

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Невинномысский технологический институт (филиал)

---

Кафедра информационных систем, электропривода и автоматики

# **УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

методические указания к контрольной работе  
для студентов направления подготовки  
15.03.04 — Автоматизация технологических процессов и  
производств

Невинномысск 2021

Методические указания предназначены для выполнения контрольной работы по дисциплине «Управление системами в условиях неопределенности» для студентов направления подготовки 15.03.04 — Автоматизация технологических процессов и производств. Они составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО направления подготовки бакалавров.

В методических указаниях рассмотрены общие требования к контрольной работе, даны рекомендации по ее подготовке и оформлению и приведены необходимые теоретические сведения.

Составитель *канд. техн. наук, доцент Болдырев Д.В.*

Рецензент *канд. техн. наук, доцент Евдокимов А.А.*

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....  | 4  |
| 1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....           | 5  |
| 2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ..... | 6  |
| 3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....  | 7  |
| 3.1 Понятие о стохастической идентификации.....                    | 7  |
| 3.2 Оптимальный фильтр Винера .....                                | 10 |
| КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....  | 12 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....                                     | 13 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А .....   | 15 |

## ВВЕДЕНИЕ

Для описания поведения систем, на которые влияют случайные помехи, используется достаточно специфический математический аппарат. Без овладения им эффективное моделирование и конструирование систем автоматического управления невозможно.

Дисциплина «Управление системами в условиях неопределенности» ставит своей целью формирование следующих компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 15.03.04 — Автоматизация технологических процессов и производств.

| Код   | Формулировка   |
|-------|--|
| ОПК-4 | способностью участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, связанных с автоматизацией производств, выборе на основе анализа вариантов оптимального прогнозирования последствий решения;   |
| ПК-1  | способностью собирать и анализировать исходные информационные данные для проектирования технологических процессов изготовления продукции, средств и систем автоматизации, контроля, технологического оснащения, диагностики, испытаний, управления процессами, жизненным циклом продукции и ее качеством; участвовать в работах по расчету и проектированию процессов изготовления продукции и указанных средств и систем с использованием современных информационных технологий, методов и средств проектирования |

Главными задачами дисциплины являются: усвоение студентами принципов анализа и синтеза систем управления, находящихся под влиянием случайных воздействий, приобретение практических навыков использования методов теории оптимальной фильтрации.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- знать принципы автоматизации производства;
- уметь разрабатывать обобщенные варианты решения проблем, связанных с автоматизацией производства;
- владеть навыками анализа вариантов оптимального прогнозирования последствий принятого решения.

## **1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Контрольная работа — обязательный вид учебной работы, выполняется студентом в течение учебного года.

Контрольная работа является самостоятельной исследовательской работой студента и представляет собой логически завершенное и оформленное научное исследование с целью формирования у студента навыков научно-исследовательской работы, повышения уровня его профессиональной (теоретической и практической) подготовки, более глубокого усвоения учебной дисциплины, развития умения и интереса к самостоятельной работе с научной и справочной литературой.

Выполнение контрольной работы имеет целью обогащение знаний студентов, обучение методам теоретического анализа явлений и закономерностей науки, выработку навыков применения теоретических знаний к комплексному решению профессиональных задач, использования справочной литературы, методов математической обработки экспериментальных данных, компьютерных технологий.

Целью контрольной работы по дисциплине «Управление системами в условиях неопределенности» является развитие умений и навыков:

- синтезировать оптимальный фильтр Винера;
- обосновывать применяемые решения расчетами, вычислительными экспериментами и результатами моделирования;

- использовать компьютерные технологии и современные прикладные пакеты программ.

В процессе выполнения контрольной работы студентом должны решаться следующие задачи:

- приобретение новых теоретических знаний в соответствии с темой работы и заданием руководителя;

- развитие умений систематизировать, обобщать и логично излагать концепции, альтернативные точки зрения исследуемых проблем;

- развитие учебно-исследовательских и методических умений, необходимых для построения системы научного анализа изучаемого аспекта;

- совершенствование профессиональной подготовки.

## **2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

В расчетно-пояснительную записку контрольной работы входят:

- титульный лист;
- задание;
- содержание;
- подлежащие разработке вопросы расчетно-пояснительной записки;
- заключение;
- список использованных источников.

