

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# ДИАГНОСТИКА И НАДЕЖНОСТЬ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Методические указания для выполнения лабораторных работ

Направление подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и  
производств

Направленность (профиль) информационно-управляющие системы

Квалификация выпускника – бакалавр

Невинномысск 2021

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения направления подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств и других технических специальностей. Они содержат основы теории, порядок проведения лабораторных работ и обработки экспериментальных данных, перечень контрольных вопросов для самоподготовки и список рекомендуемой литературы. Работы подобраны и расположены в соответствии с методикой изучения дисциплины «Диагностика и надежность систем автоматики». Объем и последовательность выполнения работ определяются преподавателем в зависимости от количества часов, предусмотренных учебным планом дисциплины.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования в части содержания и уровня подготовки выпускников по направлению подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств.

Составитель

канд. техн. наук А.А.Евдокимов

Ответственный редактор

канд. техн. наук Д.В. Болдырев

## Содержание

Лабораторная работа №1.....	4
Лабораторная работа №2.....	14
Лабораторная работа №3.....	39
Лабораторная работа №4.....	42
Лабораторная работа №5.....	51
Лабораторная работа №6.....	56
Лабораторная работа №7.....	60
Лабораторная работа №8.....	97
Лабораторной работе №9 .....	109
Лабораторная работа №10.....	118

## Лабораторная работа №1

Статистический анализ параметров и показателей надежности

**Цель работы:** Ознакомление с методами статистического анализа надежности систем.

### Программа работы

1. По выборочным данным проверить их соответствие следующим законам распределения по критериям  $\hat{\chi}^2$  и Колмогорова:

- экспоненциальному  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $0 < x < \infty$

- усеченному нормальному

$\bar{f}(x) = cf(x)$ ,  $0 < x < \infty$  где  $f(x)$  - плотность неусеченного распределения;  $c$  - нормирующий множитель, определяемый по правилу

$$c = \frac{1}{\int_0^{\infty} f(x) dx}$$

- Релея  $f(x) = \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)$ ,  $0 < x < \infty$

(обратите внимание, что для упомянутых законов распределения приведена формальная запись для дифференциальных функций распределения. В случае необходимости следует рассчитать интегральную

функцию  $F(y, \theta)$  по правилу  $F(y, \theta) = \int_0^y f(x) dx$

2. Параметры вышеупомянутых законов распределения определяются по правилам:

• экспоненциальное  $\lambda = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i}$ ;

• усеченное нормальное -

$$M = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}; \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - M^2 \right)}; c = \frac{1}{\int_0^{\infty} f(x, M, \sigma) dx}$$

- Релея  $M = 1,253\sigma$ , где  $M = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ .

При использовании критерия  $\chi^2$  проверку осуществлять для следующих правил разбиения интервала  $[x_{\min}, x_{\max}]$ :

- $n = \text{int}(1 + 3,3 \lg N)$
- $n = \text{int}(5 \lg N)$
- $n = \text{int}(\sqrt{N})$
- $n = \text{int}(\sqrt[3]{N})$

Выборочные данные, соответствующие различным вариантам, приведены в таблице 4.

### Краткие сведения из теории

Основной вероятностной характеристикой надежности является функция распределения параметров и показателей, характеризующих надежность. Исходными данными для ее оценки выступают эмпирические значения  $x_1, \dots, x_N$  параметров (показателей) надежности - выборка случайных величин.

Основой математико-статистического анализа надежности является преобразование вида

$$\{x_1, \dots, x_N\} \xrightarrow{P} F(x, \vec{\theta})$$

где  $P$  - алгоритм преобразования выборочных данных в функцию распределения;

$F(x, \vec{\theta})$  - параметрический закон распределения случайной величины;  
 $\vec{\theta}$  - вектор параметров закона распределения.

В силу того, что на практике может использоваться много различных законов распределения, задача анализа сводится к обоснованному преобразованию выборочных данных в конкретную функцию распределения  $F(x, \vec{\theta})$ . В общем случае алгоритм преобразования  $P$  имеет следующий вид (Рис.1):

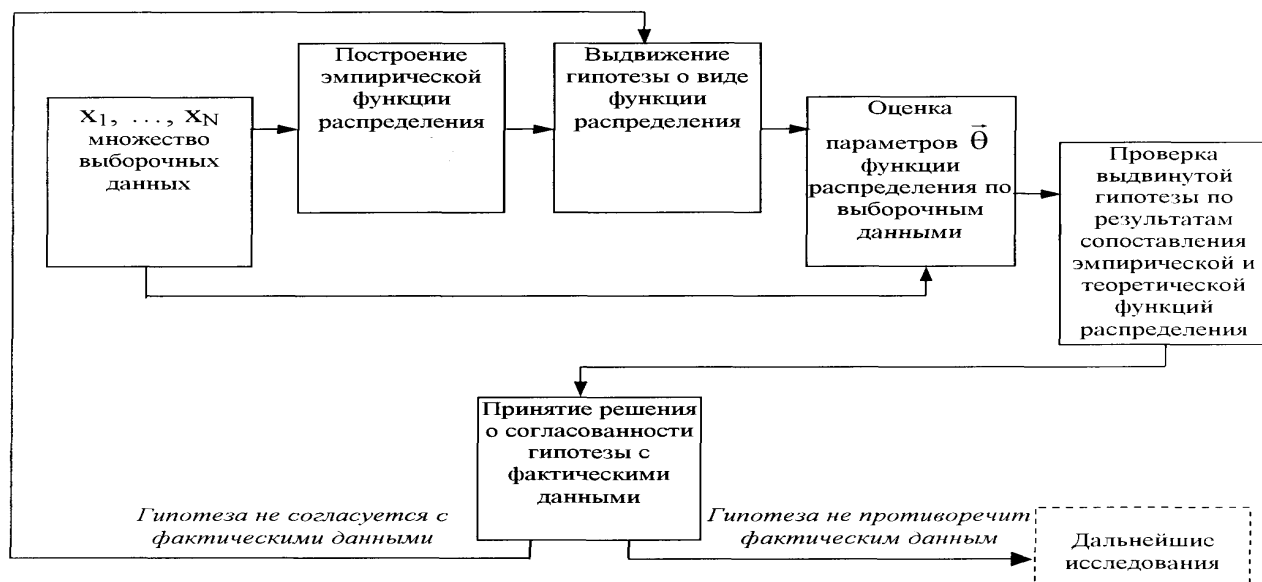


Рис.1. Общий вид алгоритма преобразования .

В зависимости от вида критерия, используемого для проверки выдвинутой гипотезы, построение эмпирической функции распределения осуществляется по группированным, либо не группированным данным.

Обобщенная схема построения эмпирической функции распределения по группированным данным имеет вид (Рис.2)

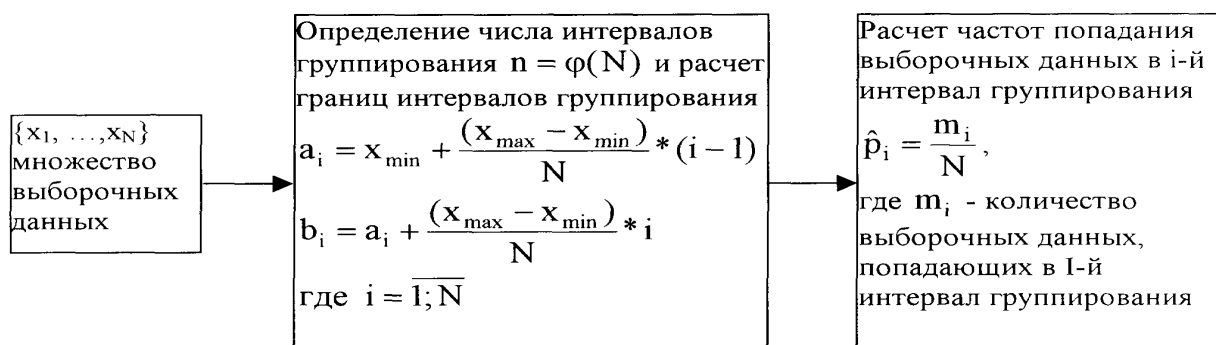


Рис.2 Обобщенная схема построения эмпирической функции

Здесь  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  — минимальные и максимальные элементы выборки.

Построение эмпирической функции распределения по не группированным данным сводится к преобразованию вида

$$\hat{F}(x_i) = i / N \quad (i=1; N)$$

Выдвижение гипотезы о виде функции распределения не поддается какой-либо формализации. Вид закона (экспоненциальный, Релея, Вей-

булла, Гауса и др.) выбирается по результатам визуального анализа эмпирической функции распределения.

