МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Северо-Кавказский федеральный университет»
Невинномысский технологический институт (филиал)

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине основы компьютерного моделирования "Построение детерменированных статистических моделей систем"

для студентов направления 15.03.04 - "Автоматизация технологических процессов и производств"

Невинномысск 2019

Настоящие методические указания предназначены для студентов специальности 15.03.04 - "Автоматизация технологических процессов и производств". Они разработаны в соответствии с государственным образовательным стандартом и основной образовательной программой специальности.

В методических указаниях рассмотрены правила построения статических функциональных моделей методом наименьших квадратов, определены требования к содержанию лабораторной работы, даны варианты заданий и приведен список рекомендуемой литературных источников

Составитель канд. техн. наук доцент Д.В. Болдырев

Отв. Редактор канд. техн. наук, доцент А.А. Евдокимов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – усвоение основных правил построения детерминированных статических моделей систем и оценки их качества.

Содержание работы – определение параметров линейной и нелинейной статических моделей, представление полученных результатов в форме отчета и доказательство их правильности.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Понятие об аппроксимации

Если все параметры объекта в его установившемся режиме определяются точно, его статическую модель можно считать *детерминированной* и представить в виде функциональной зависимости. Для ее получения необходима выборка значений входных и выходных параметров объекта $\{x_i, y_i, i = 1,...,n\}$ (n – число наблюдений), полученная в ходе его исследования (см. рисунок 1.1).

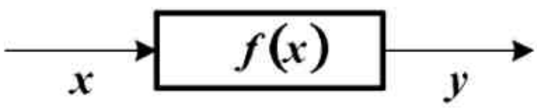


Рисунок 1.1 – Структурная схема детерминированной модели объекта

Точная форма зависимости y от x в большинстве случаев неизвестна. Поэтому ее **аппроксимируют** (приближенно заменяют) некоторой функцией $y = f(x)$. Традиционным способом приближения является **метод наименьших квадратов** (МНК), стремящийся минимизировать сумму квадратов отклонений расчетных выходных значений модели от наблюдаемых

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - y_i \right]^2 . \tag{1.1}$$

Выражение (1.1) определяет **функцию невязки**.

Процедура аппроксимации включает в себя два этапа.

1. Выбирается форма модели $f(x, \beta_1, ..., \beta_m)$, исходя из физической природы задачи или из интуиции исследователя ($\beta_1,...,\beta_m$ – коэффициенты модели). Если характер зависимости неизвестен, предпочтение отдается более простым формулам.

2. Определяются параметры (коэффициенты) выбранной модели из условия минимума функции невязки

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, \beta_1, ..., \beta_m) - y_i \right]^2 \rightarrow min. \qquad (1.2)$$

Минимум (1.2) находится путем приравнивания нулю частных производных по $\beta_1,...,\beta_m$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ \left[f(x_i, \beta_1, ..., \beta_m) - y_i \right] \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \beta_1, ..., \beta_m)}{\partial \beta_1} \right\} = 0, \\ \quad ... \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_m} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ \left[f(x_i, \beta_1, ..., \beta_m) - y_i \right] \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \beta_1, ..., \beta_m)}{\partial \beta_m} \right\} = 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Полученные уравнения составляют систему, решая которую можно определить неизвестные коэффициенты. Если модель линейна относительно своих параметров, то эта система также будет линейной и решаться аналитически. Если форма модели нелинейная, то решение такой системы может быть получено путем итерационной процедуры.

1.2 Построение линейных статических моделей

Линейная статическая модель представляется в виде

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + ... + \beta_m \cdot x_m + \varepsilon = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot x_j + \varepsilon = \hat{y} + \varepsilon, \qquad (1.4)$$

где $x_1,...,x_m$ – независимые переменные, входящие в уравнение; y – наблюдаемая зависимая переменная; $\hat{y}$ – оценка значения y по-средством модели; ε – ненаблюдаемая ошибка, определяемая разностью между измеренным значением y и величиной, полученной по уравнению модели.

Для получения оценок параметров $\beta_0,\ldots\ \beta_m$ по схеме МНК необходимо определить минимум следующей функции

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left\{w_i \cdot \left[\beta_0 + \sum_{j=1}^{m}\beta_j \cdot x_{ij} - y_i\right]^2\right\} \to min, \tag{1.5}$$

где w_i имеет смысл весового коэффициента i-го наблюдения величины y. Он может выбираться по одному из следующих принципов.

- Если наблюдения каждого значения y_i неоднократные, то $w_i = n_i$, где n_i – число повторных измерений зависимой переменной y_i при фиксированном значении x_i.
- Если наблюдения каждого значения y_i неравноточные, то $w_i = 1 / \sigma_i^2$, где σ_i – среднеквадратичная погрешность i-го измерения зависимой переменной y_i.
- Если наблюдения каждого значения y_i однократные и равноточные, то $w_i = 1$.

