МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания к проведению лабораторных занятий по дисциплине «Представление данных в системах управления»

для студентов направления

15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2020

Методические указания предназначены для студентов очной и заочной форм обучения направления 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств и других технических специальностей. Они содержат основы теории, варианты заданий для самостоятельного решения и список рекомендуемой литературы.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта в части содержания и уровня подготовки выпускников бакалавриата по направлению 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

.

Составитель	канд. техн. наук	А.А. Евдокимов
Ответственный редактор	канд. техн. наук	Д.В. Болдырев

Содержание

1 Измерение количества информации в дискретном и непрерывном сообщениях

Количество информации в дискретной последовательности

Можно поставить вопрос об измерении количества информации, содержащейся в: а) последовательности квантованных случайных величин или дискретных знаков, выбираемых из алфавита *M,* б) последовательности неквантованных случайных величин X_i (выборок из непрерывного сообщения**),** в) непрерывном по времени сообщении *X(t).*

Устройство, явление или причину, порождающие сообщения, удобно толковать как *источники информации,* обладающие тем или иным алфавитом, который должен быть известен априори (до начала измерений или расчетов количества информации). Синтактическое количество информации зависит, по определению, только от статистических свойств появления элементов алфавита в эксперименте по наблюдению их в последовательности.

Дискретный источник обладает конечным алфавитом из M элементов, обозначаемых $C, x_2, .., x_i, ..., x_м,$ каждый из которых характеризуется вероятностью появления $P(x_1), ..., P(x_2), ..., P(x_1), ..., P(x_M)$. Совокупность элементов и их вероятностей удобно задавать в виде матрицы

$$\left\| \begin{matrix} X \\ P \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_M \\ P_1 & P_2 \cdots P_M \end{matrix} \right\|,$$

называемой иногда *конечной схемой.*

В большинстве реальных случаев появление в последовательности элемента x_i зависит от того, какой элемент x_j был предшествующим. Взаимосвязь элементов в сообщении характеризуется матрицей условных вероятностей

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{x_i} \mid x_j\right) = P\left(i \mid j\right) = \begin{Vmatrix} P(1|1) & P(1|2) & \ldots P(1|M) \\ P(2|1) & P(2|2) & \ldots P(2|M) \\ P(i|1) & P(i|2) & \ldots P(i|M) \\ P(M|1) & P(M|2) & \ldots P(M|M) \end{Vmatrix}. \qquad (1.1)$$

При отсутствии взаимосвязи элементов

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{x_i} \mid x_j\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{i} \mid j\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{x_i}\right) = \mathrm{P}\left(i\right). \qquad (1.2)$$

Неопределенность выбора элементов $\mathrm{x_i}$ при создании (последовательности элементов) удобно характеризовать *энтропией* источника $\mathrm{H}(\mathrm{x})$. При независимых элементах с вероятностями (1.2)

$$\mathrm{H}(\mathrm{x}) = -\sum_{i=1}^{M} P(i) \log P(i). \qquad (1.3)$$

При зависимых элементах с условными вероятностями (1.1) сначала определяется условная энтропия, вычисленная так же, как (1.3), но в предположении зафиксированного предыдущего элемента $\mathrm{x_j}$*:*

$$\mathrm{H}\left(\mathrm{x}|\mathrm{x_j}\right) = -\sum_{i=1}^{M} P(i \mid j) \log P(i \mid j). \qquad (1.4)$$

Величина (1.4) случайна, так как случайным является предшествующий элемент $\mathrm{x_j}$. Для получения *безусловной энтропии* источника необходимо произвести усреднение (1.4) по вероятностям появления элементов:

$$\mathrm{H}(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{M} \left[\sum_{i=1}^{M} P(i \mid j) \log P(i \mid j) \right] P(j). \qquad (1.5)$$

Количество информации I, приносимое в среднем одним элементом, по определению, равно энтропии источника. Логическая причина такого определения состоит в том, что получение информации связано со снятием неопределенности в знаниях таким образом, что

$$\mathrm{I} = \mathrm{H} - \mathrm{H}_{\text{апост}}, \qquad (1.6)$$

где H – энтропия (неопределенность получения элемента) до проведения эксперимента, $\mathrm{H}_{\text{апост}}$ – энтропия после проведения эксперимента (получения элемента). При отсутствии помех передаче $\mathrm{H}_{\text{апост}} = 0$ и

$$\mathrm{I} = \mathrm{H}(\mathrm{x}). \qquad (1.7)$$

Определение единицы количества информации достаточно произвольно. Наиболее распространенной единицей является *бит* – количество информации, получаемое при выборе одного из двух равновероятных элементов. Из (1.3) и (1.7) следует, что при $\mathrm{M} = 2\ \mathrm{I} = 1$ биту, если логарифм берется по основанию 2, таким образом,

$$\mathrm{I} = -\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{P(i)}\log_2 P(i) \frac{\textit{бит}}{\textit{элемент}}. \qquad (1.8)$$

Если М = 10, а основание логарифма равно также 10, соответствующая единица называется *дит* (выбор одного элемента из 10 равновероятных). Иногда условно вводится единица *нат* (при основании логарифма *e*).

Если взаимосвязь элементов в сообщении простирается больше чем на два элемента, определение среднего коичества информции на элемент требует привлечения более сложных условных вероятностей. Для инженерных расчетов удобно пользоваться формулой, основанной на применении вероятностей n-грамм, т.е. сочетании из n элементов (диаграмм, триграмм, тетраграмм и т.д.). Тогда количество информации выражается формулой

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i,j,\dots,n} P(i,j,\dots,n) \log P(i,j,\dots n). \qquad (1.9)$$

В частности, при использовании диаграмм (M = 2)

$$P(i,j) = P(j)P(i \mid j), \tag{1.10}$$

следовательно,

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} P(i,j)\log P(i,j) = -\sum_{j=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{M} P(i \mid j)\log P(i \mid j)\right]P(j),$$

что совпадает с (1.5).

Формулы (1.3), (1.8) можно толковать еще так: каждый элемент алфавита x_i несет количество информации

$$I_i = -\log P(x_i).$$

Величины I_i случайны. Далее производиться их усреднение и вычисляется количество информации, приносимое одним элементом в среднем.

Количество информации в случайной величине

При определении количества информации в последовательности неквантованных (непрерывных по величине) случайных величин и в непрерывной функции предварительно необходимо определить энтропию и количество информации в случайной величине X, описываемой плотностью вероятности $\mathrm{p_x}(x)$.

Непосредственный предельный переход с помощью квантования случайной величины с шагом Δ с последующим устремлением Δ к нулю не приводит к результату $(\mathrm{H} \to \infty)$. Неопределенность выбора величины *x* из континуума значений *X* с плотностью *px(x)* можно количественно определить только относительно другой случайной величины Y с некоторым стандартным распределением. В качестве последнего принимается равномерное в выбранном интервале *d* распределение

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d}, -\frac{d}{2}<y<\frac{d}{2},\\ 0, \quad \textit{при других } \mathrm{y}.\end{cases} \qquad (1.11)$$

Относительной (дифференциальной) энтропией случайной величины *X* называется величина

$$\mathrm{H}_{д}(\mathrm{x})=H(x)-H(y)=-\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)\log\left[d\times p_x(x)\right]dx\,. \qquad (1.12)$$

В частности, если интервал $d=1$,

$$H_{д}(\mathrm{x})=-\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)\log p_x(x)dx, \qquad (1.13)$$

однако, хотя d не входит явно в это выражение, величина не перестает быть условной (относительной) характеристикой неопределенности величины *X*.

В реальных условиях передача сообщений происходит при наличии помех. При этом приобретает существенное значение количество информации о случайной величине *X*, содержащейся в случайной величине $Y=X+n$, где n – помеха. При этом энтропия, полученная путем предельного перехода, приобретает конечное значение.

Распределения $p_x(x)$, обладающие наибольшей относительной энтропией при определенных ограничениях, называются *экстремальными.* Если по условию $a\le X\le b$, то экстремальным является равномерное в интервале *(a, b)* распределение. Если *X* не ограничена, но ограничена дисперсия σ_X^2, то экстремальным является нормальное (гауссово) распределение.

Относительная энтропия не является самостоятельной эффективной величиной, пригодной для определения количества информации в последовательности случайных величин.

Количество информации в случайном процессе

Энтропия непрерывного сообщения *X(t)* длительностью T_p, представляющего собою бесконечную последовательность (континуум) мгновенных значений, каждое из которых является случайной величиной, рассмотренной выше, является, очевидно, бесконечной и, следовательно, неэффективной мерой неопределенности и количества информации**.** Адекватную практическим приложениям меру неопределенности случайного процесса *X(t)* можно получить, представив каждую реализацию *x(t)* этого процесса ее выборочными значениями $\mathrm{x}(\mathrm{t_i})$. При этом случайный процесс *X(t)* моделируется множеством случайных величин, описывающихся n-мерным законом распределения $\mathrm{p_X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если произвести квантование случайных величин $\mathrm{X}_1, X_2, \ldots X_n$ по уровню с числом уровней квантования, равным m, то возможное число реализаций длительностью $\mathrm{T_p}$ станет, очевидно, конечным и равным

$$\mathrm{M} = \mathrm{m^n}. \tag{1.14}$$

Каждая из реализаций $\mathrm{C}_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_M$ будет иметь определенную вероятность появления в эксперименте по наблюдению реализаций. Тогда неопределенность (энтропия) и количество информации в реализации (в среднем по всем реализациям) определяются равенством

$$\mathrm{H_n} = -\sum_{i=1}^{M} P(C_i)\log P(C_i). \tag{1.15}$$

Энтропия и количество информации на одну степень свободы (на одну выборку) равны

$$\mathrm{H_n} = \frac{\mathrm{H_n}}{\mathrm{n}} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M} P(C_i)\log P(C_i). \tag{1.16}$$

Если выборки (случайные величины) $\mathrm{X}_1, X_2, \ldots X_n$ являются непрерывными (не квантованными по уровню), то удается ввести лишь относительную меру неопределенности. По аналогии с одной случайной величиной, относительная энтропия определяется по отношению к n - мерному равномерному распределению:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{n}_{\text{д}}} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{(\mathrm{n})}{\cdots} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \log\left[d^n p_X\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right] dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \quad (1.17)$$

Если выборочные значения $\mathrm{X}_1, X_2, \ldots X_n$ независимы, то в соответствии с законом теории вероятностей

$$p_X\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} p_{X_i}\left(x_i\right); \quad (1.18)$$

для стационарного процесса

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} p_{X_i}\left(x_i\right) = \left[\mathrm{p}_{\mathrm{X}}\left(x\right)\right]^n. \quad (1.19)$$

В этом случае

$$\mathrm{H}_{\mathrm{n}_{\text{нез}}} = \mathrm{n}\mathrm{H}_{\text{д}}, \quad (1.20)$$

где $\mathrm{H}_{\text{д}}$ – относительная энтропия (1.12).