Оценка параметров  $\theta$  функции распределения осуществляется по известным (описанным в литературе) соотношениям. Так, например, параметры  $\sigma, \nu_1$  закона распределения Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \nu_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

определяются с помощью соотношений

$$\nu_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2 \right)}$$

Проверка выдвинутой гипотезы о виде функции распределения производится с помощью так называемых «критериев согласия». Рассмотрим два наиболее часто используемых критерия -  $\chi^2$  и критерий Колмогорова.

**Критерий  $\chi^2$ .** Пусть имеется ряд эмпирических значений показателей /параметров  $X_1, \dots, X_N$ , характеризующих надежность. Требуется проверить гипотезу о том, что функция распределения  $F(x, \vec{\theta})$ , вектор параметров  $\vec{\theta}$  которой рассчитан по выборочным данным, согласуется со значениями  $X_1, \dots, X_N$ .

Разобьем интервал  $[X_{\min}, X_{\max}]$  на  $n$  интервалов (правила расчета будут описаны ниже). Рассчитаем теоретическую вероятность попадания случайной величины в  $i$ -й интервал

$$p_i = F(b_i, \vec{\theta}) - F(a_i, \vec{\theta}).$$

Подсчитаем число  $m_i$  элементов выборки, попавших в тот же интервал  $[a_i, b_i]$ . Если выдвинутая гипотеза о виде  $F(x, \vec{\theta})$  согласуется с фактическими данными, то по К. Пирсону при больших  $N$  величина

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

имеет распределение  $\chi^2$  с  $(N-1)$  степенями свободы. По

заданному уровню значимости (обычно из набора 0,1; 0,05; 0,01; 0,001) по таблице 2 находится такое значение  $\chi^2(N-1, \varepsilon)$ , что  $P\{\hat{\chi}^2 > \chi^2(N-1, \varepsilon)\} = \varepsilon$ .

Если  $\hat{\chi}^2$  больше  $\chi^2(N-1, \varepsilon)$ , то считается, что гипотеза не согласуется с фактическими данными. Если  $\hat{\chi}^2 \leq \chi^2(N-1, \varepsilon)$ , то считается, что гипотеза не противоречит фактическим данным.

Пример 1. Допустим, имеются 43 выборочных значения параметра:

0; 15; 24; 28; 37; 49; 54; 60; 75; 87; 92; 111; 114; 121; 127; 130; 134; 138; 140; 144; 147; 149; 155; 168; 170; 173; 189; 192; 197; 198; 201; 204; 225; 231; 243; 248; 249; 256; 265; 274; 281; 300;

Требуется проверить гипотезу о том, что выборочные данные описываются экспоненциальным законом распределения. Уровень значимости критерия принять равным  $\varepsilon = 0,01$ .

---

Решение. Разобьем интервал  $[0; 300]$  на  $n=6$  равных частей:  $[0,50)$ ,  $[50,100)$ ,  $[100,150)$ ,  $[150,200)$ ,  $[200,250)$ ,  $[250,300)$ .

Закон распределения имеет вид  $f(x, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$ , параметр  $\lambda$  которого рассчитывается по формуле

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{43}{6485} = 0.00631$$

Рассчитываются значения  $m_i$  и  $p_j$ . Результаты сводятся в таблицу.

**Таблица 1**

Номер интервала	$m_i$	$p_i$	$Np_j$	$\frac{[m_i - Np_i]^2}{Np_i}$
1	5	0.27	11.34	3.51
2	6	0.2	8.40	0.62
3	11	0.15	6.30	3.86
4	8	0.11	4.62	2.16
5	7	0.07	2.94	5.41
6	5	0.20	8.40	1.43

Подсчитывается величина



$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{[m_i - Np_i]^2}{Np_i} = 17,04$$

По заданному уровню значимости  $\varepsilon = 0,01$  по таблице 2 находится  $\chi^2(N-1, \varepsilon) = \chi^2(5, 0.01) = 15.09$ . Сопоставление  $\hat{\chi}^2 < \chi^2(5, 0.01)$  позволяет заключить, что гипотеза о том, что выборочные данные соответствуют экспоненциальному закону распределения не согласуется с фактически-ми данными.

**Критерий Колмогорова.** По имеющимся выборочным значениям  $X_1, \dots, X_N$  по не сгруппированным данным строится эмпирическая функция распределения  $\hat{F}(x)$ . Величина

$$\hat{D} = \sup | \hat{F}(x) - F(x, \theta) |$$

$$0 \leq x \leq \infty$$

имеет распределение, не зависящее от функции  $F(x, \theta)$ . При  $N \leq 50$  по заданному уровню значимости  $\varepsilon$  с помощью таблицы 3 ( $\varepsilon$  выбирается из набора 0.1; 0.05; 0.02; 0.01) находится такое значение  $A(N, \varepsilon)$ , что  $P\{D > A(N, \varepsilon)\} = \varepsilon$ .

Если значение  $\hat{D} = A(N, \varepsilon)$ , то считается, что эксплуатационные данные не противоречат гипотезе. При  $N > 50$  используется предельное распределение  $K(y)$  Колмогорова. Проверка соответствия выдвинутой гипотезы основана на использовании соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{ \sqrt{N} \hat{D} > y \} = 1 - K(y).$$

**Пример 2.** В условиях примера 1 проверить по критерию Колмогорова гипотезу о том, что распределения показателя опасности является равномерным в интервале  $[0; 300]$ . Уровень значимости  $\varepsilon$  принять равным 0.01.

Из таблицы 3 следует, что

$$A(N, \varepsilon) = A(43; 0.01) = 0.243$$

Величина  $\hat{D}$  составляет

$$\hat{D} = \max | \hat{F}(x) - \frac{x}{300} | = 0.07 < 0.243$$

$$0 \leq x \leq 300$$

Таким образом, выдвинутая гипотеза о равномерном распределении показателей опасности на интервале  $[0; 300]$  не противоречит фактическим данным.

## Контрольные вопросы

1. Назовите законы распределения случайных величин, используемых в теории надежности.
2. Поясните смысл параметров нормального распределения и влияние их значений на вид кривой распределения.
3. Алгоритм проверки соответствия выборочных данных выбранному закону распределения по критериям Колмогорова и  $\chi^2$ .

Таблица 2.

Критические значения  $\chi^2(r, q)$  распределения  $\chi^2$ .

$$q = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \int_0^{\chi^2(r, q)} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

r	Q													
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,63	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,81	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,55	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,057	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,81	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,65	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,01	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,00	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,21	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,29	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,29	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,58	14,12	16,17	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,6	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица 3

Критические значения  $A(n, q)$  для наибольшего отклонения эмпирического распределения от теоретического (критерий Колмогорова).

$$P\{\sup |F_n(x) - F(x)| > A(n, q)\} = q$$

n	q			n	q		
	0,1	0.05	0.01		0.1	0.05	0.01
1	0,950	0,975	0,995	26	0.233	0,259	0,311
2	776	842	929	27	229	254	305
3	636	708	829	28	225	250	300
4	565	624	734	29	221	246	295
5	509	563	668	30	218	242	290
6	468	519	617	31	214	238	285
7	436	483	576	32	211	234	281
8	410	454	542	33	208	231	277
9	387	430	513	34	205	227	273
10	369	409	489	35	202	224	269
11	352	391	468	36	199	221	265
12	338	375	449	37	196	218	262
13	325	361	432	38	194	215	258
14	314	349	418	39	191	213	255
15	304	338	404	40	189	210	252
16	295	327	392	41	187	208	249
17	286	318	381	42	185	205	246
18	279	309	371	43	183	203	243
19	271	301	361	44	181	201	241
20	265	294	352	45	179	198	238
21	259	287	344	46	177	196	235
22	253	281	337	47	175	194	233
23	247	275	330	48	173	192	231
24	242	269	323	49	171	190	228
25	238	264	317	50	170	188	226

