

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Северо-Кавказский федеральный университет»

Невинномысский технологический институт (филиал)

Методические указания к выполнению лабораторных
работ по дисциплине основы компьютерного
моделирования "Построение детерминированных
динамических моделей систем"
для студентов направления 15.03.04 - "Автоматизация
технологических процессов и
производств"

Настоящие методические указания предназначены для студентов направления 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Они разработаны в соответствии с государственным образовательным стандартом и основной образовательной программой специальности.

В методических указаниях рассмотрены правила идентификации детерминированных динамических объектов, определены требования к содержанию лабораторной работы, даны варианты заданий и приведен список рекомендуемой литературных источников

Составитель канд. техн. наук доцент Д.В. Болдырев

Отв. Редактор канд. техн. наук, доцент А.А. Евдокимов

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	4
1	ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
	1.1 Понятие о динамической идентификации	4
	1.2 Структурная идентификация объекта	6
	1.3 Параметрическая идентификация объекта	7
2	ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	14
	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	14
	ЛИТЕРАТУРА	15
	ПРИЛОЖЕНИЯ	16

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – усвоение основных правил построения детерминированных динамических моделей систем и оценки их качества.

Содержание работы – определение параметров уравнения динамики линейной системы, представление полученных результатов в форме отчета и доказательство их правильности.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Понятие о динамической идентификации

Идентификация состоит в отыскании для объекта адекватной ему модели. Различают структурную и параметрическую идентификацию. При **структурной идентификации** определяется форма модели из некоторого заданного класса функций, при **параметрической идентификации** определяются параметры модели.

Если выходные сигналы объекта $Y(t)$ полностью определяются наблюдаемыми входными воздействиями $X(t)$, то для его идентификации достаточно использовать *методы активного эксперимента*. Исходной информацией является экспериментально снятая кривая разгона – реакция объекта $Y(t)$ на поданное входное воздействие $X(t)$ в интервале времени $0 \leq t \leq T$.

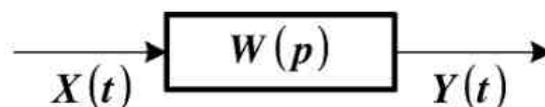


Рисунок 1.1 – Структурная схема модели объекта с операторной передаточной функцией $W(p)$

Уравнение динамической характеристики объекта можно условно представить в виде

$$P[t, Y(t)] = k \cdot Q[t, X(t - \tau)] , \quad (1.1)$$

где τ – **время запаздывания** объекта, которое проходит от момента подачи сигнала на вход объекта до момента появления сигнала на его выходе; k – **коэффициент усиления** (или коэффициент передачи) объекта.

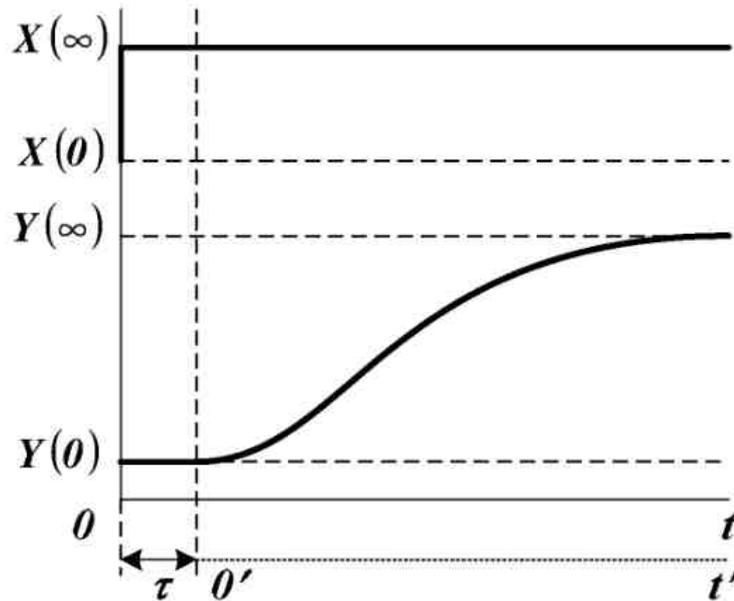


Рисунок 1.2 – Схема для определения времени запаздывания и коэффициента усиления объекта

Коэффициент усиления вычисляется по соотношению

$$k = \frac{Y(\infty) - Y(0)}{X(\infty) - X(0)} . \quad (1.2)$$

Входные и выходные величины, как правило, масштабируются в стандартном диапазоне от 0 до 1 (нормируются)

$$x(t) = \frac{X(t) - X(0)}{X(\infty) - X(0)}, \quad y(t) = \frac{Y(t) - Y(0)}{Y(\infty) - Y(0)} . \quad (1.3)$$

После определения k и τ можно исследовать объект в нормированных координатах и без запаздывания, сместив шкалу времени вправо на величину τ .