Учитывая выражение для $\hat{y}$, можно составить схему МНК

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \beta_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left\{w_i \cdot \left[\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j \cdot x_{ij} - y_i\right]\right\} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_k} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left\{w_i \cdot \left[\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j \cdot x_{ij} - y_i\right] \cdot x_{ik}\right\} = 0, \ \ k = 1,\ldots,m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отсюда можно получить эквивалентную систему линейных уравнений, решением которой будут параметры уравнения (1.4)

$$\begin{cases} \beta_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} w_i + \sum\limits_{j=1}^{m}\left\{\beta_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot x_{ij}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot y_i \\ \beta_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot x_{ik} + \sum\limits_{j=1}^{m}\left\{\beta_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot x_{ij} \cdot x_{ik}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \cdot y_i \cdot x_{ik}, \\ \qquad k = 1,\ldots,m \end{cases} \tag{1.7}$$

Используя обозначения

$$X=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & \dots & x_{1m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm}\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}y_1\\ \dots\\ y_n\end{bmatrix},\ W=\begin{bmatrix}w_1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & w_n\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \dots\\ \beta_m\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \dots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix},$$

можно записать схему МНК в матричной форме

$$\begin{aligned} Y &= X\cdot B+E,\\ S &= (X\cdot B-Y)^T\cdot W\cdot(X\cdot B-Y),\\ \frac{\partial S}{\partial B} &= 2\cdot X^T\cdot W\cdot(X\cdot B-Y)=0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Система (1.7) представится в виде

$$X^T\cdot W\cdot X\cdot B=X^T\cdot W\cdot Y. \tag{1.9}$$

Если $det(X^T\cdot W\cdot X)\neq 0$, то она имеет единственное решение

$$B=(X^T\cdot W\cdot X)^{-1}\cdot X^T\cdot W\cdot Y. \tag{1.10}$$

Эта схема определения коэффициентов применима для линейной комбинации произвольных функций

$$y=\beta_0\cdot f_0(x)+\dots+\beta_m\cdot f_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\beta_j\cdot f_j(x), \tag{1.11}$$

и для полиномиальных уравнений

$$y=\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2\cdot x^2+\dots+\beta_m\cdot x^m=\sum_{j=0}^{m}\beta_j\cdot x^j. \tag{1.12}$$

Матрицы X' для комбинации функций и X'' для полного полинома (содержащего все степени x от 0 до m) будут иметь вид

$$X'=\begin{bmatrix}f_0(x_1) & \dots & f_m(x_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ f_0(x_n) & \dots & f_m(x_n)\end{bmatrix},\ X''=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m\end{bmatrix}.$$

Основным критерием качества модели является оценка средне-квадратичной (стандартной) погрешности расчета параметра $\boldsymbol{y}$

$$S_y^2 = \frac{1}{n - m'} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\hat{y}_i - y_i\right]^2, \tag{1.13}$$

где $m' = m + 1$ – число коэффициентов уравнения модели.

С учетом введенных матричных обозначений

$$S_y^2 = \frac{\left(X \cdot B - Y\right)^T \cdot \left(X \cdot B - Y\right)}{n - m'}. \tag{1.14}$$

Если эта величина превышает допустимый предел, модель отвергается, или ее форма модифицируется.

Важным показателем качества модели является чувствительность оценок коэффициентов $\beta_0,\dots,\beta_m$ к относительным изменениям величин y_i, вызванными влиянием погрешности их определения. Она находится по формуле

$$\gamma = \frac{\partial\beta_k / \beta_k}{\partial y_i / y_i} = \frac{\partial \ln \beta_k}{\partial \ln y_i} = \frac{\partial\beta_k}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{\beta_k}. \tag{1.15}$$

С учетом (1.10) выражение для расчета чувствительности коэффициента β_k к изменению величины y_i примет вид

$$\gamma_k = \left[\left(X^T \cdot W \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot W\right]_{ki} \cdot \frac{y_i}{\beta_k}. \tag{1.16}$$

1.3 Повышение качества линейной модели

Параметры модели всегда определяются с погрешностью, величина которой тем больше, чем ближе $det\left(X^T \cdot W \cdot X\right)$ к нулю. Среднеквадратичная ошибка оценки коэффициента β_k равна

$$S_{\beta k}^2 = S_y^2 \cdot \left(X^T \cdot W \cdot X\right)_{kk}^{-1}. \tag{1.17}$$

Коэффициент β_k считается *незначимыми и подлежащим исключению из уравнения модели*, если значения выражения

$$t = \left|\beta_k\right| / S_{\beta k} \tag{1.18}$$

меньше критерия Стьюдента $t_{1-\alpha/2}(n-m')$ для уровня доверительной вероятности α и числа степеней свободы n–m'.

В ряде случаев качество линейной модели можно повысить, представив ее в виде

$$y=\beta_0+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\left(x_j-\bar{x}_j\right)+\varepsilon, \tag{1.19}$$

где $\bar{x}_j$ – средние значения соответствующих переменных.