Таблица 4

## Выборки случайных величин

Значение вы- борки	№ варианта																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90	74	87	73	39	90	5	71	64	71	50	84	7	59	6	30	11	47	97	35
2	21	15	6	80	70	9	45	31	46	90	31	6	28	74	82	47	14	9	9	75
3	36	59	80	65	2	96	35	84	56	22	7	7	87	76	40	10	45	79	33	78
4	28	28	70	54	14	88	88	21	81	13	1	76	76	94	4	22	58	82	75	76
5	80	88	52	87	85	13	72	44	71	47	7	27	53	69	93	89	29	94	22	44
6	19	68	43	20	24	77	5	14	78	9	100	68	52	88	16	77	80	49	49	42
7	86	100	21	34	3	67	16	39	50	91	71	55	6	78	84	44	11	25	37	7
8	22	2	45	33	56	35	46	19	74	30	45	19	82	57	95	13	18	7	41	36
9	47	73	95	76	40	30	26	90	85	13	12	65	17	98	67	82	88	47	15	23
10	48	55	40	60	2	74	65	65	47	49	32	15	37	16	70	9	75	85	44	77
11	13	43	10	25	83	53	76	93	39	80	11	95	77	61	65	95	95	54	28	55
12	76	51	94	26	92	24	29	41	16	47	84	53	34	91	67	62	73	45	28	40
13	9	2	30	85	4	48	43	62	83	48	47	46	67	28	8	92	88	60	45	88
14	32	28	65	20	2	11	10	94	62	51	3	50	91	55	1	52	66	8	92	56
15	97	77	9	85	81	50	9	20	95	49	99	56	3	42	30	93	81	92	41	53
16	9	61	86	63	61	90	43	41	95	29	61	70	72	32	24	52	48	99	18	25
17	22	36	21	53	92	47	69	89	41	39	52	44	48	62	91	73	72	91	32	67
18	61	10	1	57	37	65	21	89	64	7	39	5	9	10	64	68	73	33	58	85
19	54	73	92	75	70	37	32	72	28	76	81	51	32	2	79	51	5	48	6	48
20	40	58	15	13	95	9	15	79	77	33	39	64	95	67	9	75	6	12	14	100
21	56	89	53	1	22	15	81	19	52	64	83	67	84	38	78	18	89	43	63	62
22	2	15	58	20	14	47	55	48	66	71	13	10	7	42	84	35	34	91	29	50
23	6	84	17	16	6	31	48	59	17	77	85	31	29	60	20	52	78	14	94	84
24	9	22	94	37	59	46	47	3	93	72	46	10	56	73	81	63	48	68	99	95
25	24	7	25	100	19	71	50	93	72	90	16	86	39	6	97	88	87	30	55	51
26	95	93	85	33	26	33	13	76	69	69	63	7	57	38	41	96	57	19	27	94
27	83	60	75	32	17	74	77	17	70	87	34	99	55	96	37	45	98	18	56	18
28	55	75	37	45	20	99	63	16	64	26	72	93	41	60	19	83	60	69	30	10
29	16	47	75	99	100	66	76	71	80	85	78	91	90	77	59	61	56	42	98	94
30	81	69	20	38	44	34	20	26	29	32	94	17	25	72	46	70	24	59	61	34
31	31	83	29	80	6	97	9	94	88	72	87	87	30	57	47	14	44	63	40	40
32	37	44	43	70	59	96	95	24	50	28	75	89	88	95	40	88	75	72	80	54
33	66	16	8	17	91	18	62	64	0	53	28	97	64	66	78	23	91	69	29	88
34	77	51	51	10	56	64	76	11	98	89	91	31	7	98	44	36	26	()	34	35
35	50	66	12	36	21	87	31	78	90	17	8	77	4	40	22	88	38	19	49	59
36	24	19	21	86	30	5	46	12	100	1	29	34	29	59	65	82	2	72	98	7
37	23	86	65	80	86	76	69	60	86	8	44	65	48	86	12	16	19	47	97	10
38	8	82	35	16	64	24	92	69	7	89	9	92	19	66	82	64	27	92	99	80
39	68	84	27	41	11	64	62	15	25	44	78	38	78	49	71	60	54	69	94	69
40	15	8	74	95	92	51	6	18	5	96	59	13	38	49	29	4	78	23	49	27

## Лабораторная работа №2

Изучение новых статистических методов анализа малых выборок

**Цель работы:** на

изучить новые статистические методы анализа малых выборок.

### Программа работы

#### Задание №1

1. На основе выборочных данных (в соответствии с заданием, выданным преподавателем), построить оценки законов распределения наработки до отказа следующими методами:

- последовательных медиан;
- уменьшения неопределенности;
- сжатия ИЗР.

2. Составить полученные оценки на основе следующих метрик:

$$- D_1 = \max |F_i(x) - F_j(x)|$$

$$- D_2 = \int_a^b |F_i(x) - F_j(x)| dx$$

$$- D_3 = \int_a^b (F_i(x) - F_j(x))^2 dx$$

Здесь  $i, j$  – идентификаторы используемых методов ( $i, j = \overline{1; k}$ );

$a, b$  – границы области изменения случайной величины  $x$ .

Результаты сопоставления оформить в виде таблицы вида:

Таблица 1

<i>Метод</i> <i>метод</i>	$\mu_1$	...	$\mu_k$
$\mu_1$			
...			
$\mu_k$			

#### Задание №2

1. На основе выборочных данных (в соответствии с заданием, выданным преподавателем), построить оценку закона распределения на основе информационного метода.

2. Произвести сопоставление полученной оценки с нормальным законом распределения параметрами: матожидание – 8, среднеквадратическое отклонение – 2. Сопоставление произвести на основе метрик, описанных в п.2 задания №1. Результаты сопоставления оформить в виде таблицы вида:

Таблица 2

Наименование метрики	D1	D2	D3
Значение метрики			

### **Задание №3**

1. На основе выборочных данных (в соответствии с заданием, выданным преподавателем), построить оценку усеченного закона распределения.

2. Произвести сопоставление с равномерным законом распределения, заданным на интервале  $[0; 10]$ . Сопоставление произвести на основе метрик, описанных в п.2 задания №1. Результаты сопоставления оформить в виде таблицы 2.

## **Краткие сведения из теории**

### **2.1. Анализ специальных статистических методов обработки малого числа наблюдений**

Невозможность применения традиционных методов математической статистики для обработки выборок малого объема стимулировала разработку новых статистических методов, ориентированных специально в обработку малого числа наблюдений.

При анализе специальных статистических методов ограничимся лишь кратким анализом свойств.

Идея о необходимости нового подхода к обработке малых выборок впервые высказана В.В. Чавчанидзе и В.А. Кушишвили где для построения оценки функции распределения предлагалось использовать так называемый метод прямоугольных вкладов (МПВ). Исследование свойств этого метода и полученные при этом результаты стимулировали разработку целой серии методов, основанных на идее использования функций вкладов.

Оценки распределений, получаемые в результате использования этих методов, обобщенно могут быть представлены линейной суммой двух компонент: априорной и эмпирической. При этом эмпирическая компонента  $\hat{f}(x)$  строится по данным выборки и представляет собой сумму функций, удовлетворяющих ряду условий:

$$\hat{f}(x) = \alpha_0 f_0(x) + \frac{1-\alpha_0}{N} \sum_{i=1}^N p(x-x_i), \quad (2.1)$$

где  $f_0(x)$  - априорная компонента;

$p(x-x_i)$  - составляющая эмпирической компоненты, связанная с  $i$ -й реализацией выборки;

$\alpha_0$  - вес априорной компоненты.

Анализ «нетрадиционных» методов начнем с МПВ. Названный метод называется на использовании априорной информации о неизвестном распределении и учете случайного характера выбора. Априорная информация о распределении состоит в следующем:

- при известных границах  $[a, b]$  интервала, на котором определена случайная величины  $X$ , плотность распределения удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 & x \in [a, b] \\ f(x) &= 0 & x \notin [a, b] \end{aligned}$$

- плотность распределение непрерывна внутри интервала  $[a, b]$  и не имеет очень крутых подъемов и спадов.

Из анализа априорной информации можно заключить, что в качестве априорной компоненты в МПВ наиболее целесообразно использовать равномерное распределение, заданное внутри интервала  $[a, b]$ .

Учет случайного характера выборки выражается в том, что учитывается возможность появления любых других значений случайной величины из области  $[x_i - \frac{d}{2}; x_i + \frac{d}{2}]$ , где  $d$  - ширина вклада.

Методика построения  $f(x)$ , основывается на использовании в качестве функции вклада единичного прямоугольника, что и дало название методу. Плотность распределения при этом записывается в виде:

$$f(x) = \frac{1}{N+1} \{ f_0(x) + \sum_{i=1}^N \Psi_i(x) \}, \quad (2.2)$$

$\Psi_i(x)$  - функция вклада единичной площади. При этом для некоторых значений  $x_i$  функция вклада может выходить за пределы интервала  $[a, b]$ . В этом случае часть площади, выходящая за границы интервала, отбрасывается, а над оставшимся основанием прямоугольника равномерно надстраивается площадь, равная отброшенной.