Если выборки $\mathrm{X}_1, X_2, \ldots X_n$ зависимы, но подчиняются нормальному закону распределения, то

$$\mathrm{H}_{\mathrm{n}_{\text{зав.норм}}} = \log\left[\left(2\pi\sigma_{\mathrm{X}}^2 e\right)^{\frac{n}{2}} D_n\right] \quad (1.21)$$

(при *d=1)*, где e – основание натуральных логарифмом, а D_n – определитель автокорреляционной матрицы

$$\rho = \begin{Vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \cdots \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \cdots \rho_{2n} \\ & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} \cdots \rho_{nn} \end{Vmatrix}, \quad (1.22)$$

где

$$\rho_{ik} = \frac{\overline{X_i X_k}}{\sigma_X^2} \qquad (1.23)$$

– нормированный коэффициент взаимной корреляции выборок X_i и X_k.

Удобной практической характеристикой случайной сообщения (процесса) *X(t)* является его *энтропийная мощность,* под которой понимается средняя мощность белого гауссовского процесса, обладающего той же энтропией, что и заданный процесс. Энтропийная мощность

$$\mathrm{P}_{э} = \frac{2^{2H_1}}{2\pi e}, \qquad (1.24)$$

где H_1 – энтропия на одну степень свободы (см. выражение (1.16). Энтропийная мощность сообщения $P_э$ всегда меньше средней мощности сообщения (и равна ей в случае белого гауссовского сообщения). Это свойство позволяет произвести оценку энтропии на степень свободы, если известна средняя мощность сообщения

$$\mathrm{H}_1 \le \log\sqrt{2\pi e P_{cp}}\,.$$

Избыточность источника. Другие меры информации

Важной характеристикой источника сообщений является избыточность, под которой понимается отношение

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{H}_{\max} - H(x)}{\mathrm{H}_{\max}}, \qquad (1.26)$$

где $H(x)$ – энтропия рассматриваемого источника, $\mathrm{H}_{\max}$ – максимально возможное значение его энтропии, которое может быть достигнуто подбором распределения и ликвидацией взаимозависимости элементов алфавита. Так для дискретного источника с M элементами

$$\mathrm{H}_{\max} = \log M\,. \qquad (1.27)$$

Если элементы независимы, то $\mathrm{H}(\mathrm{x})$ определиться по формуле (1.3). При незавсимых попарно элементах – по формуле (1.5).

Кроме рассмотренной меры количества информации были предложены другие. Так, Фишер ввел меру количества информации для непрерывного распределения с плотностью $\mathrm{P_X}(x)$ и математическим ожиданием $\mathrm{m_X}$:

$$I_{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ \mathrm{Inp_X}(x)}{\partial m_X} \right]^2 p_X(x) dx .$$

Эта мера используется в задачах математической статистики.

В теории измерений случайных величин используется понятие эпсилон-энтропия. Пусть величина Y (результат измерения) содержит информацию о величине *X* (истинном значении объекта). *Эпсилон-энтропией* $H_\varepsilon(x)$ называется количество информации об *X*, содержащееся в У, точнее, минимальное количество информации, необходимое для того, чтобы У воспроизводила *X* со среднеквадратической погрешностью $\left(\overline{Y - X} \right)^2 \le \varepsilon^2$. При этом минимум определяется по всем законам распределения $p_x(x|y)$; таким образом, по определению,

$$H_\varepsilon(x) = \min_{p_x(x|y)} \left[H(x) - H(x \mid y) \right].$$

Можно убедиться, что эта величина может быть выражена так:

$$H_\varepsilon(x) = \min_{p_x(x|y)} \int\int p_{XY}(x,y) \log \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x) P_Y(y)} dxdy .$$

Она сравнительно легко вычисляется для нормальныч случайных величин.

Упражнения и задачи.

1.1. Имеются два дискретных источника информации, заданные матрицами

$$\left\|\begin{matrix} X \\ P \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix} Y \\ Q \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix}\right\|.$$

Определить, какой источник обладает большей неопределенностью в случае, если: *а*) $\mathrm{p}_1 = p_2, \quad q_1 = q_2 = q_3;$ *б*) $\mathrm{p}_1 = q_1,\ p_2 = q_2 + q_3.$

1.2. На выходе двоичного источника информации элементы «0» и «1» появляются с вероятностями соотвественно *P* и 1-*P*. При каком значении *P* энтропия источника максимальна? Построить график *H(P)* для двоичного источника.

1.3. Доказать свойство *экстремальности энтропии.* Для дискретного источника

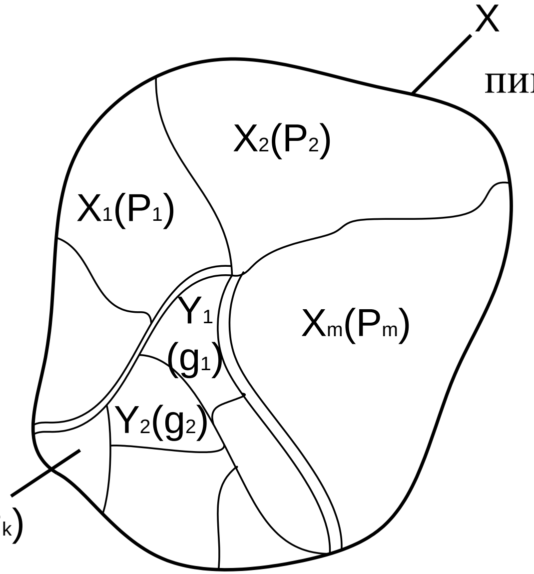
$$\left\|\begin{matrix} X \\ P \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_M \\ p_1 & p_2 \ldots p_M \end{matrix}\right\|$$

энтропия $H(x) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log(p_i)$, максимальна и равна $\mathrm{H}_{\max} = \log M$ в случае, если элементы равновероятны: $p_1 = p_2 = \cdots = p_M$.

1.4. Показать, что функция $H(x) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log(p_i)$ обладает свойствами симметрии и непрерывности относительно значений $p_1 = p_2 = \cdots = p_M$.

1.5. Доказать следующее свойство аддитивности энтропии. В дискретном источнике

$$\left\|\begin{matrix} X \\ P \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_m \\ p_1 & p_2 \ldots p_m \end{matrix}\right\|$$



элемент $x_k \in X$ рассматривается, в свою очередь, как дискретный источник Y:

$x_k \equiv Y$,

причем

$$\left\|\begin{matrix} Y \\ Q \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ q_1 & q_2 \dots q_n \end{matrix}\right\|,$$

$$\text{где } \sum_{j=1}^{n} q_j = p_k.$$

Преобразуем вероятности $\|Q\|$, поделив q_j на p_k, тогда $\sum_{j=1}^{n} \frac{q_i}{p_k} = 1$, при этом получим конечную схему, для которой можно вычислить энтропию

$$H(y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{p_k} \log \frac{q_j}{p_k}.$$

Свойство аддитивности состоит в том, что для трех конечных схем

$$\left\|\begin{matrix} X \\ P \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \dots x_m \\ p_1 & p_2 \dots p_m \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} Y \\ \dfrac{Q}{p_k} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 \dots y_n \\ \dfrac{q_1}{p_k} & \dfrac{q_2}{p_k} \dots \dfrac{q_n}{p_k} \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} Z \\ S \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 \dots x_{k-1}, & y_1, & y_2 \dots y_n \\ p_1 & p_2 \dots p_{k-1}, & q_1, & q_2 \dots q_n \end{matrix}\right\|$$

энтропии $H(x)$, $H(y)$ и $H(z)$ связаны соотнолшением

$$H(z) = H(x) + p_k H(y).$$

1.6. Дискретный источник информации задан матрицей

$$\left\|\begin{matrix} X \\ P \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1/5 & 4/15 & 8/15 \end{matrix}\right\|.$$

Вычислить его среднюю неопределенность и сравнить полученное значение с энтропиями следующих конечныч схем:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ 1/5 & 4/5 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \dfrac{x_2}{x_2+x_3} & \dfrac{x_3}{x_2+x_3} \\ q_1 & q_2 \end{Vmatrix}.$$

Показать на этом примере свойство аддитивности энтропии.