Тогда система (1.7) представится в форме

$$\begin{cases} \beta_0\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i+\sum\limits_{j=1}^{m}\left[\beta_j\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot y_i, \\ \beta_0\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot\left(x_{ik}-\bar{x}_k\right)+\sum\limits_{j=1}^{m}\left[\beta_j\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)\cdot\left(x_{ik}-\bar{x}_k\right)\right]= \\ =\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot y_i\cdot\left(x_{ik}-\bar{x}_k\right),\ k=1,\dots,m. \end{cases} \tag{1.20}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)=0, j=1,\dots,m$, эта система упрощается

$$\begin{cases} \beta_0\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot y_i, \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\left[\beta_j\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)\cdot\left(x_{ik}-\bar{x}_k\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\cdot y_i\cdot\left(x_{ik}-\bar{x}_k\right), \\ k=1,\dots,m. \end{cases} \tag{1.21}$$

Отсюда можно получить выражение для определения β_0. При равных весах наблюдений $\beta_0=\bar{y}$.

При записи системы (1.21) в матричной форме изменяются компоненты X и B

$$X=\begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & \dots & x_{1m}-\bar{x}_m \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}-\bar{x}_1 & \dots & x_{nm}-\bar{x}_m \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Остальные матричные обозначения сохраняются.

Погрешности определения всех коэффициентов, кроме β_0, находятся по общим формулам. Погрешность β_0 составляет

$$S_{\beta 0} = \frac{S_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}}. \qquad (1.22)$$

Для равноточных измерений $S_{\beta 0} = S_y / \sqrt{n}$.

1.4 Построение нелинейных статических моделей

Если модель нелинейная относительно своих параметров, то в общем случае система (1.3) должна решаться численно. Популярным средством решения нелинейных задач является метод Ньютона. Он заключается в следующем.

Введем обозначения

$$\begin{cases} \varphi_1(\beta_1,...,\beta_m) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[f(x_i, \beta_1,...,\beta_m) - y_i \right] \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \beta_1,...,\beta_m)}{\partial \beta_1} \right\}, \\ \quad ... \\ \varphi_m(\beta_1,...,\beta_m) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[f(x_i, \beta_1,...,\beta_m) - y_i \right] \cdot \dfrac{\partial f(x_i, \beta_1,...,\beta_m)}{\partial \beta_m} \right\}. \end{cases} \qquad (1.23)$$

Зададимся начальными приближениями значений коэффициентов $\beta_1^{(0)},...,\beta_m^{(0)}$ и разложим функции $\varphi_1,...,\varphi_m$ в ряд Тейлора в окрестности начальной точки. Из разложения исключим все составляющие со степенями производных выше первой. Тогда

$$\begin{cases} \varphi_1 \approx \varphi_1^{(0)} + \left[\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1} \right]_0 \cdot \left(\beta_1 - \beta_1^{(0)} \right) + ... + \left[\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_m} \right]_0 \cdot \left(\beta_m - \beta_m^{(0)} \right), \\ \quad ... \\ \varphi_m \approx \varphi_m^{(0)} + \left[\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial \beta_1} \right]_0 \cdot \left(\beta_1 - \beta_1^{(0)} \right) + ... + \left[\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial \beta_m} \right]_0 \cdot \left(\beta_m - \beta_m^{(0)} \right). \end{cases} \qquad (1.24)$$

Так как в точке минимума функции невязки S должно выполняться условие $\varphi_1 = ... = \varphi_m = 0$, эту систему можно приближенно представить следующим образом

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_1}\right]_0 \cdot \Delta\beta_1 + \ldots + \left[\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_m}\right]_0 \cdot \Delta\beta_m = -\varphi_1^{(0)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \left[\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\right]_0 \cdot \Delta\beta_1 + \ldots + \left[\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_m}\right]_0 \cdot \Delta\beta_m = -\varphi_m^{(0)}. \end{cases} \tag{1.25}$$

где величины $\Delta\beta_j = \beta_j - \beta_j^{(0)}, \boldsymbol{j = 1,...,m}$ – поправки к соответствующим коэффициентам.

Система (1.25) линейна относительно поправок. Решая ее, можно найти значения $\Delta\beta_j$ и определить скорректированные значения коэффициентов $\beta_j = \beta_j^{(0)} + \Delta\beta_j$.

Если все поправки по абсолютной величине меньше заданной точности ε, итерационный процесс прекращается. В противном случае выполняется переназначение переменных $\beta_j^{(0)} = \beta_j$, пересоставляется система (1.25) и определяются новые поправки.