В качестве функции вклада могут использоваться также распределения иной формы. Так, например, в качестве функции вклада используется распределение Симпсона, потенциальная функция, дельтообразная функция и другие. В известных работах показано, что:

- во-первых, для каждого типа распределения существует оптимальная ширина вклада  $d_0$ , при котором эффективность метода максимальна; величина  $d_0$  уменьшается с увеличением объема выборки;
- во-вторых, форма вклада оказывает существенное влияние на точность метода и простоту реализации;
- в-третьих, оптимальная ширина вклада зависит не только от типа, но и от значений параметров распределения; при отсутствии такой информации задача выбора параметров вклада не приводит к определенному решению, поэтому на высокую эффективность методов вкладов при обработке экспериментальных данных в случае, когда отсутствует априорная информация о виде распределения, рассчитывать трудно.

Своеобразный подход к определению формы и параметров вкладов рассматривается в работе В.И. Шаповалова. Функции вкладов предлагается подбирать таким образом, чтобы из имеющейся выборки извлекалось наибольшее количество информации о функции распределения.

Однако, рассматриваемый подход имеет также существенные недостатки. Во-первых, для определения формы вклада используются значения четвертого центрального момента; во-вторых, для определения оптимальных значений параметров требуется априорное значение типа распределения. Если тип распределения заранее неизвестен, обосновать выбор значений параметров не представляется возможным.

Заключая анализ методов вкладов, отметим, что идея учитывать случайный характер каждой отдельной реализации используется уже при группировании больших выборок. При построении гистограммы каждой реализацией связывается элементарная плотность равномерного распределения на подынтервале, включающем эту реализацию. Суммирование всех элементарных плотностей дает оценку плотности

распределения, графическим изображением которой и является гистограмма.

Таким образом, из анализа сущности методов вкладов можно заключить, что принципиально новым элементом, обуславливающим высокую эффективность методов при обработке выборок ограниченного объема, является использование априорной информации, заключенной в границах интервала, на котором определена случайная величина.

И.В. Еременко и А.Н. Свердлик предложили эмпирический метод построения функции распределения, названный методом уменьшения неопределенности (МУН). Отличие этого метода от МПВ заключается в том, что вместо прямоугольного вклада ширины  $d$ , построенного около реализации  $x_i$ , используется нормированное равномерное распределение, заданное на интервале  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  суть МУН заключается в равномерном распределении скачка вероятности в точке  $x_i$ .

Выражение для эмпирической функции распределения, получаемой с помощью МУН, записывается в виде

$$F(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} [F(x_i) - F(x_{i-1})] + F(x_{i-1}), \quad (2.3)$$

при  $x_{i-1} \leq x < x_i$  и

$$F(x_i) = \frac{1}{N+1} \left[ \frac{x_i - a}{b - a} + (i-1) + k_i - 1 \right], \quad (2.4)$$

где  $k_i$  - число одинаковых значений  $x_i$ . МУН является частным случаем МПВ, в котором ширина вклада является случайной величиной, изменяющейся с изменением индекса  $i$ .

Метод априорно-эмпирических функций (АЭФ), разработанный И.П. Демаковым и В.Е. Потепуном. В случае использования метода АЭФ интегральная функция распределения представляется в виде:

$$F(x) = \omega F_a(x) + (1 - \omega) F_s(x) \quad (2.5)$$

где  $F_a(x)$  - априорное распределение, построенное по априорным данным;

$F_s(x)$  - эмпирическое распределение, построенное по данным

выборки;

$\omega$  - коэффициент достоверности информации об априорном распределении.

Метод АЭФ, так же как и рассмотренные выше методы получения оценок распределений, основан на использовании априорной информации в виде границ интервала  $[a, b]$  и на индивидуальном подходе к каждой отдельной реализации случайной величины. Однако при этом априорной информации приписывается некоторый вес  $\omega$  и полагается, что

$$f(x) \geq 0 \quad \text{при } a - \frac{\Delta}{2} \leq x \leq b + \frac{\Delta}{2},$$

$$f(x) = 0 \quad \text{при } x < a - \frac{\Delta}{2}, x > b + \frac{\Delta}{2},$$

где  $\Delta$  - интервал дискретности, определяемый точностью наблюдения (измерения) случайной величины. В известных работах приводятся сведения о том, что по эффективности метод АЭФ не уступает МПВ, а по простоте реализации сродни МУН. Кроме того, сильной стороной метода является то, что предлагается отказаться от уравнивания значимости априорной информации и информации, получаемой от наблюдений.

Однако указанные преимущества на практике можно реализовать лишь тогда, когда имеется достаточно точная информация о предполагаемой функции распределения. В случае отсутствия такой информации метод АЭФ совпадает с традиционными методами математической статистики.

Метод сжатия области существования интегральных законов распределения (ИЗР), предложен И.В. Еременко. При использовании метода предполагается, что:

- имеется выборка конечного объема, представленная в виде вариационного ряда  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ );
- для каждого элемента выборки  $x_i$  существует единственная последовательность чисел  $y_i = F(x_i)$  такая, что

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_i \leq \dots \leq y_N; \quad (2.6)$$

- построение оценки распределения состоит в отыскании приближенных значений  $F(x_i) = a_i$ :

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots \leq a_N \leq 1, \quad (2.7)$$

задача оценивания, таким образом, сводится к выбору такой последовательности  $a_i (i=1, 2, \dots, N)$ , чтобы минимизировать либо математическое ожидание, либо дисперсию погрешности построения ИЗР для каждого  $i$ -го члена вариационного ряда  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ .

Наиболее предпочтительным при инженерных расчетах является алгоритм, основанный на минимизации дисперсии. В этом случае члены ряда (2.7) определяются следующим образом:

$$a_i = \frac{i}{N+1}, \quad (2.8)$$

Соединяя полученные значения  $a_i (i=1, 2, \dots, N)$  отрезками прямых, получаем кусочно-линейную аппроксимацию интегральной функции распределения с узлами в точках  $\{x_i, a_i\}$ .

Основным достоинством метода сжатия ИЗР является возможность вычислить доверительную вероятность для каждого  $i$ -го члена последовательности (2.7). При этом вероятность прохождения ИЗР через заранее выбранный интервал  $[a_i - \Delta_I, a_i + \Delta_I]$  определяется как

$$P_{\Delta a_i, N} = \int_{a_i - \Delta_i}^{a_i + \Delta_i} P_{y_i, N} dy_i \quad (2.9)$$

где  $P_{y_i, N}$  - плотность вероятности прохождения ИЗР на уровне  $y_i$  для  $i$ -го испытания в серии из  $N$  испытаний. Эта величина описывается выражением

$$P_{y_i, N} = \frac{M!}{(i-1)!(N-i)!} y_i^{i-1} (1-y_i)^{N-i} \quad (2.10)$$

Кроме того, использование метода сжатия ИЗР обеспечивает высокую точность оценивания функции распределение в окрестности узлов интерполяции.

Недостатком метода является то, что точность воспроизведения остальных участков кривой  $y = F(x)$  путем линейной интерполяции при малом числе наблюдений невысока.

Из анализа (2.8) можно заключить, что метод сжатия ИЗР является частным случаем МПВ (в этом можно легко убедиться, продифференцировав интегральную функцию распределения, получаемую с помощью ИЗР). В силу того, что используемые вклады не являются оптимальными, можно заключить, что по точности метод сжатия ИЗР уступает МПВ.

Г.В. Дружининым и О.В. Вороновой разработан эмпирический метод построения интегральной функции распределения, названный авторами «методом последовательных медиан» (МПМ). Суть этого метода заключается в следующем.

Исходные данные  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  располагаются в вариационный ряд, находится медиана этого ряда и на графике эмпирической функции распределения ставится точка с координатами  $x_{ME}^*$  и  $F(x_{ME}^*)=0.5$ . Затем находятся медианы двух половин вариационного ряда и им в соответствие ставятся значения эмпирической функции 0.25 и 0.75 и т.д. Указанная процедура продолжается до тех пор, пока не будут рассмотрены все имеющиеся значения  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ . В результате получается ряд точек  $F_n(x)$ .

Нахождение начального и конечного значений функций распределения осуществляется по формулам

$$x_H^* = x_1 - (x_2 - x_1) / k_1 \quad (2.11)$$

$$x_K^* = x_N + (x_N - x_{N-1}) / k_2, \quad (2.12)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{x_M^* - x_1}{x_N - x_M}, k_2 = \frac{1}{k_1}.$$

Здесь  $x_1, x_2$  первые два члена вариационного ряда,  $x_M^*$  - оценка моды функции распределения. При малом числе опытных данных считается, что оценка моды совпадает с оценками медианы по выборке.

