

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Северо-Кавказский федеральный университет»

Невинномысский технологический институт (филиал)

Методические указания

к выполнению лабораторных работ дисциплины основы
компьютерного моделирования "Построение вероятностных
динамических моделей"

для студентов направления

15.03.04 - «Автоматизация технологических процессов и
производств»

Невинномысск 2019

Настоящие методические указания предназначены для студентов направления 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Они разработаны в соответствии с государственным образовательным стандартом и основной образовательной программой специальности.

В методических указаниях рассмотрены правила идентификации детерминированных динамических объектов, находящихся под влиянием случайных воздействий, определены требования к содержанию лабораторной работы, даны варианты заданий и приведен список рекомендуемой литературных источников

Составитель канд. техн. наук доцент Д.В. Болдырев

Отв. Редактор канд. техн. наук, доцент А.А. Евдокимов

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	4
1	ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
	1.1 Понятие о стохастической идентификации	4
	1.2 Оптимальный фильтр Винера	7
2	ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	10
	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	10
	ЛИТЕРАТУРА	11
	ПРИЛОЖЕНИЯ	12

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – усвоение основных правил построения стохастических динамических моделей систем и оценки их качества.

Содержание работы – определение параметров передаточной функции линейной системы, представление полученных результатов в форме отчета и доказательство их правильности.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Понятие о стохастической идентификации

Если выходные сигналы объекта полностью определяются наблюдаемыми входными воздействиями, то для его идентификации достаточно использовать *методы активного эксперимента* [5]. В реальных условиях на значения выходных сигналов влияют неуправляемые и ненаблюдаемые воздействия (шумы). Все ненаблюдаемые помехи, воздействующие на различные части объекта, могут быть приведены к его выходу и представлены в виде аддитивного шума $\xi(t)$ (см. рисунок 1.1).

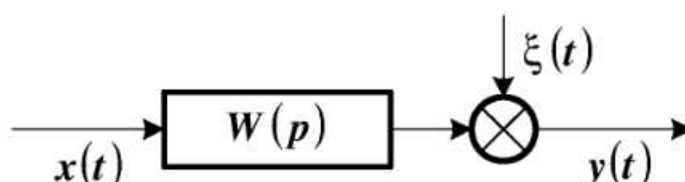


Рисунок 1.1 – Структурная схема модели объекта с операторной передаточной функцией $W(p)$ и аддитивным шумом $\xi(t)$

В результате воздействия случайных помех изменение состояния объекта происходит и в режиме его нормальной эксплуатации. Следовательно, объект может быть идентифицирован по результатам статистической обработки наблюдений его входных и выходных сигналов (или по результатам *пассивного эксперимента*).

Пусть имеется объект с сосредоточенными параметрами, одним входным сигналом $x(t)$ и выходным сигналом $y(t)$, которые являются *стационарными эргодическими случайными процессами* с равными нулю математическими ожиданиями.

Примечание. Случайный процесс $x(t)$ считается *стационарным*, если его математическое ожидание постоянно. Случайный процесс считается *эргодическим*, если его среднее по времени

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) dt$$

равно математическому ожиданию.

Чтобы получить уравнение связи между статистическими характеристиками $x(t)$ и $y(t)$, используют их корреляционные функции и спектральные плотности.

Корреляционная функция сигнала $x(t)$ учитывает связь между его значениями в моменты времени, отстоящие на величину τ . Она определяется выражением

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (1.1)$$

Взаимная корреляционная функция случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ вычисляется по формуле

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt. \quad (1.2)$$

Сигнал на выходе объекта, показанного на рисунке 1.1, находится с помощью формулы свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau + \xi(t), \quad (1.3)$$

где $\varpi(\tau)$ – искомая импульсная переходная функция объекта. Умножив левую и правую части (1.3) на $x(t - \tau)$, проинтегрировав

их по τ в интервале от $-T$ до T и перейдя к пределу при $T \rightarrow \infty$, по формулам (1.1) и (1.2) получим