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить порядок идентификации динамических объектов, находящихся под влиянием случайных воздействий.

При выполнении работы необходимо по данным о спектральной плотности входного сигнала и взаимной спектральной плотно-

сти входного и выходного сигналов идентифицировать объект, синтезировав оптимальный фильтр Винера, и оценить качество полученной динамической модели.

Результаты расчетов должны приводиться как в числовой, так и в графической форме. Адекватность динамической модели достаточно оценить с помощью интегральной оценки квадрата ошибки

$$J = \int_0^{\omega'} [S_{xy}(\omega) - W(j\omega) \cdot S_x(\omega)]^2 d\omega, \quad (2.1)$$

которая должна быть достаточно мала. Верхний предел интегрирования в (2.1) соответствует частоте, при которой значение модуля частной передаточной функции не превышает **5-10%** от его значения при нулевой частоте.

Варианты заданий приведены в приложении А.

### 3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

#### 3.1 Понятие о стохастической идентификации

Если выходные сигналы объекта полностью определяются наблюдаемыми входными воздействиями, то для его идентификации достаточно использовать *методы активного эксперимента*. В реальных условиях на значения выходных сигналов влияют неуправляемые и ненаблюдаемые воздействия (шумы). Все ненаблюдаемые помехи, воздействующие на различные части объекта, могут быть приведены к его выходу и представлены в виде аддитивного шума  $\xi(t)$  (см. рисунок 3.1).

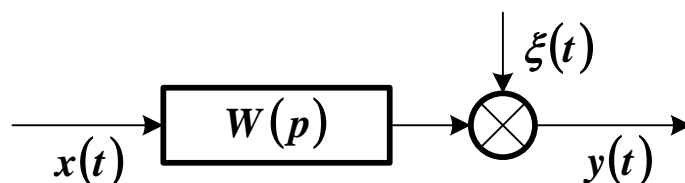


Рисунок 3.1 — Структурная схема модели объекта с операторной передаточной функцией  $W(p)$  и аддитивным шумом  $\xi(t)$

В результате воздействия случайных помех изменение состояния объекта происходит и в режиме его нормальной эксплуатации. Следовательно, объект может быть идентифицирован по результатам статистической обработки наблюдений его входных и выходных сигналов (или по результатам *пассивного эксперимента*).

Пусть имеется объект с сосредоточенными параметрами, одним входным сигналом  $x(t)$  и выходным сигналом  $y(t)$ , которые являются *стационарными эргодическими случайными процессами* с равными нулю математическими ожиданиями.

**Примечание.** Случайный процесс  $x(t)$  считается **стационарным**, если его математическое ожидание постоянно. Случайный процесс считается **эргодическим**, если его среднее по времени

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) dt$$

равно математическому ожиданию.

Чтобы получить уравнение связи между статистическими характеристиками  $x(t)$  и  $y(t)$ , используют их корреляционные функции и спектральные плотности.

**Корреляционная функция** сигнала  $x(t)$  учитывает связь между его значениями в моменты времени, отстоящие на величину  $\tau$ . Она определяется выражением

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (3.1)$$

Взаимная корреляционная функция случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  вычисляется по формуле

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt. \quad (3.2)$$

Сигнал на выходе объекта, показанного на рисунке 3.1, находится с помощью формулы свертки



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau + \xi(t), \quad (3.3)$$

где  $\varpi(\tau)$  — искомая импульсная переходная функция объекта. Умножив левую и правую части (3.3) на  $x(t - \tau)$ , проинтегрировав их по  $\tau$  в интервале от  $-T$  до  $T$  и перейдя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , по формулам (3.1) и (3.2) получим

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\tau) \cdot R_{xx}(t - \tau) d\tau + R_{x\xi}(t). \quad (3.4)$$

Считая, что сигналы  $x(t)$  и  $\xi(t)$  не коррелированы, и учитывая, что  $\varpi(t) = 0$  при отрицательных значениях времени, можно получить **интегральное уравнение Винера-Хопфа**

$$R_{xy}(t) = \int_0^{\infty} \varpi(\tau) \cdot R_{xx}(t - \tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5), записанное для дискретных моментов времени  $t$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, T$  при достаточно большом  $T$ , определит систему

$$\sum_{\tau=0}^T R_{xx}(t - \tau) \varpi(\tau) = R_{xy}(t), \quad t = 0, \dots, n. \quad (3.6)$$

Значения  $\varpi(\tau)$ , найденные решением (3.6), будут являться лучшими оценками идентифицируемого объекта по критерию минимума среднеквадратичной ошибки модели.