Из описания МПМ можно сделать вывод, что он также является одной из разновидностей метода вкладов (чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать получаемую эмпирическую функцию распределения). Весьма интересным моментом в МПМ является то, что границы интервала, на котором определена случайная величина, определяются по данным выборки.

Своеобразный подход к построению оценки распределения предложен в работах Л.Я. Пешеса, М.Д. Степановой, Н.Н. Власовца.

Предлагаемый ими метод основан на выдвижении и проверке гипотез, при чем в качестве критерия согласия предлагается использовать условие совпадения трех-четырех первых моментов распределения. Определение вида аппроксимирующего распределения осуществляется путем оценки попадания расчетных моментов этого распределения в доверительные интервалы для эмпирических моментов.

При этом доверительные интервалы для эмпирических моментов определяются путем статистического моделирования эмпирической функции на ЭВМ.

Для построения эмпирической функции распределения по выборке  $x_i (i=1,2,\dots,N)$  авторами предлагается использовать метод прямоугольных вкладов, причем в качестве функции вклада предлагается использовать прямоугольник с переменным основанием  $d_i = 0.5(x_{i+1} - x_i)$ . Функции вклада строятся относительно  $x_i' = 0.5(x_{i+1} + x_i)$  При этом интегральная функция распределения записывается в виде:

$$F(x) = \frac{x - x_{i-1}'}{x_i' - x_{i-1}'} (y_i - y_{i-1}) + y_{i-1}, \quad x_{i-1}' < x < x_i', \quad (2.13)$$

где  $y_i$  – частность  $i$ -ой реализации случайной величины  $X$ .

Алгоритм формирования оценок первых начальных четырех моментов заключается в следующем:

- с помощью программного датчика равномерно - распределенных случайных чисел вырабатываются случайные последовательности равномерно распределенные на интервале  $(0; 1)$ ;
- с помощью обратного преобразования  $x = F^{-1}(y)$  получаются случайные последовательности объема  $N$ , удовлетворяющие распределению (2.13). Учитывая выражение для  $F(x)$ , значения  $x$  определяются по правилу:

$$x = \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} * \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} + \frac{x_{i-1} - x_i}{2}, \quad \text{при } y_{i-1} < y < y_i.$$

По полученным  $N$  реализациям случайных величин  $X$  оцениваются значения первых четырех начальных моментов распределения. Указанные операции повторяются  $k$  раз, причем  $k$  оцениваются при помощи неравенства  $k \geq 20(1-\gamma)^{-1}$ , где  $\gamma$  - уровень доверия. Для каждого из моментов составлялся вариационный ряд

$$v_i^{(1)} \leq v_i^{(2)} \leq \dots \leq v_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Границы доверительного интервала определяются величинами  $v_i^{(r^1)}$  и  $v_i^{(r^2)}$ , где  $r^1, r^2$  целые части чисел  $\frac{k(1-\gamma)}{2}$  и  $\frac{k(1+\gamma)}{2}$ . Методика проверки выдвигаемых гипотез заключается в следующем. Для каждого из рассматриваемых теоретических распределений методом максимального правдоподобия определяются значение параметров, после чего

вычисляются первые четыре начальных момента, соответствующие этому распределению.

После этого выясняют, попадают ли эти моменты в доверительные интервалы для эмпирических моментов. При этом переходят последовательно от более высоких уровней к более низким. В качестве подходящего распределения выбирают такое, моменты которого попадают в самый узкий интервал.

Следует отметить, что авторами метода выбран весьма удачный способ идентификации эмпирического и теоретического распределения по значениям начальных моментов, т.к. совокупность моментов образует минимальную систему достаточных статистик, однозначно определяющих распределение.

К недостаткам метода следует отнести:

- во-первых, то, что при малом числе данных значения моментов высших порядков (начиная с третьего) определяются с большой погрешностью;
- во-вторых, вследствие того, что рассматриваемый метод является одной из разновидностей метода вкладов, а ширина вклада является случайной, оценка распределения (2.13) не является оптимальной;
- в-третьих, «разрешающая способность» метода зависит от анализируемых теоретических распределений. Если в их числе не найдется подходящей модели, то перейти к узким доверительным интервалам не удастся, что является следствием неконструктивного, проверочного характера метода.

## **2.2. Информационный подход к построению оценок распределения по ограниченному числу опытных данных**

Количество информации (по Шеннону) о функции распределения, содержащееся в выборке малого объема, ограничено, поэтому оценить распределение по опытным данным можно лишь с определенной степенью точности. Целью разработки новых статистических методов является, возможно, более полное использование выборочной информации о функции распределения и, следовательно, получение оценок распределений, как можно более близких к истинным.

На основе проведенного анализа нетрадиционных методов математической статистики, можно заключить, что в случае отсутствия

априорных сведений о функции распределения целесообразно строить метод оценивания таким образом, чтобы исключить этапы, требующие использования какой-либо информации, кроме опытной. Использование энтропийного подхода позволяет получать оценку распределения на основе лишь опытной информации. Задача в этом случае формулируется следующим образом.

Пусть случайная величины  $X$  (в общем случае векторная) может принимать ряд значений  $x_1, x_2, \dots, x_N$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , которые неизвестны. В результате эксперимента получены средние значения функций  $g_j(x) (j=1, 2, \dots, m)$

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = v_j, \quad (2.14)$$

причем  $m \ll n$ .

Требуется на основе имеющейся информации определить значения  $p_i$ .

Дополнив исходные данные условием нормировки  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , получим  $m+1$  уравнение с  $n$  неизвестными.

Из постановки задачи видно, что однозначно определить значения  $p_i$  по имеющейся опытной информации не представляется возможным. Поэтому необходим критерий, который из бесконечного множества распределений позволял бы выбирать такое, которое наиболее точно согласуется с имеющимися экспериментальными данными. В указанных работах в качестве такого критерия используется энтропия распределения. Под энтропией понимается неопределенность относительно истинных значений  $p_i (i=1, 2, \dots, N)$ . Исходная задача при этом преобразуется к виду: определить значения  $p_i$ , доставляющие максимум функционалу

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \rightarrow \max \quad (2.15)$$

при уравнениях связи

$$\left. \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$



$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = v_j \quad j=1,2,\dots,m \quad (2.16)$$

Подчеркнем, что по условию задачи тип распределения  $p_i$  полагается неизвестным.

При таком подходе из всех распределений, согласующихся с исходными данными (и представленными в виде уравнений связи (1.16)), следует выбирать наиболее пологое (т.е. наиболее близкое к равномерному). Другими словами следует избегать распределений, имеющих острые пики, при которых выделяется тот или иной результат, за исключением случаев, когда того требует условие задачи.

Таким образом, оценке распределения, полученной на основе энтропийного подхода (апостериорному распределению) соответствует наибольшая неопределенность (согласно (2.15)). Если число возможных значений случайной величины  $X$  априорно известно, то количество информации о функции распределения  $I_{on}$ , извлекаемое в результате обработки исходных статистических данных, определяется соотношением:

$$I_{on} = S_{anp} - S$$

где через  $S_{anp}$  обозначена исходная неопределенность, соответствующая случаю, когда известно лишь число возможных значений случайной величины и определяемая соотношением

$$S_{anp} = -\ln(n) \quad (2.17)$$

Из анализа (2.17) следует, что оценка, доставляющая максимум неопределенному апостериорному распределению, гарантирует нас от использования любой информации, не связанной с данными выборки. Использование информационного подхода позволяет представить практически все встречающиеся на практике одномерные определения в единой форме.

$$f(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^m \mu_j x^j\right) \quad (2.18)$$

где  $\mu_j$ - значения параметров распределения, определяемые по значениям  $v_j$ . Следует отметить, что выбор характеристик распределения в значительной степени произволен. Например, в качестве центральной точки распределения могут выступать среднее, медиана и мода, в качестве характеристик рассеяния - дисперсия, первый абсолютный момент и широта распределения.

В известной литературе показано, что в качестве  $\nu_j$  целесообразно использовать значения начальных моментов распределения. Во-первых, в силу того, что начальные моменты являются осредненными величинами, то при малом числе данных, в их значениях обнаруживаются более устойчивые закономерности, чем в самих результатах наблюдений. Во-вторых, совокупность начальных моментов образует минимальную систему достаточных статистик, однозначно характеризует функцию распределения и стохастическую зависимость между переменными (в случае системы случайных величин). Поэтому в качестве уравнений связи следует принять значения начальных моментов распределений.