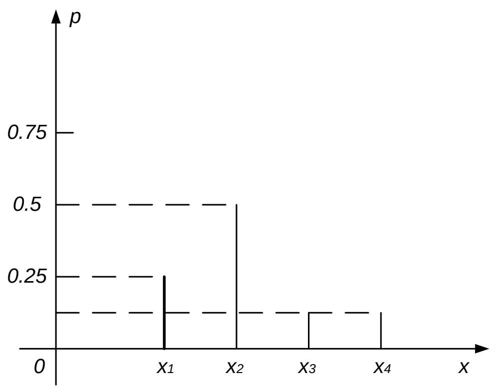
1.7. Вычислить энтропии трех систем:

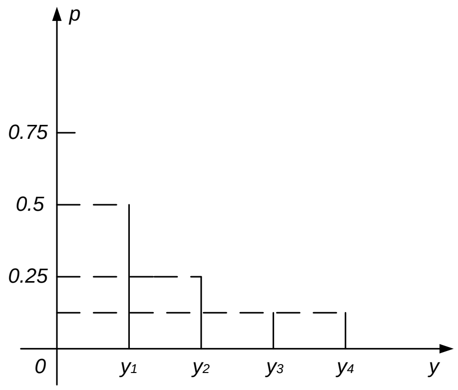
$$\begin{Vmatrix} 1/256 & 255/256 \end{Vmatrix}; \qquad \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}; \qquad \begin{Vmatrix} 7/16 & 9/16 \end{Vmatrix}.$$

Пояснить на этом примере свойство непрерывности энтропии.

1.8. Имеются два дискретных источника с независимыми и равновероятными элементами: двоичный и троичный. На выходе первого источника зафиксированы два символа, на выходе второго — три. Чему равны неопределенности полученных последовательностей букв, образованных парами символов первого источника и тройками символов второго?

1.9. В каком соотношении находятся неопределенности двух систем X и Y?





1.10. Имеются два дискретных троичных источника с независимыми элементами. на выходе каждого источника появляются сообщения одинаковой длины – по 15 элементов. Количество различных элементов в сообщении каждого источника постоянно. Сообщения каждого источника отличаются только порядком элементов. Зафиксированы два типичных сообщения: 021202120212021 – первого источника и 012101201101201 –

второго. Элемент какого источника несет в среднем большее количество информации?

1.11. Найти энтропию геометрического распределения

$$P(x_i = k) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x_i \le 0, \\ p(1-p)^{k-1}, & 0 < x_i < \infty. \end{cases}$$

1.12. Найти энтропию биноминального распределения

$$P(x_i = k) = \begin{cases} 0 & -\infty < x_i < 0, \\ C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, & 0 \le x_i \le m, \\ 0 & m < x_i < \infty. \end{cases}$$

1.13. проверить свойство аддитивности энтропии на примере источника

$$\left\| \begin{matrix} X \\ P \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{matrix} \right\|.$$

1.14. Записать соотношение между энтропиями

$$H(x), \quad H(y), \quad H(x|y), \quad H(y|x), \quad H(x,y), \quad H(x|y_i), \quad H(y|x_i)$$

в случае зависимых и не зависимых элементов x_i и y_j.

1.15. Доказать что $H(y|x) \le H(y)$.

1.16. Пусть X и Y – два алфавита; Z=X+Y . Чему равна условная энтропия $H(z|x)$, если: а) X и Y независимы; б) X и Yзависимы; в) $X \equiv Y$.

1.17. Элементы алфавитов X и Yстатистически связаны. Известно, что $H(x)$=8 бит, $H(y)$= 12 бит. В каких пределах меняется условная энтропия $H(y|x)$ при изменении $H(x|y)$ в максимально возможных пределах?

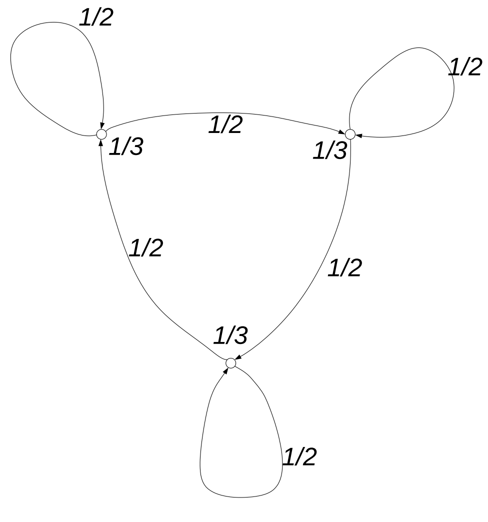
1.18. Ракеты двух пусковых установок используются для поражения двух целей. Ракета, пущенная с первой установки, поражает цель номер 1 с вероятностью 0,5, цель номер 2 – с вероятностью 0,3 и дает промах с вероятностью 0,2. Ракета второй установки поражает первую цель с вероятностью 0,3, вторую — с вероятностью 0,5 и вероятность промаха равна 0,2. Вероятность выбора первой установки равна 0,4. Чему равна неопределенность выбора установки, если известно, что поражена вторая цель; если произошел промах; какова неопределенность исхода, если пущена любая ракета?

1.19. По заданным значениям *H(x)* и *H(y)* найти *H(x|y),* если *H(y|x) = 1* бит.

1.20. Опыт X – случайный выбор целого числа от 1 до 1050. Опыт *Y* – определение величин остатков от деления этого числа на 5 и на 7. Определить энтропии *H(x), H(y), H(x|y).*

1.21. Источник информации состоит из двух источников: двоичного и троичного Вероятности букв первого источника p_1 и p_2, второго – $q_1 q_2 q_3$. В результате попарного комбинирования букв на выходе составного источника появляется всего пять равновероятных слов по два элемента в каждом: от первого и второго источника. Определить избыточность составного источника, обусловленную статистической связью элементов первого и второго источников, а также вероятности слов составного источника, обепечивающие нулевую избыточность.

1.22. Найти энтропию источника, описываемого графом вероятностей перехода



1.23. Дана матрица

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{Vmatrix}.$$

Определить энтропии

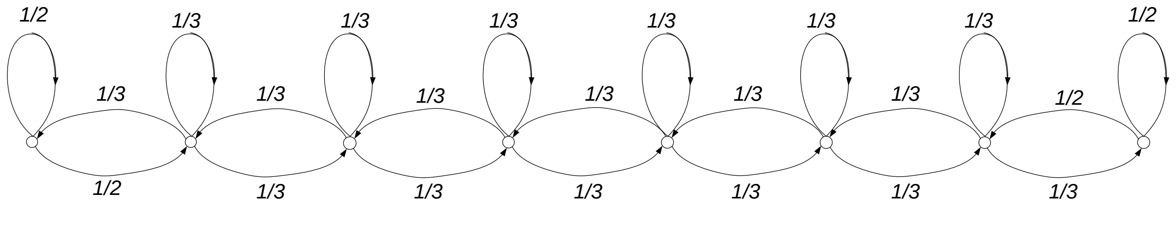
$H(x)$, $H(y)$, $H(x|y)$, $H(y|x)$, $H(x|y_1)$, $H(y|x_2)$, $H(x,y)$

1.24. Доказать, что $H(x,y)\le H(x)+H(y)$.

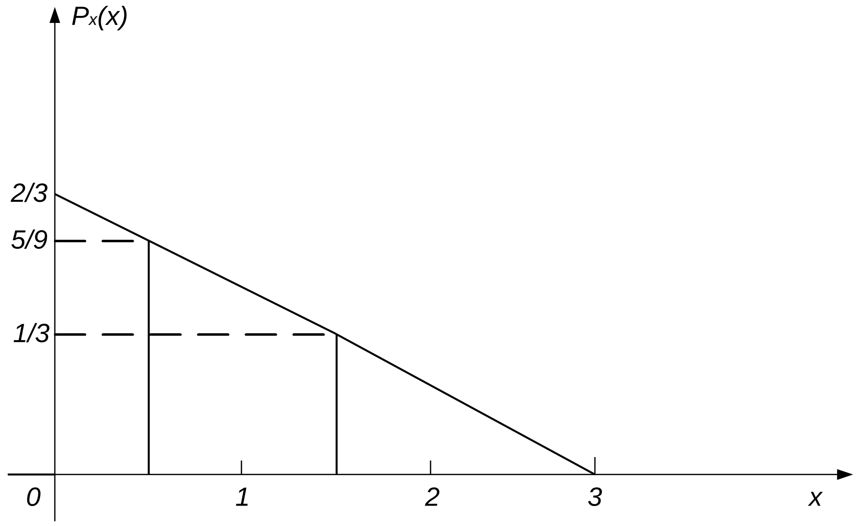
1.25. Показать, что для регулярной марковской цепи энтропия $H(X)^{(r)}$ за r шагов равняется энтропии за один шаг, умноженной на число шагов *r*.

1.26. Определить среднее количество информации, приходящееся на один символ сообщения 01001000101001, при условии, что источник эргодический, а последовательность – типичная.

1.27. Определить максимальную энтропию телевизионного изображения, содержащего 500 строк по 650 элементов в строке, при условии, что яркость каждого элемента передается восемью квантованными уровнями, если: а) уровни не коррелированны; б) статистическая связь между различными градациями яркости задана графом.



1.28. Найти энтропию квантованного сигнала с распределением $p_x(x)$ с точностью 1 В.



Условные вероятности уровней заданы матрицей

$$\begin{array}{c} \text{уровни} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 9/11 & 1/8 & 0 \\ 2/11 & 3/8 & 2/9 \\ 0 & 1/2 & 7/9 \end{array} \right\| . \end{array}$$

1.29. Избыточность ряда европейских языков лежит в пределах 50–65%. Определить энтропию их алфавитов.

1.30. В каком соотношении находятся известные единицы количества информации: двоичная (бит), натуральная (нат), десятичная (дит или «хартли»)?