Найдем решение нелинейной задачи МНК в матричной форме. Введем обозначения векторов и матриц

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\beta_1,\ldots,\beta_m) \\ \ldots \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n},\beta_1,\ldots,\beta_m) \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\beta_1,\ldots,\beta_m) - \boldsymbol{y_1} \\ \ldots \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n},\beta_1,\ldots,\beta_m) - \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_1} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{w_n} \end{bmatrix}.$$

Тогда функция невязки и ее производные в матричной форме будут иметь следующий вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{S} = [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{Y}]^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{Y}] = \Phi^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \Phi \rightarrow \boldsymbol{min}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{J}^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \Phi. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Коэффициенты матрицы Якоби $\boldsymbol{J}$ находятся по правилу

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \beta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \beta_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial \beta_m} \end{bmatrix}.$$

Если задан вектор начальных приближений коэффициентов $\boldsymbol{B_0}$, то можно получить приближенное выражение для оценки производной $\partial \boldsymbol{S} / \partial \boldsymbol{B}$ в точке, где функция невязки имеет минимум

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{B}} \approx 2 \cdot \boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \Phi. \tag{1.27}$$

Разложим функцию Ф в ряд Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{B_0}$. Исключим из этого разложения компоненты со степенями производных выше первой

$$\Phi = \Phi_0 + \boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0). \tag{1.28}$$

Тогда можно записать

$$\begin{gathered} \boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot [\Phi_0 + \boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0)] = 0, \\ \boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0) = -\boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \Phi_0, \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 - \left(\boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{J}_0\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}_0^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \Phi_0. \end{gathered} \tag{1.29}$$

Последнее выражение является рекуррентной формулой для уточнения значений вектора коэффициентов. Ее применяют до тех пор, пока евклидова длина (норма) вектора поправок $\|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B_0}\|$ не станет меньше заданной точности ε.

В ряде случаев решение нелинейной задачи МНК можно упростить, преобразовав уравнение модели к линейному виду путем соответствующей замены переменных. Найденные параметры преобразованных линейных характеристик используются для расчета коэффициентов исходных зависимостей. Некоторые наиболее типичные примеры преобразования переменных и пересчета коэффициентов показаны ниже.

$$y=\beta_1\cdot exp(\beta_2\cdot x)\rightarrow\begin{bmatrix}x'=x\\ y'=ln(y)\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\alpha_1+\alpha_2\cdot x'\rightarrow\begin{bmatrix}\beta_1=exp(\alpha_1)\\ \beta_2=\alpha_2\end{bmatrix},$$

$$y=\beta_1\cdot x^{\beta_2}\rightarrow\begin{bmatrix}x'=ln(x)\\ y'=ln(y)\end{bmatrix}\rightarrow y'=\alpha_1+\alpha_2\cdot x'\rightarrow\begin{bmatrix}\beta_1=exp(\alpha_1)\\ \beta_2=\alpha_2\end{bmatrix},$$

$$y=\beta_1+\frac{\beta_2}{x}\rightarrow\begin{bmatrix}y'=y\\ x'=\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}\rightarrow y'=\alpha_1+\alpha_2\cdot x'\rightarrow\begin{bmatrix}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2\end{bmatrix},$$

$$y=\frac{\beta_1}{x+\beta_2}\rightarrow\begin{bmatrix}y'=\dfrac{1}{y}\\ x'=x\end{bmatrix}\rightarrow y'=\alpha_1+\alpha_2\cdot x'\rightarrow\begin{bmatrix}\beta_1=\dfrac{1}{\alpha_2}\\ \beta_2=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\end{bmatrix},$$

$$y=\frac{\beta_1\cdot x+\beta_2}{x+\beta_3}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1=x\\ x_2=-x\cdot y\\ y'=y\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\alpha_0+\alpha_1\cdot x_1+\alpha_2\cdot x_2\rightarrow\begin{bmatrix}\beta_1=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\\ \beta_2=\dfrac{\alpha_0}{\alpha_2}\\ \beta_3=\dfrac{1}{\alpha_2}\end{bmatrix},$$

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить правила построения детерминированных статических моделей.

При выполнении работы необходимо решить две задачи.

1. По исходным данным построить полиномиальную модель

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^j}, \tag{1.30}$$

где значение $\boldsymbol{m}$ определяется заданием. Последовательно применяя процедуру исключения коэффициентов, в доверительный интервал которых

$$\boldsymbol{b_j - S_{bj} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-m-1) \le b_j \le b_j + S_{bj} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-m-1)} \tag{1.31}$$

попадает нулевое значение, добиться полной значимости модели при уровне доверительной вероятности $\alpha = \boldsymbol{0{,}95}$. В первую очередь исключаются коэффициенты с наибольшей относительной погрешностью (см. приложение ***Б***). Оценить основные показатели качества модели: среднюю и максимальную погрешность приближения, а также показатель адекватности

$$\boldsymbol{R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)-y_i\}^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}, \tag{1.32}$$

который должен быть как можно ближе к единице.

2. По тем же исходным данным построить нелинейную модель, форма которой определяется заданием. Рассчитать для нее те же показатели качества, что и для линейной модели.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- общая постановка задачи;
- оценка параметров линейной модели;
- оценка параметров нелинейной модели;
- сравнение качества линейной и нелинейной моделей.