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi(\tau) \cdot R_{xx}(t-\tau) d\tau + R_{x\xi}(t). \quad (1.4)$$

Считая, что сигналы $x(t)$ и $\xi(t)$ не коррелированы, и учитывая, что $\varpi(t) = 0$ при отрицательных значениях времени, можно получить **интегральное уравнение Винера-Хопфа**

$$R_{xy}(t) = \int_0^{\infty} \varpi(\tau) \cdot R_{xx}(t-\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5), записанное для дискретных моментов времени $t, \tau = 0, 1, \dots, T$ при достаточно большом T , определит систему

$$\sum_{\tau=0}^T R_{xx}(t-\tau) \varpi(\tau) = R_{xy}(t), \quad t = 0, \dots, n. \quad (1.6)$$

Значения $\varpi(\tau)$, найденные решением (1.6), будут являться лучшими оценками идентифицируемого объекта по критерию минимума среднеквадратичной ошибки модели.

Оценки корреляционных функций (1.1) и (1.2) при достаточно большом T могут быть рассчитаны по формулам

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \cdot \sum_{t=0}^{T-\tau} x(t) \cdot x(t+\tau), \\ R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \cdot \sum_{t=0}^{T-\tau} x(t) \cdot y(t+\tau). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Структура системы (1.6) такова, что незначительные ошибки при оценке $R_{xx}(\tau)$ и $R_{xy}(\tau)$ приводят к существенным ошибкам при оценке $\varpi(\tau)$. Поэтому функции, входящие в (1.6), обычно сглаживают.

Выполнив преобразование Фурье над (1.5), получим **частотное уравнение Винера-Хопфа**

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega) \cdot S_x(\omega), \quad (1.8)$$

где $S_x(\omega)$ – **спектральная плотность** сигнала $x(t)$, показывающая распределение его энергии по частотному спектру, $S_{xy}(j\omega)$ – взаимная спектральная плотность $x(t)$ и $y(t)$, $j\omega$ – мнимая частота. Искомая частотная передаточная функция объекта $W(j\omega)$ найдется по формуле

$$W(j\omega) = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_x(\omega)}. \quad (1.9)$$

Ошибки ее определения будут велики, если вместо точных значений спектральных плотностей используются их оценки.

Полученное решение может быть физически нереализуемо, поэтому оно обязательно должно быть скорректировано.

1.2 Оптимальный фильтр Винера

Н. Винером была предложена методика нахождения реализуемой частотной передаточной функции объекта – динамической модели, обеспечивающей минимум среднеквадратичной ошибки (**оптимального фильтра Винера**).

Обычно спектральные плотности сигналов представляют в виде дробно-рациональных функций

$$S_x(\omega) = \frac{S_x(\theta)}{1 + T_x^2 \cdot \omega^2}, \quad S_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\theta)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2}, \quad (1.10)$$

где $S_x(\theta)$ и $S_{xy}(\theta)$ – начальные значения спектральных плотностей, T_x и T_{xy} – постоянные времени.

Спектральная плотность входного сигнала факторизуется (т. е. раскладывается на произведение комплексно сопряженных выражений)

$$S_x(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega) \cdot \Psi(-j\omega), \quad (1.11)$$

где $\Psi(j\omega)$ – функция, содержащая все нули и полюсы в левой

комплексной полуплоскости (т. е. соответствующая физически реализуемой частотной передаточной функции), $\Psi(-j\omega)$ – функция, содержащая все нули и полюсы в правой комплексной полуплоскости (т. е. соответствующая физически нереализуемой частотной передаточной функции).

Физически реализуемая частотная передаточная функция объекта находится из выражения

$$W(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \cdot \left[\frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ \quad (1.12)$$

Нижний индекс «плюс» у выражения в скобках означает, что все его полюсы расположены в левой комплексной полуплоскости. Для его определения отношение $S_{xy}(j\omega)$ к $\Psi(-j\omega)$ представляется в виде суммы простых дробей, из которой исключаются слагаемые с полюсами в правой комплексной полуплоскости.