1.31. Определить дифференциальную энтропию равномерного на интервале $\{-W_1 + W_2\}$ распределения.

1.32. Определить дифференциальную энтропию *H∂(x)* нормального распределения с плотностью вероятности

$$p_X = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x - \overline{x}\right)^2}{2\sigma_X^2}} .$$

Как влияет на величину *H∂(x)* увеличение в два раза а) среднего $\overline{x}$; б) дисперсии σ_X^2?

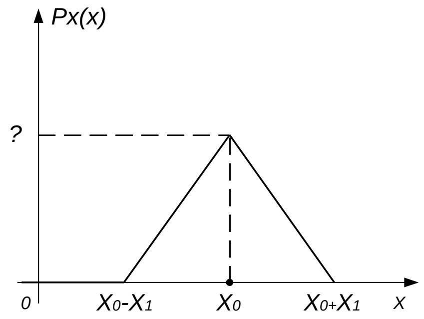
1.33. Определить энтропию двумерного равномерного распределения, заданного плотностью

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y) = \begin{cases} 1, \textit{если} \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1 \\ 0, \textit{если}\ 0 \le \mathrm{y} \le 1. \end{cases}$$

1.34. Сигнал на выходе непрерывного источника ограничен по уровню значениями U_m, U_M. Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию сигнала.

1.35. Сигнал на выходе непрерывного источника ограничен по мощности значением σ_{U^2}. Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию сигнала.

1.36. Вычислить энтропию $H_\partial(x)$ распределения $p_x(x)$. Построить график зависимости $H_\partial(x)$ в функции параметра d.



1.37. Сигнал на выходе непрерывного источника принимает только положительные значения

$$p_U(u) = 0,\ \mathrm{u}<0.$$

Среднее значение сигнала неизменно (m_u = const). Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию сигнала.

1.38. Вычислить дифференциальную энтропию случайной величины, заданной распределением

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x. \end{cases}$$

1.39. Вычислить условные дифференциальные энтропии $H_\partial(x|y)$ и $H_\partial(y|x)$ для суммы нормальных случайных величин.

1.40. Найти энтропию системы m случайных величин, распределенных по нормальному закону.

1.41. Измерительное устройство вырабатывает временные интервалы, распределенные случайным образом и пределах от 100 до 500 мс. Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1 мс до 1 мкс?

1.42. Показать, что при заданной энтропии нормальное распределение вероятностей имеет наименьшую из всех одномерных распределений дисперсию.

1.43. Показать, что $H(y)=H(x)$, если: а) $Y=X\pm C$, б) $Y=-X$.

1.44. Информация передается при помощи частотно-модулированных сигналов, рабочая частота F которых изменяется с равной вероятностью в пределах от $F_1=10$ мГц до $F_2=50$ мГц. Определить энтропию частоты, если точность измерения частоты ΔF равна 2 кГц.

1.45. Чему равно приращение энтропии ΔH при переходе системы из состояния, характеризуемого среднеквадратическим отклонением σ_1, в состояние, характеризуемое величиной σ_2: а) в случае нормального распределения координаты, б) в случае равномерного распределения координаты?

1.46. Вывести формулу дифференциальной энтропии непрерывной случайной величины X с плотностью $Px(x)$, квантуя исходную величину с шагом Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$. В чем состоит относительный характер дифференциальной энтропии?

1.47. В результате полной дезорганизации управления m самолетов летят произвольными курсами. Управление восстановлено, и все самолеты взяли общий курс со среднеквадратической ошибкой отклонения от курса $\sigma = 3^\circ$. Найти изменение энтропии, считая, что в первом случае имело место равномерное распределение вероятностей углов, а во втором случае – нормальное.

1.48. Точность выдерживания курса летательного аппарата под действием управляющих команд изменилась с 3° до 10' при равномерном распределении ошибки курса. До какой величины пришлось бы изменить среднеквадратическое отклонение, если бы ошибка была распределена по нормальному закону, чтобы обеспечить такое6 же изменение энтропии, как в первом случае?

1.49. Измерительное устройство вырабатывает случайный сигнал *U(t)* с нормальной плотностью вероятности и корреляционной функцией $r_U(\tau) = \sigma_U^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Определить энтропию сигпала $H(u)$ и его избыточность, вызванную наличием корреляции, если $\sigma_U = 6$.

1.50. В каком случае дифференциальная энтропия отрицательна?

1.51. Определить, при каком соотношении между шагами квантования Δн и Δр квантованные энтропии величин, распределенных по нормальному и равномерному законам равны.

1.52. Определить (приближенно) дифференциальную энтропию распределения с функцией плотности *px(x),* заданной на интервале *(X_m, $X_м$),*

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{(X_M - X_m)^4}(x - X_m)(X_M - x)^2, \; X_m \le x \le X_M, \\ 0 \; \textit{вне интервала} \; (\mathrm{X_m}, X_M). \end{cases}$$

1.53. Определить дифференциальную энтропию усеченного нормального распределения с функцией плотности

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x-\overline{X}}{2\sigma_X^2}\right)^2}, & X_m<x\le X_M\\ 0 \; вне\; интервала & (\mathrm{X_m},X_M).\end{cases}$$

1.54. Определить дифференциальную энтропию двумерного нормального распределения с функцией плотности

$$p_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}-\frac{2rxy}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)},$$

где r – коэффициент корреляции значений x и y.

1.55. Определить количество информации по Фишеру для смешенного нормального распределения с функцией плотности

$$p_X(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-\overline{X}\right)^2}{\sigma_X^2}}.$$

2 Передача информации по каналам связи

Передача дискретных элементов

Канал связи представляет собой совокупность технических средств для передачи сообщений из одной точки пространства в другую. Эта передача чаще всего осуществляется в условиях неизбежных помех. В результате воздействия помех каждый отправленный элемент x_i может быть опознан получателем как y_k, причем $y_k\ne x_i$. Это событие называется *ошибкой.* Аналогично, непрерывное сообщение *x(t)* может быть принято, как $y(t)\ne ax(t-\tau)$, для всех или некоторых моментов времени, где а и

τ – константы, обычно не существенные с точки зрения количества информации (ослабление и запаздывание). С точки зрения теории информации физическое устройство канала связи не существенно.

Передачу элементов сообщения можно рассматривать как составной эксперимент, состоящий в отправлении элементов сообщения x_i и получения элементов y_k. Свойства канала при этом полностью описываются *матрицей переходных вероятностей* $P(x_i \mid y_k)$ или $P(y_k \mid x_i)$, где $P(x_i \mid y_k)$ есть вероятность отправления элемента x_i, если зафиксирован полученный элемент y_k, а $P(y_k \mid x_i)$ – вероятность получения элемента y_k, если зафиксирован (отправляется) элемент x_i. При этом предполагается, что новые элементы (сверх числа *M)* не могут быть созданы под влиянием помех; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{M} P(y_k \mid x_i) = 1, \quad \sum_{i=1}^{M} P(x_i \mid y_k) = 1. \tag{2.1}$$

Если помех нет, то все диагональные элементы $P(y_k \mid x_k)$ или $P(x_k \mid y_k)$ равны единице, а остальные – нулю. При очень больших помехах все элементы матриц могут быть приблизительно одинаковыми.

При наличии помех отправление элемента x_i не снимает полностью неопределенность относительно полученного элемента y_k. Таким образом, ситуация описывается четырьмя мерами неопределенности (энтропиями):

а) неопределенность отправляемых элементов

$$H(x) = -\sum_{k=1}^{M} P(x_i) \log P(x_i) \tag{2.2}$$

(предположена независимость элементов x_i);

б) неопределенность полученных элементов

$$H(y) = -\sum_{k=1}^{M} P(y_k) \log P(y_k); \tag{2.3}$$

в) неопределенность получения элементов при зафиксированном отправляемом элементе x_i:

$$H(y \mid x_i) = -\sum_{k=1}^{M} P(y_k \mid x_i) \log P(y_k \mid x_i). \tag{2.4}$$

Эта величина называется *частной энтропией* принятых элементов. *Полная энтропия* получаемых элементов определяется усреднением $H(y \mid x_i)$ по вероятностям отправляемых элементов x_i:

$$H(y \mid x) = \sum_{i=1}^{M} H(y \mid x_i) P(x_i). \tag{2.5}$$

Величина (1.5) называется *средней условной энтропией получаемых элементов.*

г) неопределенность отправления элементов при зафиксированном полученном элементе y_k:

$$H(x \mid y_k) = -\sum_{i=1}^{M} P(x_i \mid y_k) \log P(x_i \mid y_k). \tag{2.6}$$

Эта величина является *частой энтропией отправляемых элементов. Полная энтропия отправляемых элементов* определяется усреднением $H(x \mid y_k)$ по вероятностям получаемых элементов y_k:

$$H(x \mid y) = \sum_{k=1}^{M} H(x \mid y_k) P(y_k). \tag{2.7}$$

В соответствии с определением количества переданной информации по (4.6)

$$I = H - H_{\text{апост}} = H(x) - H(x \mid y). \tag{2.8}$$

Эта величина равна также

$$I = H(y) - H(y \mid x). \tag{2.9}$$

Как можно проверить, по мере уменьшения помех $I \to H(x)$, по мере увеличения помех $I \to 0$.

Передача случайных величин и процессов

Количество информации в непрерывной случайной величине *X* при наличии помех определяется путем квантования по уровню отправляемой и получаемой величин *X* и *Y* с последующим предельным переходом, когда число уровней квантования $m \to \infty$. При этом вследствие квантования и предельного перехода в обеих величинах *X* и *Y*, количество информации по (2.6) оказывается конечным, хотя каждая энтропия в отдельности стремится к бесконечности.