1.2 Структурная идентификация объекта

При структурной идентификации априорная информация об объекте используется для определения структуры модели.

Уравнение динамики, как правило, выбирается из класса линейных или линеаризованных характеристик. В нормированных координатах модель объекта с сосредоточенными параметрами, одним входным и одним выходным сигналом является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_n \cdot \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \\ = b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m} x(t - \tau) + \dots + b_1 \cdot \frac{d}{dt} x(t - \tau) + x(t - \tau), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где коэффициенты a_i и b_i имеют размерность времени в степени, равной порядку производной соответствующего слагаемого. В физически реализуемых системах $n \geq m$.

Начальные условия

$$y_0 = y(0), \quad y_0^{(1)} = \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0}, \dots, \quad y_0^{(n-1)} = \left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) \right|_{t=0} \quad (1.5)$$

и форма входного сигнала считаются известными. Предполагается, что класс $x(t)$ ограничен функциями, описывающими устойчивые процессы.

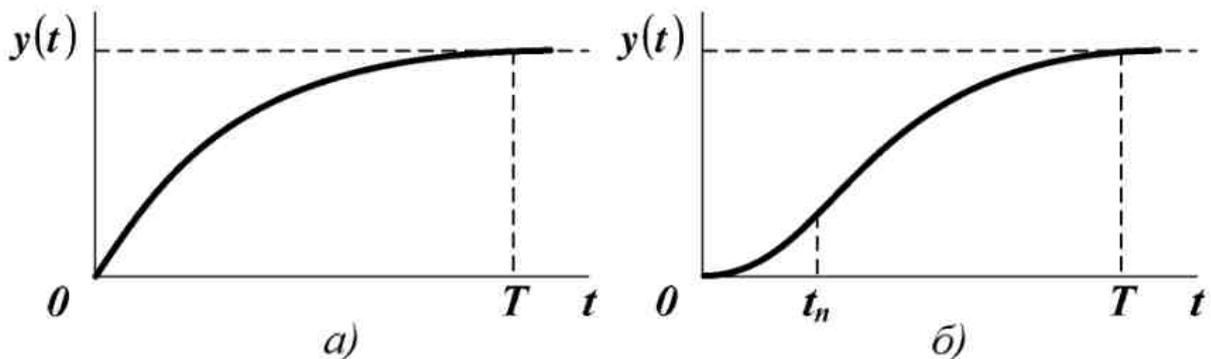


Рисунок 1.3 – Переходные характеристики объекта первого (а) и более высокого порядка (б)

Обычно $x(t)$ – ступенчатая функция, поэтому порядок уравнения (1.4) может быть приближенно определен по форме переходной характеристики объекта. Если эта характеристика не имеет точек перегиба, то $n = 1$. Если есть перегиб при $t = t_n$, и $t_n / T < 0,1 \dots 0,15$, то $n = 2$ (см. рисунок 1.3). В противном случае считают $n > 2$.

Примечание. Влияние погрешности измерения $X(t)$ и $Y(t)$ и погрешности численных методов обработки информации обычно делает нецелесообразным использование моделей выше третьего-четвертого порядка.

На рисунке 1.4 показано, как можно снизить порядок модели, вводя фиктивное запаздывание.

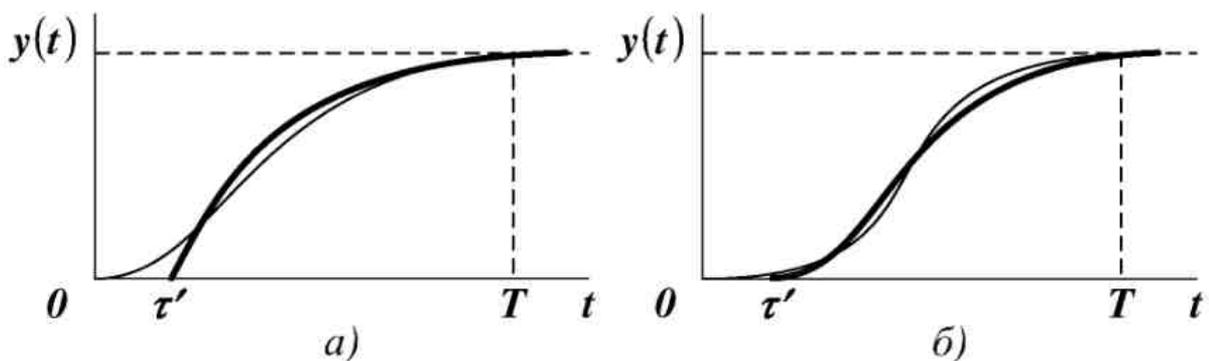


Рисунок 1.4 – Снижение порядка модели до первого (а) и второго (б) путем введения фиктивного запаздывания

Окончательный выбор формы модели должен определяться степенью ее адекватности объекту.