Пример. Синтез оптимального фильтра Винера.

Факторизация спектральной плотности входного сигнала, рассчитанной по формуле (1.10):

$$S_x(\omega) = \Psi(j\omega) \cdot \Psi(-j\omega),$$

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{S_x(\theta)}}{1 + T_x \cdot (j\omega)},$$

$$\Psi(-j\omega) = \frac{\sqrt{S_x(\theta)}}{1 - T_x \cdot (j\omega)}.$$

Определение физически реализуемой части передаточной функции:

$$\frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{S_{xy}(\theta)}{\sqrt{S_x(\theta)}} \cdot \frac{1 - T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2},$$

$$\frac{1 - T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy}^2 \cdot \omega^2} = \frac{1}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \left[\frac{T_x + T_{xy}}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)} - \frac{T_x - T_{xy}}{1 - T_{xy} \cdot (j\omega)} \right],$$

$$\left[\frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{S_{xy}(\theta)}{\sqrt{S_x(\theta)}} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \frac{1}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)}.$$

Определение частотной передаточной функции объекта:

$$W(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \cdot \left[\frac{S_{xy}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{S_{xy}(\theta)}{S_x(\theta)} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}} \cdot \frac{1 + T_x \cdot (j\omega)}{1 + T_{xy} \cdot (j\omega)}.$$

Определение передаточной функции объекта:

$$W(s) = k \cdot \frac{1 + T_x \cdot s}{1 + T_{xy} \cdot s},$$

$$k = \frac{S_{xy}(\theta)}{S_x(\theta)} \cdot \frac{T_x + T_{xy}}{2 \cdot T_{xy}}.$$

• • •

Полученная динамическая модель будет квазиоптимальной, так как из нее исключена нереализуемая составляющая. Однако, ее можно считать лучшей из всех возможных моделей с точки зрения минимизации среднеквадратичной ошибки.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить порядок идентификации динамических объектов, находящихся под влиянием случайных воздействий.

При выполнении работы необходимо по данным о спектральной плотности входного сигнала и взаимной спектральной плотности входного и выходного сигналов идентифицировать объект, синтезировав оптимальный фильтр Винера, и оценить качество полученной динамической модели.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- общая постановка задачи идентификации;
- синтез оптимального фильтра Винера;
- оценка качества динамической модели.

Результаты расчетов должны приводиться как в числовой, так и в графической форме. Адекватность динамической модели достаточно оценить с помощью интегральной оценки квадрата ошибки

$$J = \int_0^{\omega'} [S_{xy}(\omega) - W(j\omega) \cdot S_x(\omega)]^2 d\omega, \quad (1.13)$$

которая должна быть достаточно мала. Верхний предел интегрирования в (1.13) соответствует частоте, при которой значение модуля частной передаточной функции не превышает **5-10%** от его значения при нулевой частоте.

Варианты заданий приведены в приложении *A*. Пример стохастической динамической идентификации средствами *MathCAD* показан в приложении *B*.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под стохастической идентификацией объекта? Когда возникает необходимость использовать для идентификации результаты пассивного эксперимента?

2. Как идентифицируется объект с помощью интегрального уравнения Винера-Хопфа?
3. Как идентифицируется объект с помощью частотного уравнения Винера-Хопфа?
4. Как синтезируется оптимальный фильтр Винера?

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического управления [Текст] : учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика» : в 2 т. / Под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986.

Т. 2 : Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин и др. ; Под ред. А.А. Воронова. – 504 с. : ил.

2. Крутько, П.Д., Максимов, А.И., Скворцов, Л.М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем [Текст] / П.Д. Крутько, А.И. Максимов, Л.М. Скворцов ; Под ред. П.Д. Крутько. – М. : Радио и связь, 1988. – 306 с. : ил. – ISBN 5-256-00148-5.