В результате предельного перехода количество информации об *X*, содержащееся в *Y*,

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)\,p_Y(y)}\,dxdy, \tag{2.10}$$

где $p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y \mid x)$ – совместная плотность вероятности величин *X* и *У*, $p_x(x)$, $p_y(y)$ – плотности вероятности величин *X* и *У* соответственно.

Если помехи столь велики, что *Y* практически не зависит от *X*, то

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y). \tag{2.11}$$

Тогда из (2.10) следует, что количество получаемой информации равно нулю.

Если $Y = X + n$, причем сообщение *X* и помеха *n* независимы (что обычно выполняется), то

$$p_Y(y \mid x) = p_n(y - x), \tag{2.12}$$

где $p_n(\alpha)$ – плотность вероятности помехи. В этом случае

$$I = H(y) - H(n), \tag{2.13}$$

где

$$H(y) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y) \log p_Y(y) dy, \tag{2.14}$$

$$H(n) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_n(\alpha) \log p_n(\alpha) d\alpha.$$

В случае передачи непрерывного сообщения $X(t)$ при наличии помех количество получаемой информации определяется аналогично, однако в рассмотрение вводятся *n*-мерные плотности вероятностей, описывающие случайное сообщение $X(t)$ (реализации длительностью T_p) после сведения его к набору *n* случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Удобной графической интерпретацией основных соотношений между информационными оценками являются так называемые *диаграммы Венна.* С их помощью можно легко установить связь между различными условными и безусловными энтропиями и количеством информации.

Основные параметры системы передачи

При рассмотрении взаимодействия источника информации и канала возникают важные понятия производительности источника, пропускной способности канала и скорости передачи информации.

Под производительностью источника понимается скорость создания информации, т. е. количество информации, создаваемое источником в единицу времени (обычно в секунду). Для дискретного источника, создающего N_1 элементов в секунду, производительность

$$I_1 = H(x) N_1 \text{бит/с}, \tag{2.15}$$

где *H(x)* – энтропия, равная количеству информации на один элемент в среднем.

Для источника непрерывных сообщений (случайных величин X и функций $X(t)$) производительность, определенная через энтропию, будет, очевидно, равна бесконечности. Поэтому для случайных величин и случайных функций вводится понятие эпсилон-энтропии.

Если не делать различия между величинами X и X', когда они близки в среднеквадратичном смысле, т. е. когда

$$\overline{\left(X - X'\right)^2} \le \varepsilon^2, \qquad (2.16)$$

где ε^2 – заданная малая величина, то производительность источника случайных непрерывных величин можно определить как минимальное количество информации, содержащееся в X' об X:

$$I_1 = \min I\left(X', X\right). \qquad (2.17)$$

Если величина X распределена нормально, то

$$I_1 = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}. \qquad (2.18)$$

Производительность источника непрерывных сообщений $X(t)$ определяется путем сведения их к n случайным величинам. Если выборки взяты в соответствии с теоремой Котельникова, то производительность источника

$$I_1 = F_M \log\frac{P_{\text{ср}}}{\varepsilon^2}, \qquad (2.19)$$

где $P_{\text{ср}}$ – средняя мощность сообщения, а $\varepsilon^2 = \overline{\left[X(t) - X'(t)\right]^2}$.

Под *скоростью передачи информации* по каналу понимается количество информации, получаемой в единицу времени. Для дискретного источника (источника квантованных по времени и по уровню величин) скорость передачи информации

$$R = \frac{1}{T}\left[H(C) - H(C\,|\,D)\right], \tag{2.20}$$

где *H(C)* – энтропия отправленных последовательностей *C* элементов x_i общей продолжительностью в T с, *H(C|D)* – условная энтропия отправленных последовательностей с учетом полученных последовательностей *D* элементов y_k.

Если элементы в последовательности появляются независимо со скоростью N_1 элементов в секунду, то

$$R = N_1\left[H(x) - H(x\,|\,y)\right], \tag{2.21}$$

где *H(x)* и *H(x|y)* – энтропии (2.2) и (2.7) соответственно.

Под *пропускной способностью* канала понимается максимально возможная скорость передачи информации, которой можно достигнуть выбором кодирования:

$$c = \max_{\text{по кодам}} \frac{1}{T}\left[H(C) - H(C\,|\,D)\right]. \tag{2.22}$$

Предельные теоремы

Выполняются следующие предельные соотношения между пропускной способностью канала и скоростью информации. Если скорость создания информации I_1 меньше пропускной способности, то имеется правило кодирования (возможно, не известное), при котором вероятность ошибок может быть сделана сколь угодно малой. При тех же условиях скорость передачи информации *R* может сколь угодно приближаться к пропускной способности канала.

При передаче непрерывных сообщений в условиях белых гауссовских помех пропускная способность канала

$$c = F_M \log\left(1 + \frac{P}{N}\right), \tag{2.23}$$

где F_M – полоса пропускания канала, P и N – средние мощности сообщений и помехи соответственно. Способ кодирования, позволяющий реализовать величину (2.23), неизвестен. Однако известно, что сообщение должно иметь нормальный закон распределения мгновенных значений.

При увеличении полосы пропускания капала F_M пропускная способность асимптотически стремится к величине

$$c_{\text{пред}} \cong 1{,}443\frac{P}{N_0}, \tag{2.24}$$

где N_0 – спектральная плотность мощности белой помехи. Практически нецелесообразно расширять полосу сверх величины

$$F_{M_{\text{кр}}} \approx \frac{P}{N_0}. \tag{2.25}$$

Не следует упускать из вида, что все сказанное здесь справедливо лишь в предположении канала с белой гауссовской помехой.

Согласование каналов с сигналами

Под *объемом сигнала* V_c понимают произведение

$$V_c = F_c T_c D_c,$$

где F_c – полоса частот сигнала, T_c – время передачи сигнала и D_c – динамический диапазон, выражающий превышение мощности сигнала P_c над помехой (мощностью $P_{\text{ш}}$) и равный

$$D_c = \log\left(1+\frac{P_c}{P_{\text{ш}}}\right).$$

По аналогии вводится понятие *объема канала:*

$$V_k = F_k T_k D_k,$$

где сомножители F_K, T_K, D_K имеют такой же смысл применительно к каналу передачи информации.

Условие передачи информации по каналу записывается следующим образом:

$$V_c \le V_k.$$

В зависимости от свойств, которые им приписываются, может существовать большое количество моделей реальных каналов.

Симметричным бинарным каналом называется канал, в котором вероятности принять первый сигнал за второй и второй за первый одинаковы.

Каналом со стиранием называется канал, на выходе которого кроме элементов $x_1 = m_1$ и $x_2 = m_2$ может появиться третий элемент, не совпадающий ни с m_1, ни с m_2.

Каналом с ретранслятором называется канал, составленный из двух частей (каналов), в первом из которых элементы x_1 и x_2 могут переходить в y_1 и y_2, а во втором y_1 и y_2 могут переходить в z_1 и z_2, являющиеся выходными для канала с ретранслятором.

Упражнения и задачи

2.1. Количество информации в объекте Y по отношению к объекту X определяется следующим образом [см. (2.8)÷(2.9)]:

$$I(x,y) = H(x) - H(x\,|\,y) = H(y) - H(y\,|\,x).$$

Вывести формулу, выражающую количество информации в симметричной форме.

2.2. Доказать, что $I(x,y) \ge 0$.

2.3. Определить, чему равняется $I(x,x)$.

2.4. Даны значения $H(x)$ и $H(y)$. В каких пределах может меняться $I(x,y)$ при изменении $H(x,y)$ от минимального до максимально возможного значений?

2.5. Определить среднюю взаимную информацию между двумя буквами алфавита, если известно, что средняя энтропия алфавита равна 5 бит, а энтропия на пару букв равняется 8,3 бита.

2.6. Определить среднее количество информации $I(x,y)$, если матрица системы передачи информации $P(X,Y)$ имеет вид

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{Vmatrix}.$$

2.7. Определить среднее количество информации $I(X,Y)$ в системе, описываемой матрицей

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{Vmatrix}.$$

2.8. Какое количество информации в среднем получает человек, определяющий день рождения своего собеседника, когда последний сообщает ему месяц, в котором он родился?

2.9. Имеются три дискретные случайные величины *X*, *Y*, Z, энтропии которых равны: $H(x)=H(y)=H(z)$. Определить, чему равняется $I(x,y,z)$, если: а) $H(x,y,z)=3H(x)$, б) $H(x,y,z)=H(x)$. Доказать, что в общем случае $I(x,y,z)\le I(x,y)$.

2.10. Определить количество информации, которое содержится в сообщении о том, что сумма выпавших очков на двух игральных костях равна семи.

2.11. Вычислить среднее количество информации $I(X,y_2)$ о переданных сообщениях $X=<x_i>, i=1, \quad 2, \quad 3,$ доставляемое принятым сообщением y_2 ансамбля $Y = \langle y_j \rangle = 1, 2, 3$, если система передачи описывается матрицей

$$P(X,Y) = \begin{Vmatrix} 0,05 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0,05 & 0 & 0,3 \end{Vmatrix}.$$

2.12. Радиостанция может работать на волне λ_1 (событие A_1) или на волне λ_2 (событие A_2); в импульсном (событие B_1) или в непрерывном (событие B_2) режимах. Вероятности совместных событий имеют следующие значения: $P(A_1B_1) = 0,7$; $P(A_1B_2) = 0,15$; $P(A_2B_1) = 0,05$; $P(A_2B_2) = 0,1$. Вычислить количество информации, получаемой относительно режима работы станции, если станет известной длина волны станции.