Оценки корреляционных функций (3.1) и (3.2) при достаточно большом  $T$  могут быть рассчитаны по формулам

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T - \tau} \cdot \sum_{t=0}^{T-\tau} x(t) \cdot x(t + \tau), \\ R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T - \tau} \cdot \sum_{t=0}^{T-\tau} x(t) \cdot y(t + \tau). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Структура системы (3.6) такова, что незначительные ошибки при оценке  $R_{xx}(\tau)$  и  $R_{xy}(\tau)$  приводят к существенным ошибкам при оценке  $\varpi(\tau)$ . Поэтому функции, входящие в (3.6), обычно сглаживают.

Выполнив преобразование Фурье над (3.5), получим **частотное уравнение Винера-Хопфа**

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega) \cdot S_x(\omega), \quad (3.8)$$

где  $S_x(\omega)$  — спектральная плотность сигнала  $x(t)$ , показывающая распределение его энергии по частотному спектру,  $S_{xy}(j\omega)$  — взаимная спектральная плотность  $x(t)$  и  $y(t)$ ,  $j$  — мнимая частота. Искомая частотная передаточная функция объекта  $W(j\omega)$  найдется по формуле

$$W(j\omega) = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_x(\omega)}. \quad (3.9)$$

Ошибки ее определения будут велики, если вместо точных значений спектральных плотностей используются их оценки.

Полученное решение может быть физически нереализуемо, поэтому оно обязательно должно быть скорректировано.

### 3.2 Оптимальный фильтр Винера

Н. Винером была предложена методика нахождения реализуемой частотной передаточной функции объекта — динамической модели, обеспечивающей минимум среднеквадратичной ошибки (**оптимального фильтра Винера**).

Обычно спектральные плотности сигналов представляют в виде дробно-рациональных функций

$$S_x(\omega) = \frac{S_x(\theta)}{1 + T_x^2 \cdot \omega^2}, \quad S_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\theta)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2}, \quad (3.10)$$

где  $S_x(\theta)$  и  $S_{xy}(\theta)$  — начальные значения спектральных плотностей,  $T_x$  и  $T_{xy}$  — постоянные времени.

Спектральная плотность входного сигнала факторизуется (т. е. раскладывается на произведение комплексно сопряженных выражений)

$$S_x(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega) \cdot \Psi(-j\omega), \quad (3.11)$$

где  $\Psi(j\omega)$  — функция, содержащая все нули и полюсы в левой комплексной полуплоскости (т. е. соответствующая физически ре-

ализуемой частотной передаточной функции),  $\Psi(-j\omega)$  — функция, содержащая все нули и полюсы в правой комплексной полуплоскости (т. е. соответствующая физически нереализуемой частотной передаточной функции).

Физически реализуемая частотная передаточная функция объекта находится из выражения

$$W(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \cdot \left[ \frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ \quad (3.12)$$

Нижний индекс «плюс» у выражения в скобках означает, что все его полюсы расположены в левой комплексной полуплоскости. Для его определения отношение  $S_{xy}(j\omega)$  к  $\Psi(-j\omega)$  представляется в виде суммы простых дробей, из которой исключаются слагаемые с полюсами в правой комплексной полуплоскости.

*Пример. Синтез оптимального фильтра Винера.*

*Факторизация спектральной плотности входного сигнала, рассчитанной по формуле (3.10):*

$$S_x(\omega) = \Psi(j\omega) \cdot \Psi(-j\omega),$$

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{S_x(0)}}{1 + T_x \cdot (j\omega)},$$

$$\Psi(-j\omega) = \frac{\sqrt{S_x(0)}}{1 - T_x \cdot (j\omega)}.$$

*Определение физически реализуемой части передаточной функции:*

$$\frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{S_{xy}(0)}{\sqrt{S_x(0)}} \cdot \frac{1 - T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2},$$

$$\frac{1 - T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2} = \frac{1}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \left[ \frac{T_x + T_{xy}}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)} - \frac{T_x - T_{xy}}{1 - T_{xy} \cdot (j\omega)} \right],$$

$$\left[ \frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{S_{xy}(0)}{\sqrt{S_x(0)}} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \frac{1}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)}.$$