3. Борисов, В.В., Плютто, В.П. Практикум по теории автоматического управления химико-технологическими процессами. Аналоговые системы [Текст] / Борисов В.В., Плютто В.П. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1987. – 152 с. : ил.

4. Штейнберг, Ш.Е. Идентификация в системах управления [Текст] / Штейнберг Ш.Е. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 80 с. : ил. – ISBN 5-283-01470-3.

5. Построение детерминированных динамических моделей систем [Текст] : Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Моделирование систем» для специальности 230201 – Информационные системы и технологии и других инженерных специальностей. / Д.В. Болдырев. – Невинномысск : Изд-во НТИ (филиала) ГОУ ВПО «СевКавГТУ», 2008. – 15 с. : ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Варианты заданий для выполнения лабораторной работы

Таблица А.1 – Параметры спектральных плотностей

N_2	$S_x(\theta)$	T_x	$S_{xy}(\theta)$	T_{xy}
1	0,1	1	0,1	3
2	0,2	2	0,2	4
3	0,3	3	0,3	5
4	0,4	4	0,4	6
5	0,5	1	0,5	7
6	0,5	2	0,6	3
7	0,4	3	0,7	4
8	0,3	4	0,8	5
9	0,2	1	0,9	6
10	0,1	2	0,1	7
11	0,1	3	0,2	3
12	0,2	4	0,3	4
13	0,3	1	0,4	5
14	0,4	2	0,5	6
15	0,5	3	0,6	7
16	0,5	4	0,7	3
17	0,4	1	0,8	4
18	0,3	2	0,9	5
19	0,2	3	0,1	6
20	0,1	4	0,2	7
21	0,1	1	0,3	3
22	0,2	2	0,4	4
23	0,3	3	0,5	5
24	0,4	4	0,6	6
25	0,5	1	0,7	7
26	0,5	2	0,8	3
27	0,4	3	0,9	4
28	0,3	4	0,1	5
29	0,2	1	0,2	6
30	0,1	2	0,3	7

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Синтез оптимального фильтра Винера (документ MathCAD)

Спектральная плотность входного сигнала:

$$S_x(\omega) := \frac{0.1}{1 + 4 \cdot \omega^2}$$

Факторизация спектральной плотности входного сигнала:

$$\Psi_1(j\omega) := \frac{\sqrt{0.1}}{1 + 2 \cdot j\omega}$$

$$\Psi_2(j\omega) := \frac{\sqrt{0.1}}{1 - 2 \cdot j\omega}$$

Взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов:

$$S_{xy}(\omega) := \frac{0.2}{1 + 9 \cdot \omega^2}$$

Определение реализуемой части частотной передаточной функции:

$$\frac{S_{xy}(\omega)}{\Psi_2(\omega)} \text{ float , 4 } \rightarrow \frac{.6325}{(1 + 9 \cdot \omega^2)} \cdot (1 - 2 \cdot \omega)$$

$$\frac{0.6325 \cdot (1 - 2 \cdot \omega)}{(1 + 3 \cdot \omega) \cdot (1 - 3 \cdot \omega)} \left| \begin{array}{l} \text{convert , parfrac , } \omega \\ \text{float , 4} \end{array} \right. \rightarrow \frac{.1757}{(\omega + .3333)} - \frac{(3.514 \cdot 10^{-2})}{(\omega - .3333)}$$

$$S(\omega) := \frac{0.527}{1 + 3 \cdot \omega}$$

Определение частотной передаточной функции:

$$\frac{S(\omega)}{\Psi_1(\omega)} \text{ float , 4 } \rightarrow \frac{1.667}{(1 + 3 \cdot \omega)} \cdot (1 + 2 \cdot \omega)$$

$$W(s) := 1.667 \cdot \frac{1 + 2 \cdot s}{1 + 3 \cdot s}$$

Оценка качества идентификации:

$$\int_0^{10} (|S_{xy}(\omega) - W(i \cdot \omega) \cdot S_x(\omega)|)^2 d\omega = 3.488 \times 10^{-4}$$