2.13. Для повышения достоверности каждое сообщение может передаваться по каналу связи k раз, причем вероятность неискаженного прохождения сигнала при каждой передаче Р = 0,2. После k повторений $(1 \le k \le N)$ решающее устройство сравнивает все k принятых сигналов и при их совпадении выносит решение о правильном приеме, после чего на передающий конец поступает команда о прекращении посылки данного сообщения и об отправлении следующего. Определить значение коэффициента дублирования k из условия максимума количества информации, обеспечиваемой решающим устройством.

2.14. Система стабилизации платформы гироскопа, компенсирующая случайные возмущения, имеет два дискретных датчика A и B, измеряющих углы α и β во взаимно перпендикулярных плоскостях. Сигналы X и Y с датчиков A и B поступают через импульсный элемент на вычислительное устройство через интервалы времени Δt. Датчики имеют число уровней квантования, соответственно, m_X и m_Y. Система работает в течение времени *T*. Матрица совместных вероятностей имеет вид

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} 0,12 & 0,10 & 0,08 & 0,05 & 0,03 \\ 0,02 & 0,04 & 0,12 & 0,04 & 0,02 \\ 0,03 & 0,05 & 0,08 & 0,10 & 0,12 \end{Vmatrix}.$$

Числовые данные: $m_X = 3, m_Y = 5, \Delta t = 0,3, T = 30$ с. Определить количество информации, поступающее в вычислительное устройство за все время работы и в единицу времени.

2.15. Энтропия дискретного источника всегда положительна. Дифференциальная энтропия может быть отрицательной. Может ли быть отрицательной полная взаимная информация двух непрерывных систем?

2.16. Непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Она измеряется с ошибкой *Z*, также подчиняющейся нормальному распределению. Выходной величиной является случайная величина $Y = X + Z$. Чему равно количество информации *I(X, Y)*, поступающее в единицу времени, если *X* и *Y* независимы, средние значения: $\overline{x} = \overline{z} = 0$, дисперсии $\sigma_X^2 = 16, \quad \sigma_Z^2 = 9$?

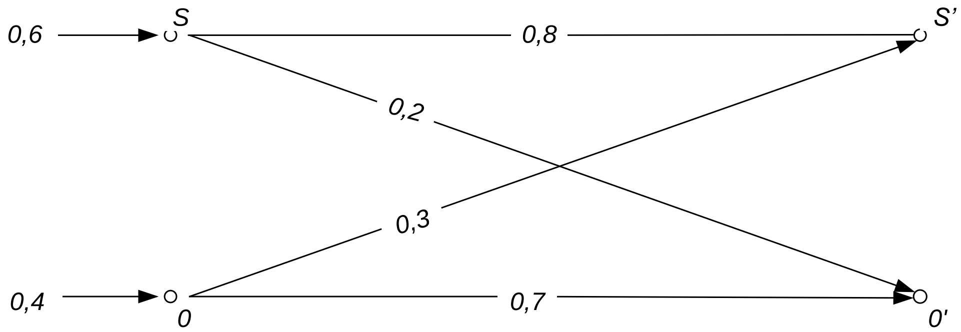
2.17. Вычислить эпсилон-энтропию непрерывного нормального процесса при заданной среднеквадратической ошибке измерения на выходе источника.

2.18. Лектор произносит в среднем около сорока шестибуквенных слов в минуту. Рассматривая его как источник дискретных сообщений, определить его производительность. Для простоты принять, что все буквы алфавита равновероятны и статистически независимы.

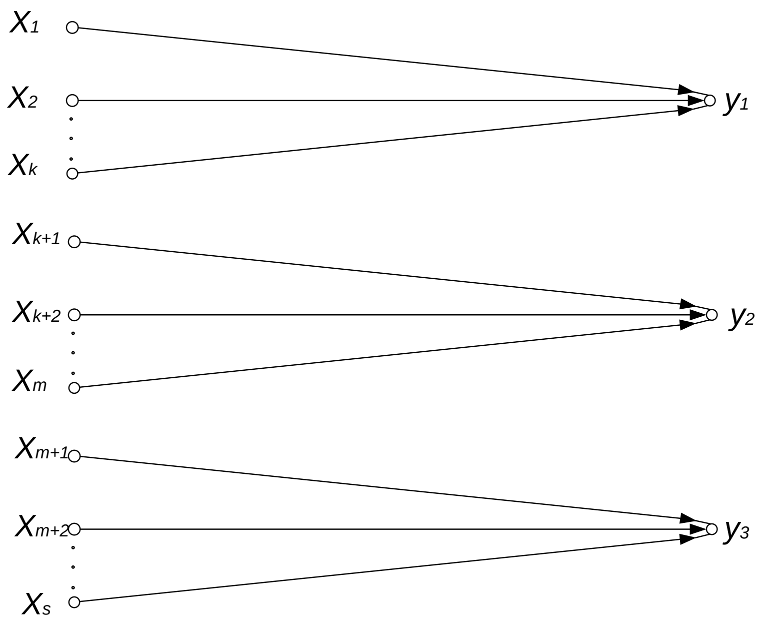
2.19. Сигнал S подается на вход канала с вероятностью 0,6 и отсутствует на входе с вероятностью 0,4. Поступивший сигнал воспроизводится на выходе канала с вероятностью 0,8 и теряется с вероятностью 0,2.

При отсутствии сигнала на входе возможен ложный сигнал S'. На выходе с вероятностью 0,3. Диаграмма канала представлена на рис. 13. Определить среднее количество информации о входном сигнале по фиксируемому выходному.

2.20. На рисунке представлена диаграмма канала со слабым разрешением. Определить количество информации, передаваемое по каналу.



2.21. На рисунке представлена диаграмма канала с неоднозначностью. Определить количество информации, передаваемое по каналу.



2.22. Построить диаграмму канала со слабым разрешением и с неоднозначностью. Определить его пропускную способность.

2.23. Определить пропускную способность симметричного канала с матрицей

$$P(y\mid x)=\begin{Vmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3\end{Vmatrix}.$$

2.24. Двоичный источник с равновероятными элементами имеет производительность 1000 бит/с. При передаче по каналу в среднем один из переданных 100 символов искажается. Определить скорость передачи информации по данному каналу.

2.25. Построить график зависимости пропускной способности двоичного симметричного канала без помех со стиранием в функции вероятности стирания информации.

2.26. Определить пропускную способность троичного симметричного канала связи.

2.27. Двоичный источник информации генерирует символы с вероятностями P_1 и P_0, поступающие на вход несимметричного канала с матрицей

$$P(Y\mid X)=\begin{Vmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{Vmatrix},$$

причем $P_{00}\neq P_{11}$. Определить пропускную способность канала.

2.28. Кодер обеспечивает передачу информации со скоростью $R=\dfrac{NH(x)}{T}$, бит/с. На выходе линии связи помимо декодера включено корректирующее устройство, обнаруживающее и исправляющее ошибки. Определить необходимую пропускную способность корректирующего устройства.

2.29. Определить максимально возможную скорость передачи информации по радиоканалу, если рабочая полоса частот канала равна 100 кГц, а отношение сигнал/шум равно 10.

2.30. Определить пропускную способность канала, если средняя мощность полезного сигнала равна P_c, полоса частот канала F_k, а помехами являются тепловые шумы приемного устройства, имеющего температуру $T°$. Построить (качественно) график зависимости пропускной способности от полосы частот F_k.

2.31. Определить полосу пропускания канала передачи телевизионного черно-белого изображения, содержащего $5 \cdot 10^5$ элементов. Изображение передается с частотой 25 кадров/с. Каждый элемент имеет 8 равновероятных градаций яркости. Полезный сигнал является шумоподобным, отношение сигнал/шум равно 15.

2.32. Определить пропускную способность канала с квантованием по уровню, если известно, что распределение входного сигнала *X(t)* равномерное, величина шага квантования $\Delta x = 1{,}1$ В, максимальное абсолютное значение уровня входного сигнала $X_{\max} = 6{,}2$ В, среднее значение сигнала равно нулю, граничная частота сигнала 10 кГц.

2.33. Телевизионное изображение состоит из 500 строк, каждая из которых содержит 200 элементов. Элемент имеет 8 равновероятных градаций. При передаче изображения по каналу с гауссовым шумом, имеющим спектральную плотность мощности $8 \cdot 10^{-18}$ Вт/кГц, используется полоса частот $F = 1$ кГц. Время подачи 1 ч. Определить минимальную мощность сигнала в предположении, что передача информации осуществляется со скоростью, близкой к пропускной способности канала.

2.34. Построить (качественно) график изменения пропускной способности непрерывного канала с белым гауссовым шумом с ростом полосы частот полезного сигнала.

2.35. Непрерывный источник создает сигнал мощностью 4000 Вт, с граничной частотой 1 кГц. Сигнал преобразуется в последовательность импульсов, модулированных по амплитуде. В канале действует белый гауссов шум со спектральной плотностью мощности S_z, равный 0,02 $Вт \cdot с$. Время передачи сигнала 20 мин. Определить пропускную способность канала и скорость передачи информации амплитудно-импульсными сигналами.

2.37. Найти пропускную способность канала с амплитудно-импульсной модуляцией, если число уровней сигнала равно 16, полоса частот исходного сигнала F_c, сигнал $u(t)$ равномерно распределен на участке $\left(-U_M, \quad +U_M\right)$, вероятность искажения, выражающая возможность перехода в соседний уровень, равна 5%.