1.3 Параметрическая идентификация объекта

При **параметрической идентификации** данные об объекте обрабатываются для получения о нем апостериорной информации. При этом оцениваются параметры выбранной модели. В простейших случаях такая оценка может выполняться по графику переходной характеристики.

Для модели первого порядка, уравнение которой имеет вид

$$T_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t), \quad (1.6)$$

значение постоянной времени T_1 определяется временем, при котором касательная к $y(t)$ в начале координат пересекается с ее горизонтальной асимптотой $y(\infty) = 1$.

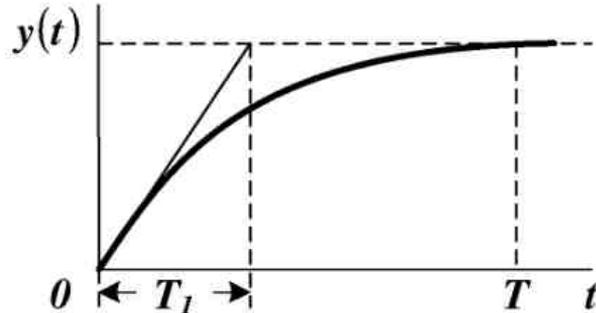


Рисунок 1.5 – Оценивание параметров модели первого порядка

Постоянные времени T_1 и T_2 апериодической модели второго порядка

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) + (T_1 + T_2) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t), \quad (1.7)$$

после определения по графику координаты точки перегиба t_n и значения производной в этой точке (см. рисунок 1.6 (а)) находятся из системы уравнений

$$\left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=t_n} \cdot T_1 = \eta^{\frac{\eta}{1-\eta}}, \quad \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=t_n} \cdot T_2 = \eta^{\frac{1}{1-\eta}}, \quad \eta = \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.8)$$

Постоянная времени T_2 и степень затухания ξ колебательной модели второго порядка

$$T_2^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2 \cdot \xi \cdot T_2 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t), \quad (1.9)$$

после определения по графику периода колебаний T_k и двух первых положительных амплитуд A_1 и A_2 (см. рисунок 1.6 (б)) находятся из системы уравнений

Для решения системы (1.13) относительно неизвестных параметров необходимо знать производные входного и выходного сигналов объекта, которые находятся либо в результате сглаживания функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $t \in [0, T]$, либо в результате разложения их в ряд по заданным в аналитической форме выражениям.

Погрешность численного дифференцирования, как правило, достаточно высока, поэтому схему определения коэффициентов a_n, \dots, a_0 и b_m, \dots, b_0 можно преобразовать следующим образом.

Рассмотрим частный случай, когда поведение объекта без запаздывания в нормированных координатах описывается дифференциальным уравнением вида

$$a_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = b_1 \cdot \frac{d}{dt} x(t) + x(t). \quad (1.14)$$

После интегрирования (1.14) на интервале $[0, t]$, получим

$$\begin{aligned} a_2 \cdot [y^{(1)}(t) - y_0^{(1)}] + a_1 \cdot [y(t) - y_0] + \int_0^t y(\tau) d\tau = \\ = b_1 \cdot [x(t) - x_0] + \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.15)$$

После повторного интегрирования

$$\begin{aligned} a_2 \cdot \left[y(t) - y_0 - y_0^{(1)} \cdot \int_0^t d\tau \right] + a_1 \cdot \int_0^t \{y(\tau) - y_0\} d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\tau y(\xi) d\xi d\tau = b_1 \cdot \int_0^t \{x(\tau) - x_0\} d\tau + \int_0^t \int_0^\tau x(\xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если начальное условие y_0 нулевое, а входной сигнал представляет собой ступенчатую единичную функцию, то уравнение (1.16) упрощается

$$a_2 \cdot [y(t) - y_0^{(1)} \cdot t] + a_1 \cdot \int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^\tau \{1 - y(\xi)\} d\xi d\tau. \quad (1.17)$$

Введем обозначение функций

$$\begin{aligned}
 P(t) &= y(t) - y_0^{(1)} \cdot t, \quad Q(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau, \\
 R(t) &= \int_0^t \int_0^\tau \{I - y(\xi)\} d\xi d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Используя (1.18), можно составить функцию невязки для решения задачи идентификации методом наименьших квадратов

$$S = \int_0^T [a_2 \cdot P(t) + a_1 \cdot Q(t) - R(t)]^2 dt \rightarrow \min.
 \tag{1.19}$$