Из теории математической статистики известно, что для описания практически любого реально встречающегося распределения достаточно учитывать три - четыре начальных момента.

В известной литературе показано, что точность получаемых с помощью разработанного метода оценок распределений в целом оказывается выше, нежели у оценок, получаемых с помощью статистических методов аналогичного назначения. Таким образом, для оценивания показателей надежности по выборке малого объема целесообразно использовать информационный метод.

### **2.3. Методика построения оценок законов распределения случайных величин.**

#### **2.3.1. Методика построения оценок неусеченных законов распределения.**

В методике использованы следующие обозначения:  $\mu_j^H$  - нормированные параметры распределения, соответствующие нормированным значениям математического ожидания  $\nu_1^H$  и среднеквадратического отклонения  $\sigma^H$ ,  $\mu_j^*$  - ненормированные параметры распределения, соответствующие  $X \in [0, b^*]$ ,  $\mu_j$  - параметры распределения, соответствующие  $X \in [a, b]$ .

**Шаг 1.** Исходный интервал  $[a, b]$ , на котором возможны реализации случайной величины  $X$ , преобразуется таким образом, чтобы нижняя граница интервала совпала с началом координат  $X^* = X - a$  (при этом верхняя граница интервала примет значение  $b^* = b - a$ ).

Соответственно преобразуются данные исходной выборки

$$X_i^* = X_i - a \quad (2.3.1)$$

**Шаг 2.** Оцениваются значения двух первых начальных моментов распределения

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i^*)^j}{N}, j=1,2 \quad (2.3.2)$$

и с помощью выражения  $\sigma = \sqrt{\frac{N}{N-1}(v_2 - v_1^2)}$  оценивается величина среднеквадратического отклонения распределения.

**Шаг 3.** Определяется значение первого нормированного начального момента

$$v_1^H = \frac{2v_1}{\sigma}$$

**Шаг 4.** Если соблюдается условие  $v_1^H \geq 7$ , то нормированные параметры распределения определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mu_0^H &= -\ln(2\sqrt{2\pi}) - [v_1^H]^2 / 8 \\ \mu_1^H &= v_1^H / 4 \\ \mu_2^H &= -1/8 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

и осуществляется переход к шагу 6. Если указанное условие не соблюдается, то переходят к шагу 5.

**Шаг 5.** Вычисляются нормированные параметры распределения с помощью выражения

$$\mu_j^H = \sum_{i=0}^5 a_i^{(j)} [v_1^H]^i, j=0,1,2 \quad (2.3.4)$$

значения коэффициентов полинома  $a_i^{(j)}$  приводятся в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

<b>j</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>a<sub>0</sub></b>	0.78760454	-0.23350401*10 <sup>1</sup>	0.19935077
<b>a<sub>1</sub></b>	-0.25889486	0.88266373	-0.10402411
<b>a<sub>2</sub></b>	-0.31872153	0.99215448*10 <sup>-1</sup>	-0.7659968*10 <sup>-2</sup>
<b>a<sub>3</sub></b>	0.45243271*10 <sup>-1</sup>	-0.52450713*10 <sup>-1</sup>	0.64909123*10 <sup>-2</sup>
<b>a<sub>4</sub></b>	-0.27552103*10 <sup>-2</sup>	0.62824786*10 <sup>-2</sup>	-0.83410484*10 <sup>-3</sup>
<b>a<sub>5</sub></b>	0	-0.240757*10 <sup>-3</sup>	0.33025782*10 <sup>-4</sup>

**Шаг 6.** Определяются ненормированные значения параметров распределения

$$\begin{aligned}\mu_0^* &= \mu_0^H - \ln(\sigma) + \ln(2) \\ \mu_1^* &= \frac{2\mu_0^H}{\sigma} \\ \mu_2^* &= \frac{4\mu_2^H}{\sigma^2}\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

**Шаг 7.** Вычисляются значения параметров распределения, соответствующие исходному интервалу [a, b]:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \mu_0^* - \mu_1^* a + \mu_2^* a^2 \\ \mu_1 &= \mu_1^* - 2\mu_2^* a \\ \mu_2 &= \mu_2^*\end{aligned}\quad (2.3.6)$$

Рассмотрим пример использования методики для оценки параметров неусеченного распределения.

**Пример 1.** Пусть имеется  $N=12$  реализации случайной величины  $X$ :

$$\begin{array}{lll}x_1 = 1044.29853 & X_5 = 836.57545 & x_9 = 1297.06719 \\ x_2 = 1982.45718 & X_6 = 4750.78613 & x_{10} = 1658.10047 \\ x_3 = 1719.11262 & X_7 = 1472.99209 & x_{11} = 2157.29901 \\ x_4 = 2817.04650 & X_8 = 1235.21748 & x_{12} = 1860.30754\end{array}$$

Причем априорно известно, что нижняя граница интервала равна нулю.

Требуется:

а) найти аналитическое выражение плотности распределения случайной величины  $f(x)$ ;

б) построить оценку функции распределения  $F(x)$ .

Решение. Определим значения двух первых начальных моментов распределения  $\nu_1, \nu_2$  и величину среднеквадратического отклонения  $\sigma$ :

$$\nu_1 = 1900,18835; \nu_2 = 4698429,18750; \sigma = 1042,93504$$

Определим значение первого нормированного начального момента  $\nu_1^H = 3,64546$ .

С помощью выражений (2.3.4) определим значения нормированных параметров распределения:

$$\mu_0^H = -2.68633; \mu_1^H = 0.61469; \mu_2^H = -0.09324$$

по которым с помощью (2.3.5), (2.3.6) определим значения ненормированных параметров распределения:

$$\mu_0 = -8.916229724; \mu_1 = 0.001151079; \mu_2 = -0.000000338.$$

Оценка плотности распределения запишется в виде:

$$F(x) = \exp(-8.916229724 + 0.001151079x - 0.000000338x^2)$$

На рис. 2.1 сплошной линией показана оценка функции распределения, получаемая с помощью информационного метода. Ломаной линией показана эмпирическая функция распределения, построенная классическим способом.

Исходные данные для примера получены при помощи датчика случайных чисел, подчиняющегося распределению Релея с параметром  $\sigma = 1020$ . Заданная функция распределения показана на рисунке пунктирной линией.

Как видно из рисунка, наибольшее абсолютное отклонение оценки  $F(x)$  от заданной  $F_3(x)$  составляет 0,14 при  $x = 1500$ . Наибольшее абсолютное отклонение эмпирической функции распределения от заданной составляет 0,35 при  $x = 2157,29901$ .