2.38. Найти пропускную способность канала с частотной модуляцией, если исходный сигнал $u(t)$ представлен в виде 16 дискретных значений частоты. Частота сигнала $u(t)$ равна F_c. Допустимая вероятность искажения в связи с переходом в соседний уровень равна 5%.

2.39. Найти пропускную способность канала с кодоимпульсной модуляцией. Число уровней сигнала равно 16. Вероятность искажения, выражающая возможность перехода в соседний уровень, равна 5%. Длительность каждой кодовой комбинации постоянна и равна $\dfrac{1}{2F_c}$, где F_c – граничная частота исходного сигнала $u(t)$.

2.40. По радиоканалу с полосой частот 100 кГц, в котором действует белый гауссов шум со спектральной плотностью мощности $S_z = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Вт/кГц, передается сигнал $u(t)$, имеющий граничную частоту 10 кГц и среднюю мощность P_c = 14 Вт. Сколько времени займет передача сигнала по данному каналу?

3 Эффективное кодирование сообщений

Кодирование при отсутствии помех

С точки зрения теории информации *кодирование* есть процесс сопоставления элементов алфавита цифрам. Правило сопоставления называется *кодом.* Цифры, сопоставленные элементам алфавита, называются *кодовыми словами.*

В зависимости от системы счисления, положенной в основу образования цифр (кодовых слов), различают кодирования бинарное, триарное, тетрарное и т. д. В первом случае элементы алфавита сопоставляются бинарным числам, составленным из единиц и нулей. Число различных элементов кода называется его *основанием* h (в данном случае $h = 2$). Число элементов кода, используемое для представления одного элемента алфавита, называется *значностью кода.* Если значность одинакова для всех элементов алфавита, то код называется *равноменным*.

При технической реализации кода каждому элементу кода сопоставляется физический элемент – импульс напряжения, тока или другой величины. Импульсы различных элементов должны быть различимы техническими средствами. Вопрос о выборе физических элементов кода представляет собой отдельную важную задачу, не рассматриваемую нами здесь.

Задачи кодирования при отсутствии помех и при наличии помех в канале связи существенно различны. В первом случае ставится задача добиться представления элементов алфавита источника при минимальной средней значности кода, т. е. минимальным числом элементов кода в среднем на букву алфавита. Это достигается путем по возможности полной ликвидации избыточности сообщения. Во втором случае ставится задача снижения вероятности ошибок в передаче элементов алфавита. Это достигается, наоборот, введением избыточности («излишних» элементов) в кодовые слова.

Эффективным называется кодирование, при котором достигается решение первой задачи. Теоретически доказывается, что минимальная средняя длина кодовых слов

$$\overline{L_{\min}} = \frac{H}{\log h}, \tag{3.1}$$

где H – энтропия источника (сообщения), h – основание кода. Для бинарного кода, очевидно, $\overline{L_{\min}} = H$. Отношение $\overline{L_{\min}}$ к реально достигнутой в данном коде средней длине кодовых слов

$$x = \frac{\overline{L_{\min}}}{L} = \frac{H}{L \log h} \tag{3.2}$$

называется *эффективностью кода.* Качество кода можно охарактеризовать также избыточностью кода:

$$R = 1 - \frac{n_{\min}}{n}, \tag{3.3}$$

где n – использованное число элементов кода для передачи, а $n_{\min}$ – теоретически возможное число элементов.

К пределу, определяемому отношением (3.1), практически можно приблизиться в том смысле, что средняя длительность кодовых слов будет удовлетворять условию

$$\frac{H}{\log h} \le \overline{L} \le \frac{H}{\log h} + 1. \tag{3.4}$$

Средняя длительность кодовых слов может быть подсчитана как

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{M} P(x_i) n_i, \tag{3.5}$$

где $P(x_i)$ – вероятность элементов из алфавита *M*, n_i – длительность кодового слова, соответствующего элементу x_i. При равновероятных кодах все n_i, очевидно, одинаковы и тогда $\overline{L} = n_i = n$.

Общее правило получения эффективного кода неизвестно. Однако из общих соображений можно представить себе принципы его построения. Для ансамбля элементов x_i можно задать «функцию стоимости» (цену передачи элементов) в виде

$$C = \sum_{i=1}^{m} P(x_i) W_i \,,$$

где $P(x_i)$ – вероятности элементов сообщения, а W_i – стоимость их передачи. Эффективный код должен минимизировать функцию стоимости *C*. Если передачи всех элементов кода имеют одинаковую стоимость, то стоимость передачи элементов x_i, т. е. W_i, будет пропорциональна длине соответствующего кодового слова. Следовательно, в общем случае (при разновероятных элементах сообщения) кодовые слова должны быть неодинаковой длительности, т. е. код будет неравномерным. Неравномерные коды должны быть однозначно декодируемы без дополнительных разделительных знаков, так как они снизили бы эффективность построенного кода. Теорема Мак-Миллана утверждает, что для однозначного декодирования должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^{M_0} h^{-n_i} \le 1, \qquad (3.6)$$

где M_o – общее число кодовых комбинаций, n_i – длина i – комбинации, *h* – основание кода.

Исходя из изложенных соображений рядом авторов предложены алгоритмы кодирования, при которых достигается $\overline{L}$, близкое к $\overline{L_{\min}}$, по (3.1) и достигается минимум *С*. Принципы близкого к эффективному кодирования состоят в том, чтобы:

а) длина кодового слова n_i была обратно пропорциональна вероятности соответствующего элемента алфавита x_i;

б) начало более длинного слова не должно совпадать с более коротким (для возможности разделения слов без применения разделительных знаков);

в) в длинной последовательности элементы кода должны быть независимы и равновероятны.

Алгоритмы кодирования

Алгоритм Шеннона-Фэно получения близкого к эффективному бинарного кода состоит в том, что расположенные в порядке убывания вероятностей элементы алфавита делятся на две группы по возможности равной суммарной (в каждой группе) вероятности. Все элементы первой группы получают элемент 1 в качестве первой крайней слева позиции кодовых слов, а все элементы второй группы – 0. Далее группы делятся на подгруппы по тому же правилу примерно равных вероятностей и в каждой подгруппе заполняется вторая слева позиция кодового слова (0,1). Процесс повторяется до закодирования всех элементов алфавита. Таблица 3.1 иллюстрирует сказанное на примере алфавита из $\mathrm{M} = 8$ элементов. В этом примере первая подгруппа при каждом разделении оказывается состоящей из одного элемента.

Алгоритм Шеннона-Фэно применим и при основании кода $h > 2$. В этом случае алфавит разбивается на h частей примерно одинаковой суммарной вероятности.

Алгоритм Хаффмена обеспечивает получение кодовых слов за более короткое время. Все элементы сообщения располагаются в столбец, как и при методе Шеннона-Фэно (см. пример кодирования в таблицу 3.2). Затем два наименее вероятных элемента (расположенных в двух последних строках столбца) объединяются в один, которому приписывается суммарная вероятность. Затем составляется первая вспомогательная группировка элементов, отличающаяся от исходной тем, что объединенный элемент занимает положение в колонке, соответствующее его вероятности (см. стрелку в таблицу 3.2). Далее процесс объединения пары наименее вероятных элементов и создания второй и последующих вспомогательных группировок повторяется до получения единственного элемента с вероятностью 1 (последняя колонка в таблицу 3.2).

Таблица 3.1 – Алгоритм Шеннона-Фэно

Элементы	Вероятности	Номера разбиений	Кодовые слова
m_1	1/2		0
		I	
m_2	1/4		10
		II	
m_3	1/8		110
		III	
m_4	1/16		1110
		IV	
m_5	1/32		11110
		V	
m_6	1/64		111110
		VI	
m_7	1/128		1111110
		VII	
m_8	1/128		1111111

Для образования кодовых слов элементов x_i необходимо проследить переходы элементов во вспомогательных группировках. При каждом переходе во вспомогательную группировку элементу присваивается знак 0 (или 1), если элемент займет по вероятности верхнее положение при его объединении с наименее вероятным в соответствующей группировке, и знак 1 (или 0), если он займет нижнее положение. (Знаки на позициях выставляются справа налево.) Так, элемент x_3 (с вероятностью 0,15) при его объединении с наименее вероятным (четвертым, с вероятностью 0,12) занимает верхнее положение. Это определяет знак 0 на крайней правой позиции. Затем объединенный элемент с вероятностью 0,27 в шестой группировке занимает нижнее положение. Это определяет знак 1 на второй справа позиции. Наконец, суммарный элемент с вероятностью 0,60 занимает в седьмой группировке верхнее положение, что определяет знак 0 на последней, третьей справа позиции. Таким образом, кодовое слово элемента x_3 имеет вид 010. Аналогично находятся кодовые слова всех элементов сообщения.

Алгоритмы Шеннона-Фэно и Хаффмена пригодны для кодирования независимых элементов. Если источник характеризуется зависимостью элементов (например, попарной), то используется методика Шеннона-Фэно или Хаффмена, однако по отношению к парам элементов, для которых вычисляются предварительно вероятности по формуле (3.7).

Принято изображать совокупность кодовых комбинаций эффективного кода в виде графа, получившего название *кодового дерева.*

Таблица 3.2 - Алгоритм Хаффмена

Исходные элементы	Вероятности	Вспомогательные группировки							
		1	2	3	4	5	6	7	8
									1,00
								0,60	
							0,40	0,40	
						0,33	0,33		
					0,27	0,27	0,27		
x_1	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20			
				0,20	0,20	0,20			
			0,18	0,18	0,18				
x_2	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15				
x_3	0,15	0,15	0,15	0,15					
x_4	0,12	0,12	0,12	0,12					
x_5	0,10	0,10	0,10						
x_6	0,10	0,10	0,10						
		0,10							
x_7	0,08	0,08							
x_8	0,06								
x_9	0,04								

Принципы оптимального кодирования нашли применение в задачах технической диагностики сложных объектов, для которых известны статистические или логические связи между результатами проверок и видами неисправностей. Поиск неисправностей организуется таким образом, чтобы каждая проверка обеспечивала максимальную информационную нагрузку, т. е. снимала бы наибольшую неопределенность на каждом шаге.