Система уравнений для определения коэффициентов уравнения (1.17) имеет вид

$$\begin{cases}
 a_2 \cdot \int_0^T P(t) \cdot P(t) dt + a_1 \cdot \int_0^T Q(t) \cdot P(t) dt = \int_0^T R(t) \cdot P(t) dt, \\
 a_2 \cdot \int_0^T P(t) \cdot Q(t) dt + a_1 \cdot \int_0^T Q(t) \cdot Q(t) dt = \int_0^T R(t) \cdot Q(t) dt.
 \end{cases}
 \tag{1.20}$$

Для расчета коэффициента b_1 используется формула

$$b_1 = a_2 \cdot y_0^{(1)}.
 \tag{1.21}$$

Для исключения операций многократного интегрирования, вносящих погрешности в оценки параметров модели, используют **метод Симою**. Предполагается, что

- объект обладает свойством самовыравнивания;
- на вход объекта подано единичное ступенчатое воздействие;
- все сигналы отмасштабированы в диапазоне от 0 до 1 .

Тогда изображение переходной характеристики (кривой разгона) по Лапласу имеет вид

$$Y(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s \cdot F(s)},
 \tag{1.22}$$

где $W(s)$ – передаточная функция объекта,

$$F(s) = W(s)^{-1} = \frac{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + 1}{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + 1}.
 \tag{1.23}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\bar{y}(t) = y(\infty) - y(t) = I - y(t) \quad (1.24)$$

и изменим масштаб времени

$$\theta = t \cdot \left[\int_0^{\infty} \bar{y}(t) dt \right]^{-1}. \quad (1.25)$$

Если функция (1.23) представляется сходящимся рядом вида

$$F(s) = I + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot s^i, \quad (1.26)$$

то его коэффициенты можно рассчитать по формулам

$$\begin{aligned} C_0 &= I, \quad C_1 = \int_0^{\infty} \bar{y}(t) dt, \\ C_{i+1} &= C_1^{i+1} \cdot \int_0^{\infty} \bar{y}(\theta) \cdot \sum_{j=0}^i \left\{ \frac{C_{i-j}}{C_1^{i-j}} \cdot \frac{(-\theta)^j}{j!} \right\} d\theta, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.27)$$

Приравнивая (1.23) и (1.26), можно получить систему

$$\begin{cases} C_1 = a_1 - b_1, \\ C_i = a_i - b_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (1.28)$$

которая решается при условии, что $b_n / a_n = y_0$. Система (1.28) является недоопределенной, поэтому при определении коэффициентов передаточной функции значениями некоторых из них необходимо предварительно задаваться.

На практике структурную и параметрическую идентификацию методом Симою совмещают. Расчет коэффициентов C_i продолжают до получения первого отрицательного значения. Если $C_2 < 0$, то модель объекта представляют передаточной функцией

$$W(s) = \frac{I}{a_1 \cdot s + I}, \quad (1.29)$$

где $a_1 = C_1$. Если $C_3 < 0$, то для объекта выбирают передаточную функцию вида

$$W(s) = \frac{1}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}, \quad (1.30)$$

или

$$W(s) = \frac{b_1 \cdot s + 1}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}. \quad (1.31)$$

В первом случае система двух уравнений (1.28) решается при условии $b_1 = 0$. Во втором случае решение этой системы трех уравнений находится из предположения, что равны нулю коэффициенты a_3 , b_3 и b_2 .

Получение передаточных функций высших порядков сопровождается аналогичными рассуждениями.

Решение о выборе конкретной формы динамической модели принимается на основе анализа ее соответствия экспериментальным данным об объекте.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

До выполнения работы необходимо самостоятельно изучить порядок идентификации объектов по кривым разгона.

При выполнении работы необходимо с помощью метода наименьших квадратов и метода Симою определить параметры динамической характеристики вида (1.4) и оценить качество полученных моделей. Порядок уравнения (1.4) необходимо выбрать самостоятельно из условия точности описания экспериментальных данных.

Содержание отчета о лабораторной работе:

- общая постановка задачи идентификации;
- идентификация объекта методом наименьших квадратов;
- идентификация объекта методом Симою;
- выбор оптимальной модели объекта.

Для выбора оптимальной модели достаточно использовать показатель адекватности второго порядка

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \{y_i - z(t_i)\}^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad (1.32)$$

где y_i – данные, снятые с кривой разгона, $z(t_i)$ – значения, рассчитанные по уравнению динамической модели. Лучшей следует считать модель, обеспечивающую максимальное значение R^2 .

Варианты заданий приведены в приложении А. Пример идентификации средствами *MathCAD* показан в приложении Б.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под идентификацией объекта? Что считается структурной, а что – параметрической идентификацией?
2. Какие исходные данные необходимы для решения задачи идентификации?