Варианты заданий приведены в приложении ***А***. Примеры решения задачи средствами ***MathCAD*** показаны в приложениях ***Б*** и ***В***.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под аппроксимацией функций? Каков порядок процедуры аппроксимации?
2. Как строится линейная статическая модель с помощью процедуры МНК? Как определяются ее параметры?
3. Как оценивается качество линейной статической модели? Как можно повысить ее качество?
4. Как строится нелинейная статическая модель с помощью процедуры МНК? Как определяются ее параметры?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2002. – 630 с. – (Технический университет. Математика). – ISBN 5-93208-043-4 (в пер.).

2. Лоусон, Ч., Хансон, Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов [Текст] / Лоусон Ч., Хансон Р. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 232 с.

3. Бард, Й. Нелинейное оценивание параметров [Текст] / Бард Й. – М. : Статистика, 1979. – 349 с. ; ил. – (Математико-статистические методы за рубежом).

4. Методы аппроксимации функций [Текст] : Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Основы численных методов» для специальности 071900 – Информационные системы и технологии и других инженерных специальностей. / Д.В. Болдырев. – Невинномысск : Изд-во НТИ СевКавГТУ, 2004. – 32 с. : ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Варианты заданий для выполнения лабораторной работы

№ варианта																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Начальное значение независимой переменной *x*																			
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
Шаг изменения независимой переменной *x*																			
0,1	0,2	0,3	0,2	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3	0,1	0,2
Значения зависимой переменной *y*																			
9,0	6,0	3,5	4,0	297	7,0	40,0	2,0	12,8	8,8	2,8	29,0	2,3	92,0	2,0	32,0	2,0	5,0	26,8	0,1
5,4	7,0	3,0	12,0	24,5	11,5	16,5	3,2	6,0	4,0	3,6	11,0	2,6	52,0	2,5	18,5	2,5	4,4	23,6	1,4
4,2	9,0	2,8	20,0	10,5	15,0	11,5	3,8	4,8	2,3	5,0	8,0	2,9	36,0	2,5	12,5	2,5	3,4	20,2	3,4
3,6	11,0	2,6	32,0	7,0	18,5	9,0	4,4	4,2	1,4	7,0	7,0	3,3	26,0	3,0	9,0	2,5	2,6	16,2	6,2
3,2	14,0	2,5	44,0	5,5	21,5	7,5	4,6	4,0	0,8	10,6	6,0	3,7	18,0	4,0	6,0	3,0	1,6	11,4	10,7
3,0	17,0	2,4	58,0	4,5	24,5	7,0	4,8	3,8	0,5	14,8	6,0	4,0	12,0	6,0	4,5	3,0	1,2	7,4	15,1
3,0	20,0	2,4	74,0	4,0	27,5	6,0	4,8	3,6	0,3	20,2	5,2	4,3	8,0	12,5	3,0	3,5	0,6	3,6	19,6
2,8	25,0	2,3	90,0	3,5	30,0	6,0	5,0	3,6	0,2	24,4	5,1	4,5	6,0	31,5	2,5	4,0	0,4	1,6	22,5
2,6	30,0	2,3	108	3,5	32,5	5,5	5,0	3,4	0,1	30,6	4,9	4,7	4,0	48,9	1,5	5,0	0,2	0,2	25,9
2,6	37,0	2,3	126	3,5	35,0	5,0	5,0	3,4	0,1	30,6	4,7	4,7	4,0	68,3	1,5	5,0	0,2	0,2	25,9
Степень аппроксимирующего полинома																			
5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ А

Функции для нелинейной аппроксимации

№ варианта	Форма зависимости
1, 11	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 / x)$
2, 12	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 \cdot x^{\beta 3})$
3, 13	$y = (\beta_1 \cdot x + \beta_2)/(x + \beta_3)$
4, 14	$y = \beta_1 \cdot x^{\beta 2}$
5, 15	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 / x) + \beta_3 \cdot exp(\beta_4 / x)$
6, 16	$y = \beta_1 \cdot (x + \beta_2)^{\beta 3}$
7, 17	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 \cdot x)$
8, 18	$y = \beta_1 + \beta_2 \cdot exp(\beta_3)$
9, 19	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 / (x + \beta_3))$
10, 20	$y = \beta_1 \cdot exp(\beta_2 \cdot x) + \beta_3 \cdot exp(\beta_4 \cdot x)$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Построение линейной статической модели (документ MathCAD)