Помехоустойчивое кодирование представляет собою отдельную весьма сложную задачу, нами здесь не рассматриваемую.

Ниже будут использоваться следующие определения. Код называется *разделимым,* если сообщение, составленное в коде без применения дополнительных разделительных элементов, может быть однозначно декодировано. Неравномерный код называется *префиксным,* если ни одна из кодовых комбинаций не совпадает с началом другой, более длинной кодовой комбинации.

Упражнения и задачи

3.1. Источник информации задан матрицей

$$\left\| \begin{matrix} X \\ P \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \ldots x_8 \\ 1/8 & 1/8 \ldots 1/8 \end{matrix} \right\|.$$

Закодировать ансамбль сообщений x_i: а) кодом Шеннона-Фэно, б) нормальным двоичным кодом. Определить основные характеристики эффективного кода.

3.2. Построить код Шеннона-Фэно для ансамбля сообщений с вероятностями $1/6, 1/6, \ldots, 1/6$. Определить характеристики кода.

3.3. Пользуясь понятием *объема кода* (объем кода – произведение разрядности, или значности, кода на его основание), показать, что двоичные и троичные коды являются наиболее экономичными.

3.4. Сообщение кодируется при помощи двух групп символов, причем в первой группе имеется *k* символов, встречающихся с вероятностями

$$P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1k}, \quad \sum_{i=1}^{k} P_{1i} = \alpha,$$

а во второй группе имеется *m* символов, встречающихся с вероятностями

$$P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2m}, \quad \sum_{j=1}^{m} P_{2j} = 1 - \alpha.$$

Считая, что значение α задано, определить, при каких вероятностях P_{1i} и P_{2j} энтропия максимальна. Построить оптимальный код для $k = m = 4$ и $\alpha = 0{,}4$.

3.5. В сообщениях используются символы алфавита A_1, A_2, A_3, A_4 с вероятностями соответственно 0,45; 0,1; 0,15 и 0,3. Для передачи сообщения по каналу связи могут быть применены два кода. В первом символам алфавита соответствуют символы кода *a, b,* c, *d,* во втором – *a, d, b, c.* Длительности элементов кода в условных единицах равны: $t_\alpha = 8, \quad t_b = 6, \quad t_c = 5, \quad t_d = 3$. Определить количество информации, передаваемое каждым кодом в единицу времени. Построить оптимальный код.

3.6. В условиях предыдущей задачи наряду с указанными кодами рассмотреть другие возможные коды и определить наиболее эффективный из них.

3.7. Семь равновероятных сообщений кодируются: а) нормальным двоичным кодом, б) оптимальным кодом Шеннона-Фэно. Определить избыточности кодов.

3.8. Построить код Шеннона-Фэно для ансамбля сообщений с вероятностями 0,25; 0,25; 0,125; 0,125; 0,0625; 0,0625; 0,0625; 0,0625 и определить его основные характеристики.

3.9. Пользуясь алгоритмом Хаффмена, построить для ансамбля сообщений с вероятностями 0,18; 0,17; 0,16; 0,15; 0,1; 0,08; 0,05; 0,05; 0,04; 0,02: а) двоичный код, б) код с основанием 4. Определить характеристики кодов.

3.10. Кодовая таблица имеет вид

x_i	$P(x_i)$	*Код*
x_1	1/2	0
x_2	1/4	1 0
x_3	1/8	1 1 0
x_4	1/16	1 1 1 0
x_5	1/16	1 1 1 1

Показать, что элементы 0 и 1 кодовых слов имеют максимальную энтропию.

3.11. Убедиться на примере, что коды, получаемые по методам Шеннона-Фэно и Хаффмена, являются префиксными, т. е. ни одна из кодовых комбинаций не является началом (префиксом) другой.

3.12. Доказать условие однозначного декодирования кодов

$$\sum_{i=1}^{M_0} h^{-n_i} \leq 1,$$

где n_i – длина i-й кодовой комбинации, h – основание кода, M_o – общее число кодовых комбинаций.

3.13. Ансамблю сообщений с вероятностями 0,4; 0,4; 0,2 сопоставлен код 0–1–10. Определить характеристики кода. Преобразовать данный код в разделимый.

3.14. Ансамбль из девяти сообщений представлен в виде четырех одноэлементных и пяти двухэлементных кодовых комбинаций. Определить минимальное кодовое основание, при котором код получается разделимым (однозначно декодируемым).

3.15. Показать, пользуясь теоремой Мак-Миллана, что нормальный двоичный код – разделимый.

3.16. Сообщения с вероятностями 0,5; 0,25; 0,0625; 0,0625; 0,0625; 0,0625 кодируются одним из шести различных кодов: 1) 0–10–110–1110–1011–1101; 2) 1–011–010–001–000–110; 3) 0–10–110–1110–11110–111110; 4) 111–110–101–100–011–010; 5) 0–01–011–0111–01111–011111; 6) 1–01–0011–0010–0001–0000. Определить, какие коды являются разделимыми. Вычислить характеристики кодов.

3.17. Сообщение составлено из неравновероятных независимых элементов x_1 с вероятностью 0,89 и x_2 с вероятностью 0,11. Закодировать последовательность $x_1x_1x_1x_2x_1x_1x_1x_1x_2x_1x_1x_1$ двоичным кодом так, чтобы эффективность была не хуже 0,8.

3.18. Равновероятные элементы x_1 $\left(P_1 = 0,5\right)$ и x_2 $\left(P_2 = 0,5\right)$ образуют последовательность $x_1x_2x_1x_1x_1x_2x_2x_2x_1x_1$. Заданы условные вероятности $P\left(j \mid i\right)$:

$$P\left(j \mid i\right) = \begin{Vmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{Vmatrix}.$$

Закодировать последовательность двоичным кодом так, чтобы эффективность была не хуже 0,85.

3.19. Сообщение состоит из последовательности трех независимых букв x_1, x_2, x_3, вероятности появления которых равны соответственно 0,7;

0,2 и 0,1. Произвести кодирование эффективным кодом: а) отдельных букв, б) двухбуквенных сочетаний и сравнить характеристики кодов.

3.20. Для эффективной передачи последовательностей, состоящих из неравновероятных нулей и единиц $(P_0 >> P_1)$, используют *кодирование длин серий.* При этом непосредственно передаются только маловероятные символы, а высоковероятные элементы передаются в виде двоичного кода, выражающего их число. Определить основные характеристики такого способа кодирования, если известно среднее число двоичных символов $\overline{L}$, используемых при кодировании.

3.21. Построить графические модели кодов (в виде кодового дерева) для задач **3.1**, **3.8**, **3.9**.

3.22. Имеется 12 монет одного достоинства. Из них 11 имеют одинаковый вес, а одна – фальшивая, отличается по весу от остальных. Каково наименьшее число взвешиваний на рычажных весах без гирь, которое позволяет обнаружить фальшивую монету и выяснить, легче ли она, чем остальные монеты, или тяжелее? Построить «кодовое дерево» взвешиваний.

3.23. Для обнаружения неисправностей прибора производится ряд проверок, результаты которых выражаются нулем (отсутствие неисправности) или единицей (наличие неисправности). Связь между проверками и неисправностями задается при помощи таблицы:

Проверки	*Неисправновности*			
	H_1	H_2	H_3	H_4
X_1	0	1	0	0
X_2	0	0	1	0
X_3	1	0	1	0
X_4	0	0	0	1
X_5	0	1	1	0

Составить последовательность из минимального числа проверок и нарисовать кодовое дерево системы проверок.

6.24. Построить кодовое дерево системы проверок для обнаружения отказавшего блока устройства. Устройство состоит из шести блоков. В процессе поиска неисправного блока можно контролировать шесть различных параметров. Связь между отказавшими элементами и контролируемыми параметрами задана при помощи таблицы:

	Блоки устройства *Вероятности отказов*	$Б_1$ 0,2	$Б_2$ 0,1	$Б_3$ 0,15	$Б_4$ 0,1	$Б_5$ 0,2	$Б_6$ 0,25
Проверки	X_1	1	0	1	0	1	0
	X_2	0	1	0	1	1	0
	X_3	1	0	1	1	1	0
	X_4	0	0	1	0	0	1
	X_5	1	0	0	0	0	1
	X_6	0	1	1	1	1	0

Единица в клетке $(i,\ j)$ указывает на обнаружение отказавшего блока j в результате i-й проверки. Для блоков $Б_1 - Б_6$ заданы вероятности отказов. Требуется определить среднюю длину кода неисправностей.

Литература

1. Солодов А.В. Теория кодирования и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. – М.: Наука, 1967 – 432 с.
2. Темников Ф.Е. и др. Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие для вузов. 2 – е изд., и доп. – М.: Энергия, 1979.
3. Четвериков В. И. Преобразование и передача информации в АСУ. Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1974.
4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Издательство иностр. лит., 1963.

Методические указания к проведению
Лабораторных работ по дисциплине «Представление данных в системах управления»
для студентов направления
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств

Составитель: канд. техн. наук А.А. Евдокимов

Редактор

Подписано в печать Формат 60×84/16

Уч.-изд. л. 3,4 Тираж

ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский Федеральный Университет»
Невинномысский технологический институт (филиал)

Невинномысск, ул. Гагарина, 1