3. Как проводится структурная идентификация объекта по его переходной характеристике?
4. Как оцениваются параметры динамической модели объекта методом наименьших квадратов?
5. Как оцениваются параметры динамической модели объекта методом Симою?

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического управления [Текст] : учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика» : в 2 т. / Под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986.
Т. 2 : Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др. ; Под ред. А.А. Воронова. – 367 с. : ил.
2. Крутько, П.Д., Максимов, А.И., Скворцов, Л.М. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем [Текст] / П.Д. Крутько, А.И. Максимов, Л.М. Скворцов ; Под ред. П.Д. Крутько. – М. : Радио и связь, 1988. – 306 с. : ил. – ISBN 5-256-00148-5.
3. Борисов, В.В., Плютто, В.П. Практикум по теории автоматического управления химико-технологическими процессами. Аналоговые системы [Текст] / Борисов В.В., Плютто В.П. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1987. – 152 с. : ил.
4. Штейнберг, Ш.Е. Идентификация в системах управления [Текст] / Штейнберг Ш.Е. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 80 с. : ил. – ISBN 5-283-01470-3.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Варианты заданий для выполнения лабораторной работы

Таблица А.1 – Параметры кривой разгона объекта

№	Δ мин	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	0,2	0,00	0,27	0,53	0,72	0,84	0,91	0,95	0,97	0,98	0,99
2	0,4	0,00	0,61	0,80	0,87	0,92	0,95	0,96	0,98	0,98	0,99
3	0,6	0,00	0,36	0,64	0,80	0,89	0,94	0,97	0,98	0,99	0,99
4	0,8	0,00	0,45	0,70	0,83	0,91	0,95	0,97	0,98	0,99	0,99
5	1,0	0,00	0,49	0,73	0,86	0,92	0,96	0,98	0,99	0,99	1,00
6	1,2	0,00	0,53	0,73	0,83	0,90	0,94	0,96	0,98	0,98	0,99
7	1,4	0,00	0,46	0,65	0,77	0,85	0,90	0,94	0,96	0,97	0,98
8	1,6	0,00	0,11	0,46	0,70	0,84	0,91	0,95	0,98	0,99	0,99
9	1,8	0,00	0,49	0,73	0,85	0,92	0,96	0,97	0,99	0,99	1,00
10	2,0	0,00	0,04	0,49	0,75	0,88	0,94	0,97	0,99	0,99	1,00
11	0,2	0,00	0,43	0,67	0,81	0,89	0,93	0,96	0,98	0,99	0,99
12	0,4	0,00	0,51	0,76	0,89	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00
13	0,6	0,00	0,61	0,88	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
14	0,8	0,00	0,32	0,61	0,78	0,87	0,93	0,96	0,98	0,99	0,99
15	1,0	0,00	0,47	0,79	0,91	0,96	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00
16	1,2	0,00	0,05	0,53	0,77	0,89	0,95	0,97	0,99	0,99	1,00
17	1,4	0,00	0,58	0,81	0,91	0,96	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00
18	1,6	0,00	0,60	0,82	0,91	0,95	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00
19	1,8	0,00	0,14	0,49	0,70	0,83	0,90	0,94	0,97	0,98	0,99
20	2,0	0,00	0,06	0,37	0,58	0,72	0,81	0,87	0,91	0,94	0,96
21	0,2	0,00	0,40	0,65	0,80	0,89	0,94	0,97	0,98	0,99	0,99
22	0,4	0,00	0,49	0,69	0,81	0,88	0,93	0,96	0,97	0,98	0,99
23	0,6	0,00	0,50	0,74	0,86	0,93	0,96	0,98	0,99	0,99	1,00
24	0,8	0,00	0,24	0,53	0,72	0,84	0,91	0,95	0,97	0,98	0,99
25	1,0	0,00	0,19	0,67	0,87	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00
26	1,2	0,00	0,07	0,49	0,72	0,85	0,92	0,95	0,97	0,99	0,99
27	1,4	0,00	0,11	0,61	0,83	0,93	0,97	0,99	0,99	1,00	1,00
28	1,6	0,00	0,53	0,78	0,90	0,96	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00
29	1,8	0,00	0,07	0,49	0,75	0,88	0,94	0,97	0,99	0,99	1,00
30	2,0	0,00	0,60	0,80	0,89	0,94	0,97	0,98	0,99	0,99	1,00

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Идентификация объекта по кривой разгона (документ MathCAD)