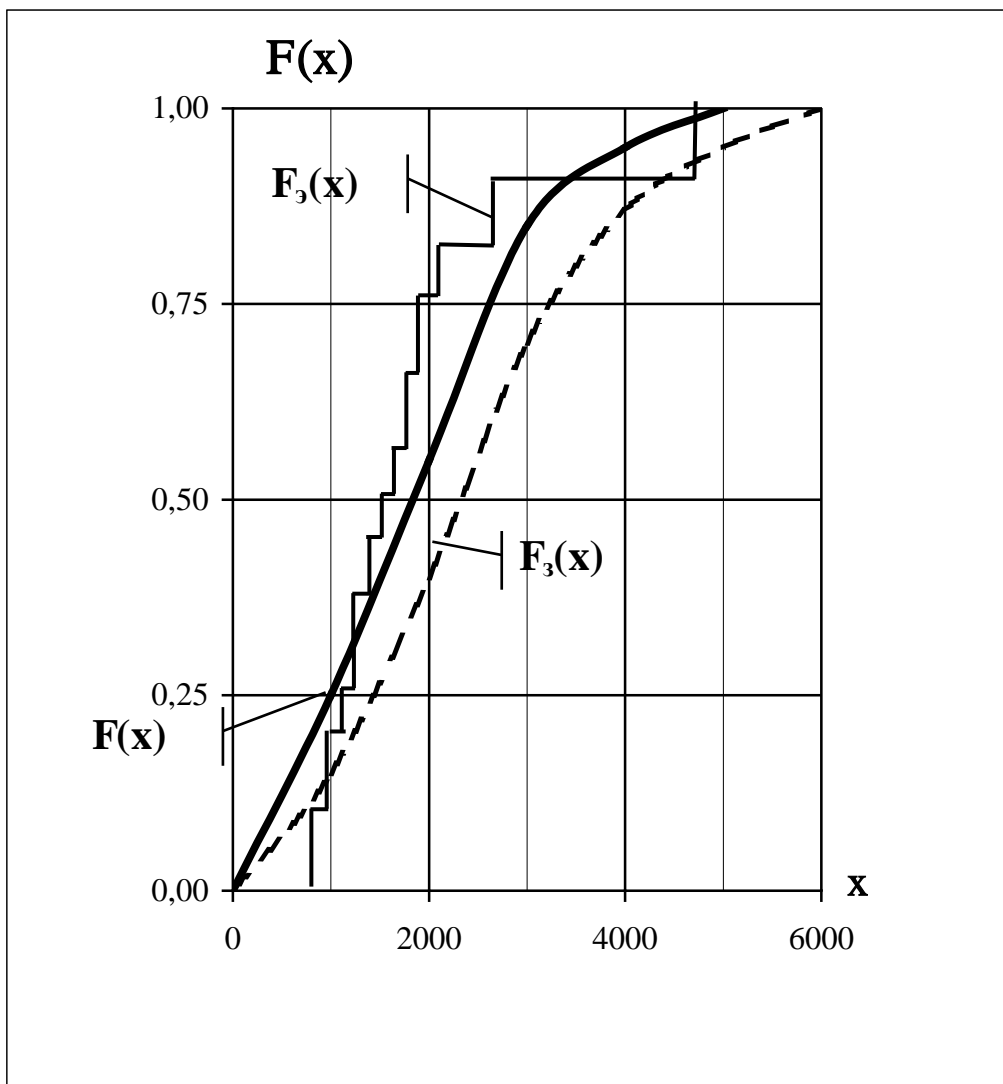


Рис. 2.1

### 2.3.2. Методика построения оценок усеченных законов распределения

Алгоритм оценки параметров усеченного распределения заключается в следующем.

Первый и второй шаг алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма определения параметров неусеченного распределения.

**Шаг 3.** Если соблюдаются условия

$$\left. \begin{array}{l} v_1 < 0,5(b+a) \\ v_2 \geq 3,5\sigma + a \end{array} \right\}$$

либо

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \geq 0,5(b+a) \\ (b - v_1) \geq 3,5\sigma \end{array} \right\}$$

то параметры распределения определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\mu_0 &= -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - v_1^2 / 2\sigma^2 \\ \mu_1 &= v_1 / 2\sigma^2 \\ \mu_2 &= -1/2\sigma^2\end{aligned}\quad (2.3.7)$$

Если же указанное условие не соблюдается, то значения  $v_1$  и  $\sigma$  пересчитываются в относительные величины по правилу

$$\begin{aligned}v_1^H &= \frac{14v_1}{b-a} \\ \sigma^H &= \frac{14\sigma}{b-a}\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

**Шаг 4.** С помощью таблицы 2.2, а также с помощью интерполяционного полинома Лагранжа четвертой степени

$$\mu_j^H(\varphi) = \sum_{i=0}^4 [\mu_j^H]^i \frac{(\hat{\varphi} - \varphi_0) \dots (\hat{\varphi} - \varphi_{i-1})(\hat{\varphi} - \varphi_{i+1}) \dots (\hat{\varphi} - \varphi_n)}{(\varphi - \varphi_0) \dots (\varphi - \varphi_{i-1})(\varphi - \varphi_{i+1}) \dots (\varphi - \varphi_n)}$$

определяются значения  $\mu_1^H$ ,  $\mu_2^H$  соответствующие значениям  $v_1^H$ ,  $\sigma^H$ .

Здесь в качестве  $\hat{\varphi}$  выступают либо значения  $v_1^H$ , либо  $\sigma^H$ , а в качестве  $\varphi_i$  ( $i=0,1,\dots$ ) те значения математического ожидания и среднеквадратического отклонения, для которых рассчитана таблица 2.2.

Таблица 2.2(a)

$\sigma^H$	$\nu_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
0,5		-2,0275	0,01365
1		3,14991	-1,65984
1,5		5,90479	-1,97136
2		8	-2
2,5		10	-2
3		12	-2
3,5		14	-2
4		16	-2
4,5		18	-2
5		20	-2
5,5		22	-2
0,5	6	24	-2
	6,5	26	-2
	7	28	-2
	7,5	30	-2
	8	32	-2
	8,5	34	-2
	9	36	-2
	9,5	38	-2
	10	40	-2
	10,5	42	-2
	11	44	-2
	11,5	46	-2
	12	48	-2
	12,5	50	-2
0,5	13	43,32561	-1,65984
	13,5	1,64249	0,01374

Таблица 2.2(b)

$\sigma^H$	$\nu_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	<i>1</i>	<i>-1,00879</i>	<i>-0,00219</i>
	<i>1,5</i>	<i>0,48945</i>	<i>-0,2668</i>
	<i>2</i>	<i>1,57495</i>	<i>-0,41496</i>
	<i>2,5</i>	<i>2,34474</i>	<i>-0,4732</i>
	<i>3</i>	<i>2,95239</i>	<i>-0,49284</i>
	<i>3,5</i>	<i>3,48819</i>	<i>-0,49844</i>
	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>-0,5</i>
	<i>4,5</i>	<i>4,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>-0,5</i>
<i>1</i>	<i>5,5</i>	<i>5,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>-0,5</i>
	<i>6,5</i>	<i>6,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>7</i>	<i>7</i>	<i>-0,5</i>
	<i>7,5</i>	<i>7,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>8</i>	<i>8</i>	<i>-0,5</i>
	<i>8,5</i>	<i>8,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>9</i>	<i>9</i>	<i>-0,5</i>
	<i>9,5</i>	<i>9,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>-0,5</i>
	<i>10,5</i>	<i>10,5</i>	<i>-0,5</i>
	<i>11</i>	<i>11</i>	<i>-0,5</i>
	<i>11,5</i>	<i>10,90483</i>	<i>-0,4732</i>
	<i>12</i>	<i>10,04393</i>	<i>-0,41496</i>
<i>1</i>	<i>12,5</i>	<i>6,98095</i>	<i>-0,2668</i>
	<i>13</i>	<i>0,94747</i>	<i>0,00218</i>



Таблица 2.2(с)

$\sigma^H$	$\nu_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	1,5	-0,67253	0,00097
	2	0,01662	-0,08248
	2,5	0,59821	-0,14675
	3	1,05013	-0,18452
	3,5	1,40839	-0,20446
	4	1,70658	-0,21441
	4,5	1,96862	-0,2191
	5	2,22222	-0,22222
	5,5	2,44444	-0,22222
1,5	6	2,66666	-0,22222
	6,5	2,88888	-0,22222
	7	3,11111	-0,22222
	7,5	3,33333	-0,22222
	8	3,77777	-0,22222
	8,5	4,0	-0,22222
	9	4,22222	-0,22222
	9,5	4,22222	-0,22222
	10	4,2969	-0,21441
	10,5	4,31649	-0,20446
	11	4,11642	-0,18452
	11,5	3,151079	-0,14675
1,5	12	2,29282	-0,08248
	12,5	0,64537	0,00096

Таблица 2.2(d)

$\sigma^H$	$\nu_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	2	-0,5	0
	2,5	-0,11146	-0,03518
	3	0,24473	-0,0667
	3,5	0,54152	-0,08908
	4	0,78748	-0,10374
	4,5	0,99416	-0,11286
	5	1,17239	-0,1183
	5,5	1,33102	-0,12146
	6	1,4762	-0,12321
	6,5	1,61281	-0,12414
2	7	1,75	-0,125
	7,5	1,86311	-0,12414
	8	1,97368	-0,1232
	8,5	2,06986	-0,12146
	9,5	2,16592	-0,11286
	10	2,11724	-0,10374
	10,5	1,95272	-0,08908
	11	1,62286	-0,0667
	11,5	1,09649	-0,03518
	12	0,5	0

Таблица 2.2(е)

$\sigma^H$	$v_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	2,5	-0,34999	-0,00307
	3	-0,2249	-0,0103
	3,5	-0,05	-0,03179
	4	0,3	-0,04991
	4,5	0,475	-0,0592
	5	0,625	-0,06601
	5,5	0,75	-0,06985
	6	0,875	-0,07381
	6,5	0,975	-0,07536
2	7	1,05	-0,07491
	7,5	1,13508	-0,07536
	8	1,19167	-0,0738
	8,5	1,20580	-0,06985
	9	1,22327	-0,06601
	9,5	1,1826	-0,0592
	10	1,09747	-0,04991
	10,5	0,94012	-0,03179
	11	0,51339	-0,0103
	11,5	0,43595	-0,00307

Таблица 2.2(г)