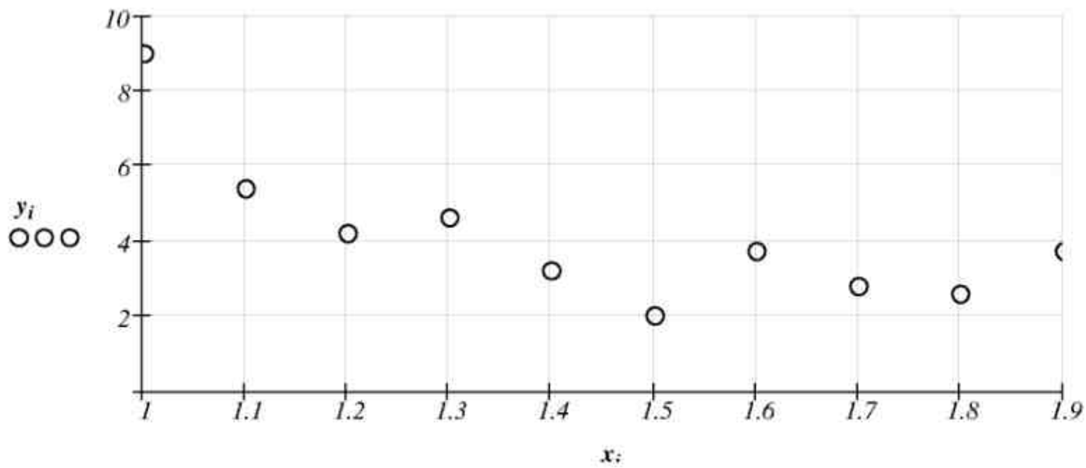
Исходные данные:

$$x := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 9.0 \\ 5.4 \\ 4.2 \\ 4.6 \\ 3.2 \\ 2.0 \\ 3.7 \\ 2.8 \\ 2.6 \\ 3.7 \end{pmatrix}$$

$n := length(x)$

$i := 0 .. n - 1$

График экспериментальных данных:



ШАГ 1. ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИНОМА.

Число коэффициентов полинома:

$m := 5$

$j := 0 .. m-1$

Матрица наблюдений:

$X^{\langle j \rangle} := \overrightarrow{x^j}$

Коэффициенты полинома:

$b := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$

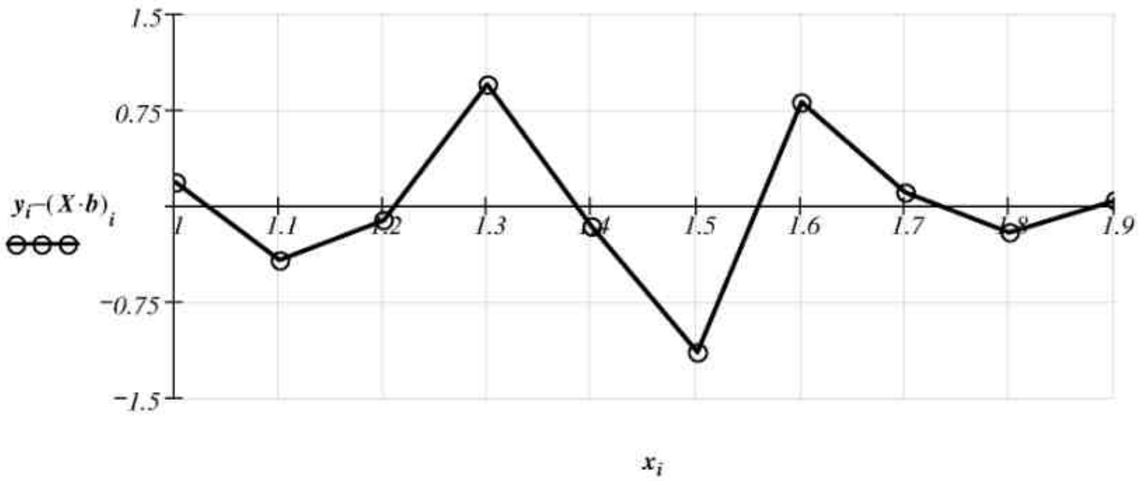
$b^T = \left(395.1384 \quad -1.0388 \times 10^3 \quad 1.0347 \times 10^3 \quad -458.1294 \quad 75.9033 \right)$

Среднеквадратичная погрешность расчёта наблюдаемой переменной:

$S_y := \dfrac{\left|X \cdot b - y\right|}{\sqrt{n-m}}$

$S_y = 0.7934$

График остатков:



Погрешность расчёта коэффициентов уравнения:

$S_{b_j} := S_y \cdot \sqrt{\left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{j,j}}$

$S_b^T = (250.2997 \quad 722.4765 \quad 769.6186 \quad 358.8005 \quad 61.8132)$

Нижняя граница доверительного интервала для коэффициентов:

$\Delta_j := 1 - \dfrac{S_{b_j} \cdot qt(0.975, n-m-1)}{\left|b_j\right|}$

$\Delta^T = (-0.7587 \quad -0.9309 \quad -1.0651 \quad -1.1745 \quad -1.2610)$

Значимость коэффициента при степени 4 самая низкая.

ШАГ 2. МОДИФИКАЦИЯ ПОЛИНОМА.