Данные, снятые с кривой разгона:

$$t := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 2.0 \\ 2.4 \\ 2.8 \\ 3.2 \\ 3.6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.11 \\ 0.36 \\ 0.61 \\ 0.79 \\ 0.89 \\ 0.94 \\ 0.98 \\ 0.99 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$$n := \text{length}(t)$$

$$i := 0..n-1$$

$$T := t_{n-1}$$

Сглаживание кривой разгона кубическими сплайнами:

$$h(\tau) := \text{interp}(\text{lspline}(t, y), t, y, \tau)$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ

$$dh(t) := \frac{d}{dt}h(t) \quad d2h(t) := \frac{d^2}{dt^2}h(t)$$

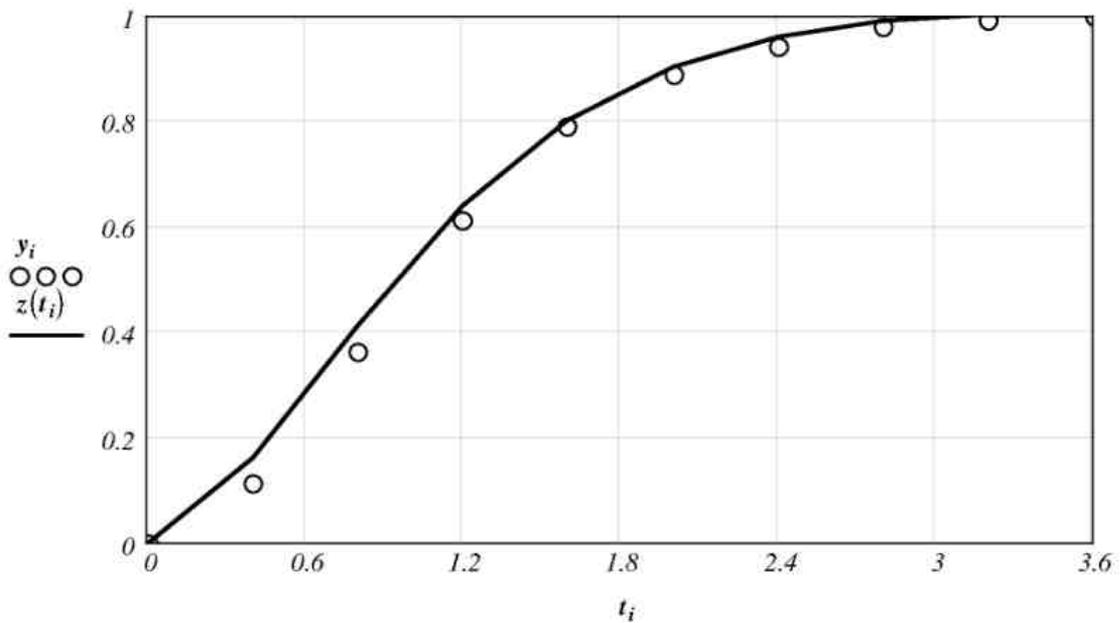
$$P := \begin{pmatrix} \int_0^T d2h(t) \cdot d2h(t) dt & \int_0^T dh(t) \cdot d2h(t) dt \\ \int_0^T d2h(t) \cdot dh(t) dt & \int_0^T dh(t) \cdot dh(t) dt \end{pmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} \int_0^T (1-h(t)) \cdot d2h(t) dt \\ \int_0^T (1-h(t)) \cdot dh(t) dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot Q \quad b_1 := a_2 \cdot dh(0)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.406 \\ 1.082 \\ 0.075 \end{pmatrix} \quad W(s) := \frac{b_1 \cdot s + 1}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}$$

$$z(t) := 1 + \exp\left(\frac{-a_1}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{b_1 - a_1}{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) \right)$$



Показатель адекватности модели:

$$1 - \frac{\sum_i (y_i - z(t_i))^2}{\sum_i (y_i)^2} = 0.998823$$

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛОВ**

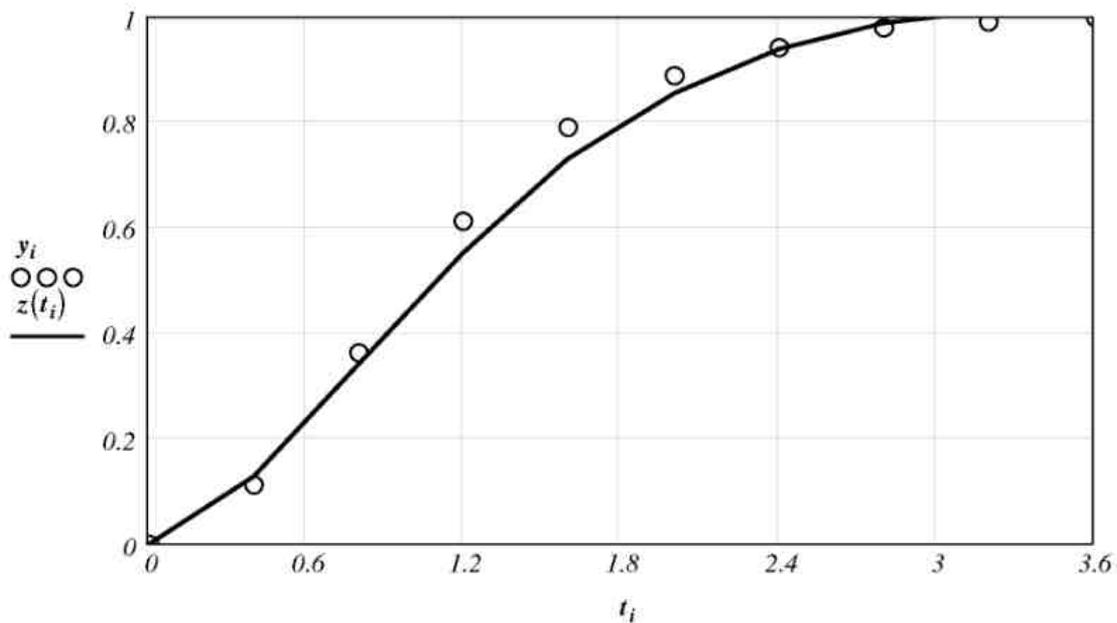
$$P := \begin{bmatrix} \int_0^T (h(t) - dh(0) \cdot t)^2 dt & \int_0^T \left[(h(t) - dh(0) \cdot t) \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau \right] dt \\ \int_0^T \left[(h(t) - dh(0) \cdot t) \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau \right] dt & \int_0^T \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^2 dt \end{bmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} \int_0^T \left[(h(t) - dh(0) \cdot t) \cdot \int_0^t \int_0^\tau (1 - h(\xi)) d\xi d\tau \right] dt \\ \int_0^T \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \int_0^\tau (1 - h(\xi)) d\xi d\tau \right] dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot Q \quad b_1 := a_2 \cdot dh(0)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.602 \\ 1.208 \\ 0.111 \end{pmatrix} \quad W(s) := \frac{b_1 \cdot s + 1}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}$$

$$z(t) := 1 + \exp\left(\frac{-a_1}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{b_1 - a_1}{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{4 \cdot a_2 - a_1^2}}{2 \cdot a_2} \cdot t\right) \right)$$



Показатель адекватности модели:

$$1 - \frac{\sum_i (y_i - z(t_i))^2}{\sum_i (y_i)^2} = 0.998240$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ СИМОЮ

Вычисление нормированного времени:

$$\theta := \frac{t}{\int_0^T (1-h(t)) dt}$$

Сглаживание кривой разгона в нормированном времени кубическими сплайнами

$$\xi(\eta) := \text{interp}(\text{lspline}(\theta, y), \theta, y, \eta)$$

Вычисление площадей:

$$C_0 := 1$$

$$C_1 := \int_0^T (1-h(t)) dt$$

$$k := 1..4$$

$$C_{k+1} := (C_1)^{k+1} \cdot \int_0^{\theta_{n-1}} (1-\xi(\theta)) \cdot \sum_{j=0}^k \frac{C_{k-j} \cdot (-\theta)^j}{(C_1)^{k-j} \cdot j!} d\theta$$

$$C^T = \left(1 \quad 1.13 \quad 0.412 \quad 0.031 \quad -5.139 \times 10^{-3} \quad 6.394 \times 10^{-4} \right)$$

Коэффициент $C_4 \leq 0$, следовательно выбирается передаточная функция третьего порядка:

Первый вариант:

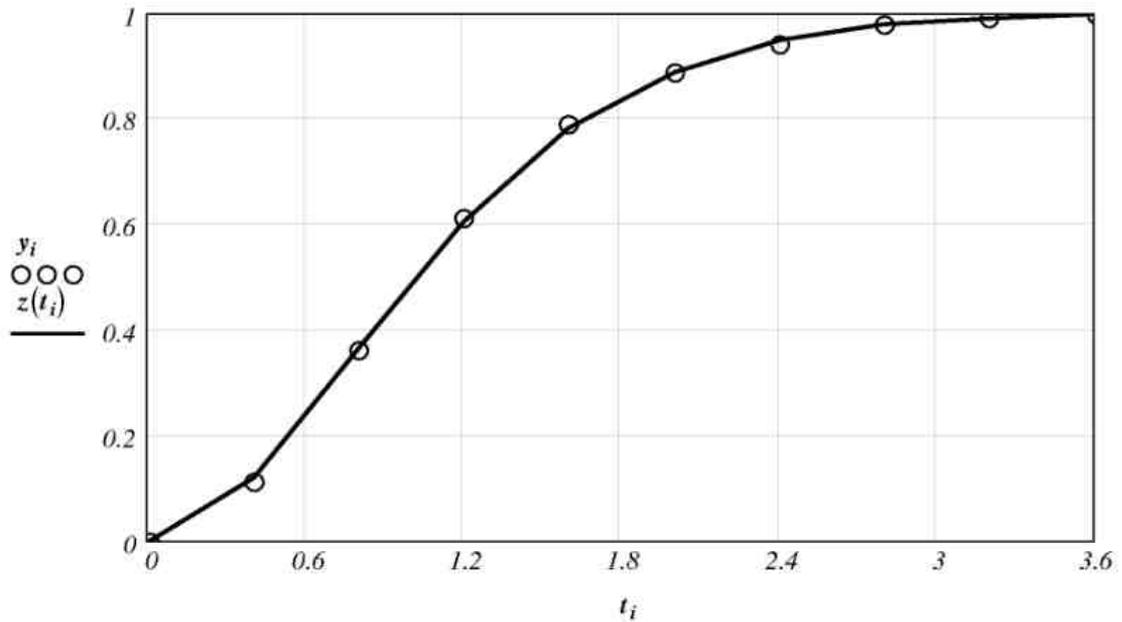
$$b_1 := \frac{-C_4}{C_3}$$

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) := (b_1 + C_1 \ b_1 \cdot C_1 + C_2 \ b_1 \cdot C_2 + C_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.099 \\ 0.599 \\ 1.295 \\ 0.165 \end{pmatrix}$$

$$W(s) := \frac{b_1 \cdot s + 1}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}$$

$$z(t) := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{20} \text{Re}(W(i\omega)) \cdot \text{if}\left(\omega > 0, \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}, 1\right) d\omega$$



Показатель адекватности модели:

$$1 - \frac{\sum_i (y_i - z(t_i))^2}{\sum_i (y_i)^2} = 0.999951$$

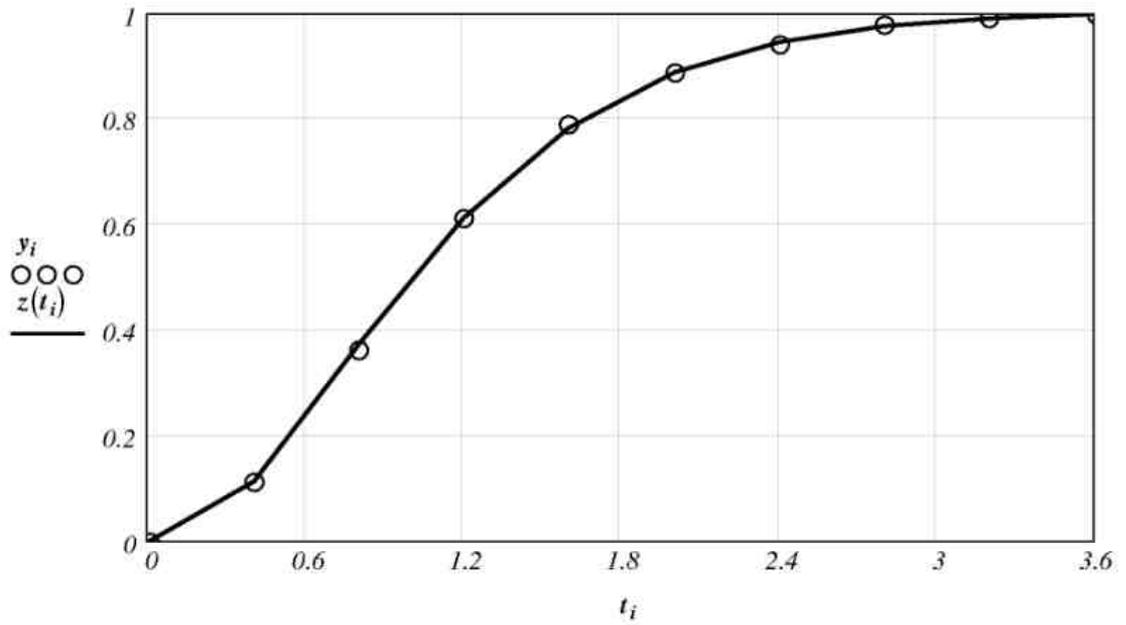
Второй вариант:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) := (c_1 \ c_2 \ c_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.031 \\ 0.412 \\ 1.13 \end{pmatrix}$$

$$W(s) := \frac{1}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + 1}$$

$$z(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{20} \operatorname{Re}(W(i \cdot \omega)) \cdot \operatorname{if}\left(\omega > 0, \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega}, 1\right) d\omega$$



Показатель адекватности модели:

$$1 - \frac{\sum_i (y_i - z(t_i))^2}{\sum_i (y_i)^2} = 0.999952$$