Определение частотной передаточной функции объекта:

$$W(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \cdot \left[ \frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{S_{xy}(0)}{S_x(0)} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \frac{1 + T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)}$$

Определение передаточной функции объекта:

$$W(s) = k \cdot \frac{1 + T_x \cdot s}{1 + T_{xy} \cdot s},$$

$$k = \frac{S_{xy}(0)}{S_x(0)} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}}.$$

• • •

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под стохастической идентификацией объекта? Когда возникает необходимость использовать для идентификации результаты пассивного эксперимента?
2. Как идентифицируется объект с помощью интегрального уравнения Винера-Хопфа?
3. Как идентифицируется объект с помощью частотного уравнения Винера-Хопфа?
4. Как синтезируется оптимальный фильтр Винера?

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Перечень основной литературы:

1. Гаврилов, А. Н. Теория автоматического управления технологическими объектами (линейные системы) : учебное пособие / А. Н. Гаврилов, Ю. П. Барметов, А. А. Хвостов ; под редакцией С. Г. Тихомиров. — Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2016. — 244 с. — ISBN 978-5-00032-176-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/50645.html>. — Режим доступа: для авторизованных пользователей

2. Глазырин, Г. В. Теория автоматического регулирования : учебное пособие / Г. В. Глазырин. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2014. — 168 с. — ISBN 978-5-7782-2473-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/45443.html>. — Режим доступа: для авторизованных пользователей

Перечень дополнительной литературы:

1. Родин, Б. П. Случайные процессы в линейных системах : учебное пособие по курсу теория автоматического управления / Б. П. Родин. — Саратов : Вузовское образование, 2013. — 19 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

<http://www.iprbookshop.ru/18388.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Аркашов, Н. С. Теория вероятностей и случайные процессы : учебное пособие / Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет,

2014. — 238 с. — ISBN 978-5-7782-2382-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45444.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Тарасов, В. Н. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы : учебное пособие / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева. — Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 283 с. — ISBN 5-7410-0415-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71890.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Варианты заданий для самостоятельного решения

| №  | $S_x(\theta)$ | $T_x$ | $S_{xy}(\theta)$ | $T_{xy}$ |
|----|---------------|-------|------------------|----------|
| 1  | 0,1           | 1     | 0,1              | 3        |
| 2  | 0,2           | 2     | 0,2              | 4        |
| 3  | 0,3           | 3     | 0,3              | 5        |
| 4  | 0,4           | 4     | 0,4              | 6        |
| 5  | 0,5           | 1     | 0,5              | 7        |
| 6  | 0,5           | 2     | 0,6              | 3        |
| 7  | 0,4           | 3     | 0,7              | 4        |
| 8  | 0,3           | 4     | 0,8              | 5        |
| 9  | 0,2           | 1     | 0,9              | 6        |
| 10 | 0,1           | 2     | 0,1              | 7        |
| 11 | 0,1           | 3     | 0,2              | 3        |
| 12 | 0,2           | 4     | 0,3              | 4        |
| 13 | 0,3           | 1     | 0,4              | 5        |
| 14 | 0,4           | 2     | 0,5              | 6        |
| 15 | 0,5           | 3     | 0,6              | 7        |
| 16 | 0,5           | 4     | 0,7              | 3        |
| 17 | 0,4           | 1     | 0,8              | 4        |
| 18 | 0,3           | 2     | 0,9              | 5        |
| 19 | 0,2           | 3     | 0,1              | 6        |
| 20 | 0,1           | 4     | 0,2              | 7        |
| 21 | 0,1           | 1     | 0,3              | 3        |
| 22 | 0,2           | 2     | 0,4              | 4        |
| 23 | 0,3           | 3     | 0,5              | 5        |
| 24 | 0,4           | 4     | 0,6              | 6        |
| 25 | 0,5           | 1     | 0,7              | 7        |
| 26 | 0,5           | 2     | 0,8              | 3        |
| 27 | 0,4           | 3     | 0,9              | 4        |
| 28 | 0,3           | 4     | 0,1              | 5        |
| 29 | 0,2           | 1     | 0,2              | 6        |
| 30 | 0,1           | 2     | 0,3              | 7        |