \cdot \tau] + \\
& + \frac{2 \cdot D_1 \cdot \exp(\tau)}{1 + d_1} \cdot \exp[-(1 + d_1) \cdot \tau] - 3 \cdot \exp(-2 \cdot \tau) = 0.
\end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициенты при функциях $\exp(-2 \cdot \tau)$, $\exp(-\tau)$ и $\exp(-d_1 \cdot \tau)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}
3 \cdot D_0 - \frac{3 \cdot D_1}{2 - d_1} - 3 = 0, \\
2 \cdot D_0 - \frac{2 \cdot D_1}{1 - d_1} = 0, \\
\frac{3 \cdot D_1}{2 - d_1} + \frac{2 \cdot D_1}{1 - d_1} + \frac{3 \cdot D_1}{2 + d_1} + \frac{2 \cdot D_1}{1 + d_1} = 0.
\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$3 \cdot (1 - d_1^2) + (4 - d_1^2) = 0.$$

Из двух корней этого уравнения выбираем тот, который соответствует устойчивой системе (положительный), т. е. $d_1 = \sqrt{7}/2 = 1,32$. Из двух других уравнений системы находим $D_1 = -0,22$ и $D_0 = 0,68$. С учетом этих значений импульсная переходная характеристика оптимальной системы примет вид

$$k(t) = 0,68 \cdot \delta(t) - 0,22 \cdot \exp(-1,32 \cdot t).$$

Этой характеристике соответствует передаточная функция

$$W(s) = 0,68 - \frac{0,22}{s + 1,32} = 0,51 \cdot \frac{s + 1}{0,76 \cdot s + 1}.$$