Число коэффициентов полинома:

$m := 4$

$j := 0..m-1$

Матрица наблюдений:

$X := 0$

$X^{\langle 0 \rangle} := x^0$

$X^{\langle 1 \rangle} := x^1$

$X^{\langle 2 \rangle} := x^2$

$X^{\langle 3 \rangle} := x^3$

Коэффициенты полинома:

$b := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$

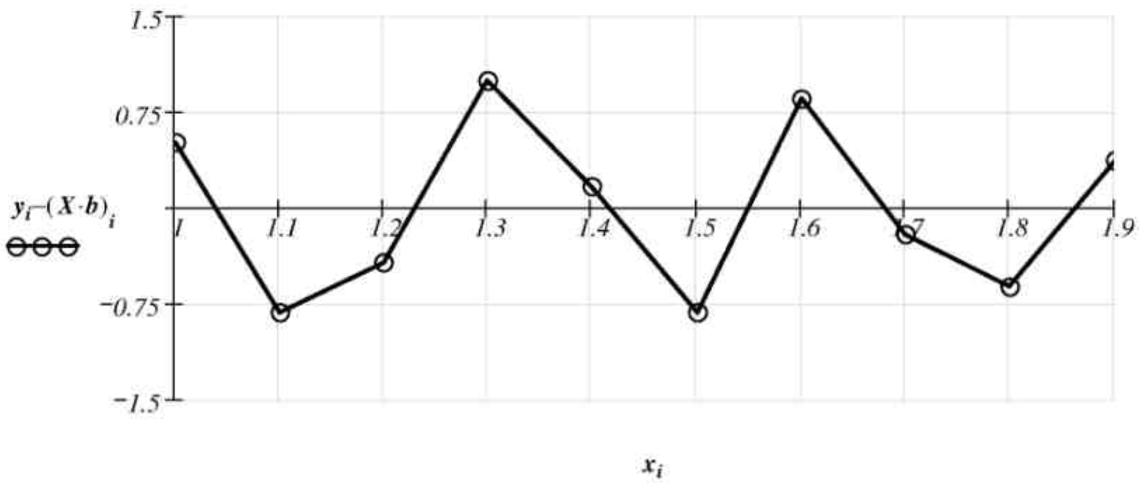
$b^T = (\ 91.9565 \quad -158.3526 \quad 92.7855 \quad -17.8904\ )$

Среднеквадратичная погрешность расчёта наблюдаемой переменной:

$$S_y := \frac{|X \cdot b - y|}{\sqrt{n-m}}$$

$S_y = 0.8263$

График остатков:



Погрешность расчёта коэффициентов уравнения:

$S_b := 0$

$S_{b_j} := S_y \cdot \sqrt{\left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{j,j}}$

$S_b^T = (\ 42.8080 \quad 92.1918 \quad 64.7714 \quad 14.8670\ )$

Нижняя граница доверительного интервала для коэффициентов:

$\Delta := 0$

$$\Delta_j := 1 - \frac{S_{b_j} \cdot qt(0.975, n - m - 1)}{|b_j|}$$

$\Delta^T = (-0.1967 \quad -0.4966 \quad -0.7945 \quad -1.1362)$

Значимость коэффициента при степени 3 самая низкая.

ШАГ 3. МОДИФИКАЦИЯ ПОЛИНОМА.

Число коэффициентов полинома:

$m := 3$

$j := 0 .. m - 1$

Матрица наблюдений:

$X := 0$

$X^{\langle 0 \rangle} := x^0$

$X^{\langle 1 \rangle} := x^1$

$X^{\langle 2 \rangle} := x^2$

Коэффициенты полинома:

$$b := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

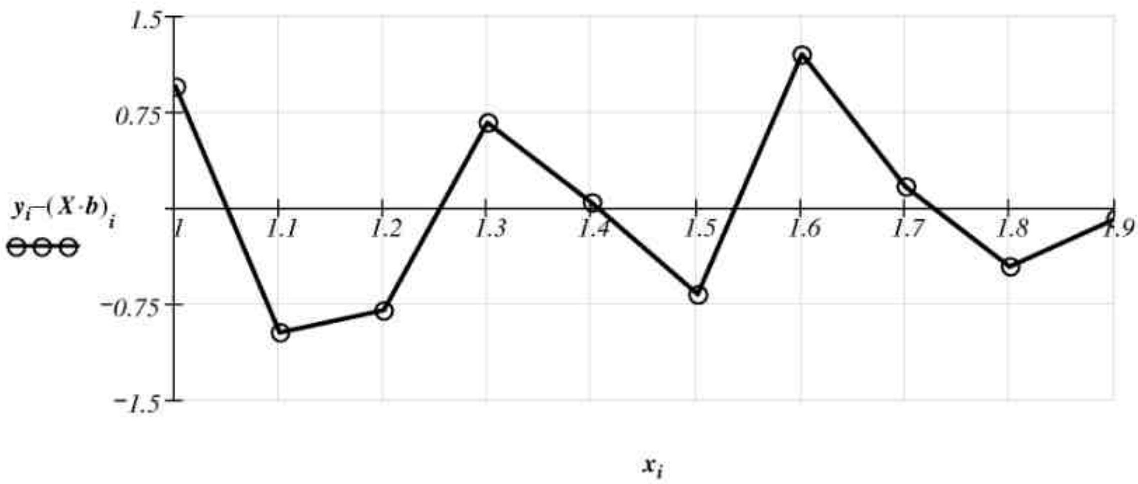
$b^T = (41.2156 \quad -48.1295 \quad 14.9621)$

Среднеквадратичная погрешность расчёта наблюдаемой переменной:

$$S_y := \frac{|X \cdot b - y|}{\sqrt{n - m}}$$

$S_y = 0.8523$

График остатков:



Погрешность расчёта коэффициентов уравнения:

$S_b := 0$

$S_{b_j} := S_y \cdot \sqrt{\left[\left(X^T \cdot X\right)^{-1}\right]_{j,j}}$

$S_b^T = (\ 7.6198 \quad 10.7974 \quad 3.7092\ )$

Нижняя граница доверительного интервала для коэффициентов:

$\Delta := 0$

$\Delta_j := 1 - \dfrac{S_{b_j} \cdot qt(0.975, n - m - 1)}{\left|b_j\right|}$

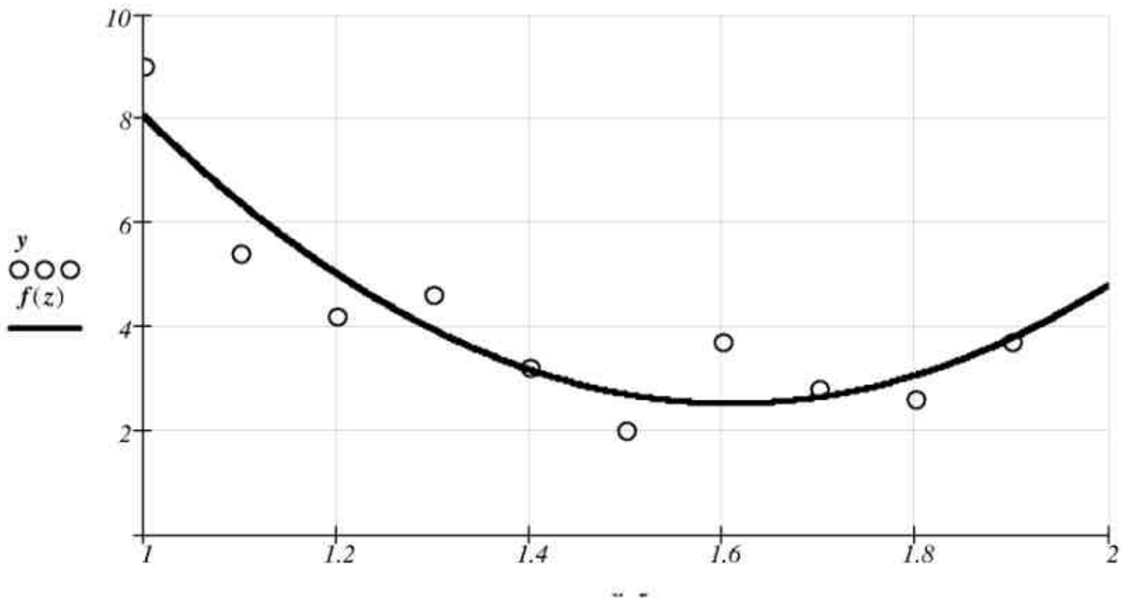
$\Delta^T = (\ 0.5476 \quad 0.4511 \quad 0.3934\ )$

Все коэффициенты уравнения значимы.

Принимается модель:

$f(x) := 41.2156 - 48.1295 \cdot x + 14.9621 \cdot x^2$

График зависимостей расчётных и экспериментальных значений наблюдаемой величины



ПРИЛОЖЕНИЕ В

Построение нелинейной статической модели (документ MathCAD)

Исходные данные:

$$x := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 9.0 \\ 5.4 \\ 4.2 \\ 4.6 \\ 3.2 \\ 2.0 \\ 3.7 \\ 2.8 \\ 2.6 \\ 3.7 \end{pmatrix}$$

$n := length(x)$

$i := 0 .. n - 1$

Аппроксимирующая функция:

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma) := \alpha \cdot exp\left(\frac{\beta}{x + \gamma}\right)$$

$m := 3$

Функция невязки:

$$S(\alpha, \beta, \gamma) := \left(\left|\overrightarrow{(f(x, \alpha, \beta, \gamma) - y)}\right|\right)^2$$

Начальные значения параметров.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Блок подбора оптимальных параметров, включающий два фиктивных уравнея (число уравнений должно совпадать с числом неизвестных):

Given

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad 0 = 0 \quad 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} := \mathbf{Minerr}(\alpha, \beta, \gamma)$$

Коэффициенты уравнения:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6964 & 0.4941 & -0.7000 \end{pmatrix}$$

Среднеквадратичная погрешность расчёта наблюдаемой переменной:

$$S_y := \frac{|f(x, \alpha, \beta, \gamma) - y|}{\sqrt{n - m}}$$

$$S_y = 0.7696$$

График зависимостей расчётных и экспериментальных значений наблюдаемой величины