$\sigma^H$	$v_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	4	-0,47499	0,02282
	4,5	-0,39999	0,01928
4	5	-0,24999	0,00987
	5,5	-0,12499	0,00257
	6	0	-0,00419
	6,5	0	-0,0021
	7	-0,02031	0,00139
	7,5	-0,0186	0,00139
4	8	0,0588	-0,0021
	8,5	0,11732	-0,00419
	9	0,5303	0,00257
	9,5	-0,2076	0,00967
	10	-0,13984	0,01928

Таблица 2.2(ф)

$\sigma^H$	$v_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	3	-0,47499	-0,01546
	3,5	-0,14999	-0,00946
3	4	-0,01874	-0,01725
	4,5	0,15	-0,02772
	5	0,275	-0,03423
	5,5	0,3875	-0,03808
	6	0,48125	-0,04209
	6,5	0,56562	-0,04434
2	7	0,625	-0,04459
	7,5	0,6759	-0,04431
	8	0,69727	-0,04209
	8,5	0,70394	-0,03898
	9	0,68344	-0,03423
	9,5	0,62616	-0,02772
	10	0,50174	-0,01725
	10,5	0,41487	-0,00946
	11	0,04211	-0,01546

Таблица 2.2(г)

$\sigma^H$	$v_1^H$	$\mu_1^H$	$\mu_2^H$
	3,5	-0,44999	0,01763
	4	-0,2	-0,00015
	4,5	-0,09999	-0,00597
	5	0,0125	0,01134
	5,5	0,05	-0,012
3,5	6	0,1875	-0,0192
	6,5	0,25	-0,2065
	7	0,3	-0,214
	7,5	0,3282	-0,2065
	8	0,35009	-0,01919
	8,5	0,28599	-0,01199
	9	0,30502	0,01134
	9,5	0,26714	-0,00596
3,5	10	0,20419	-0,00014
	10,5	-0,04364	0,01762

**Шаг 5.** Определяются ненормированные значения  $\mu_1^*$  и  $\mu_2^*$  параметров распределения

$$\begin{aligned}\mu_1^* &= \frac{14\mu_1}{b-a} \\ \mu_2^* &= \frac{196\mu_2}{(b-a)^2}\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

**Шаг 6.** Определяется масштабирующий параметр

$$\mu_0^* = -\ln\left(\int_0^{b^*} \exp\left(\sum_{j=1}^2 \mu_j^* x^j\right) dx\right) \quad (2.3.10)$$

**Шаг 7.** С помощью выражений (2.3.6) определяются параметры распределения, соответствующие исходному интервалу  $[a, b]$ .

Описание методики закончим рассмотрением примера.

**Пример 2.** Пусть в результате опыта получено 10 реализации случайной величины:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.44856 & x_2 &= 1.36945 & x_3 &= 0.80314 & x_4 &= 1.58958 & x_5 &= 0.67373 \\ x_6 &= 0.58740 & x_7 &= 1.36845 & x_8 &= 0.55475 & x_9 &= 0.51220 & x_{10} &= 0.36568\end{aligned}$$

определенной на интервале  $[0; 2]$ .

Требуется:

а) найти аналитическое выражение плотности распределения случайной величины  $f(x)$ ;

б) построить оценку функции распределения  $F(x)$ .

Решение: По данным выборки определим значения двух первых начальных моментов распределения  $\nu_1, \nu_2$  и величину среднеквадратического отклонения  $\sigma$ :

$$\nu_1 = 0,82739 \quad \nu_2 = 0,86266 \quad \sigma = 0,44481$$

По формулам (2.8) определим нормированные значения математического ожидания и среднеквадратического отклонения:

$$\nu_1^H = 5.86172; \quad \sigma^H = 3.11366.$$

С помощью таблицы 2.2 определим значения нормированных параметров распределения, соответствующих полученному значению при следующих значениях  $\sigma^H$ :

$$\sigma_1^H = 1,5 \quad \sigma_2^H = 2 \quad \sigma_3^H = 2,5 \quad \sigma_4^H = 3 \quad \sigma_5^H = 3,5$$

Для этого, задаваясь поочередно перечисленными значениями  $\sigma_i^H (i=1,2,\dots,5)$  с помощью таблицы 2.2 определим значения  $\mu_1^H, \mu_2^H$ , соответствующие следующим значениям  $\nu_1^H$ :

$$\nu_{1.1}^H=4,5 \quad \nu_{1.2}^H=5 \quad \nu_{1.3}^H=5,5 \quad \nu_{1.4}^H=6 \quad \nu_{1.5}^H=6,5$$

Полученные значения  $\mu_1^H, \mu_2^H$ , занесем во второй, третий, четвертый, пятый и шестой столбцы таблиц 2.3 и 2.4.

С помощью этих таблиц, а также с помощью интерполяционного полинома Лагранжа четвертой степени, определим значения  $\mu_1^H, \mu_2^H$  при различных значениях  $\sigma_i^H (i = 1,2,\dots,5)$  и заданном значении  $\nu_1^H$ . Полученные значения представлены в седьмых столбцах таблиц 2.3 и 2.4.

Сведем значения  $\mu_1^H$  и  $\mu_2^H$ , соответствующие одному и тому же значению  $\nu_1^H$ , по различным  $\sigma_i^H$ , во второй, третьей, четвертой, пятой и шестой столбцы таблицы 2.5.

По этой таблице с помощью интерполяционного полинома Лагранжа четвертой степени определим значения параметров распределения, соответствующие полученному значению  $\sigma^H$ . Полученные значения  $\mu_1^H$  и  $\mu_2^H$  занесем в седьмой столбец таблицы 2.5.

С помощью формул (2.9) определим ненормированные значения  $\mu_1^*$  и  $\mu_2^*$ :

$$\mu_1^*=2,66133; \quad \mu_2^*=-1,72627.$$

С помощью формулы (2.10) определим масштабирующий параметр  $\mu_0^*$ :

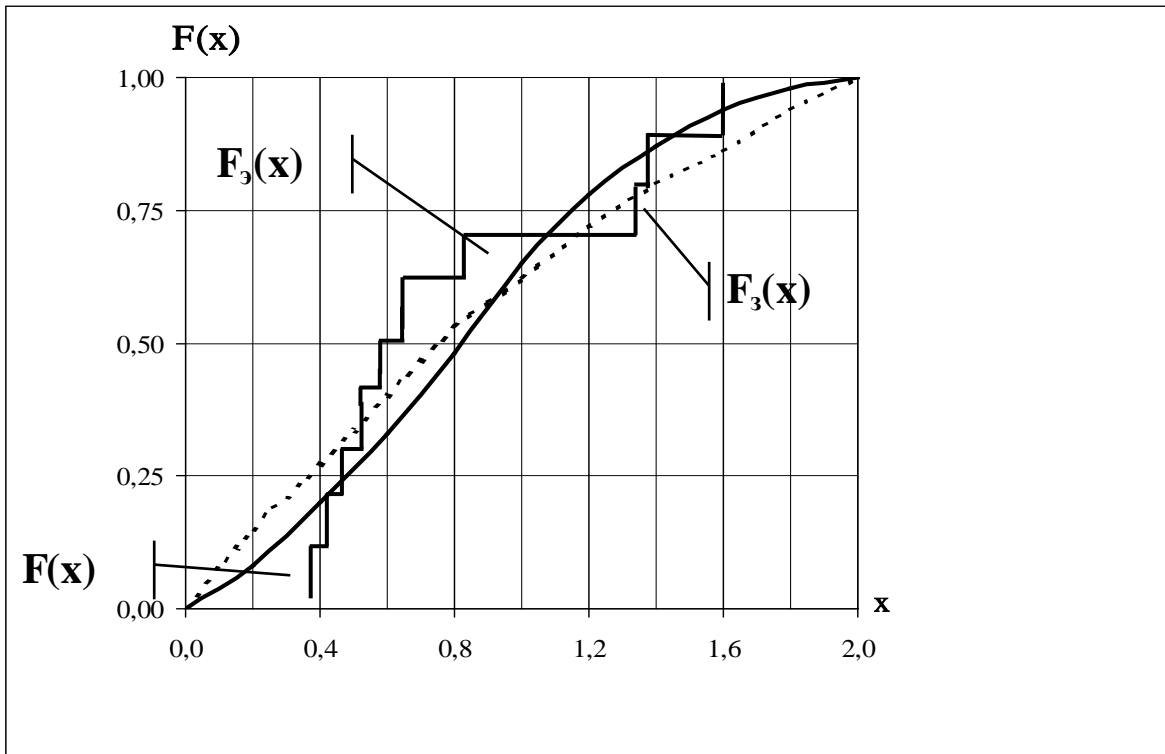
$$\mu_2^*=1,24388$$

В силу того, что по условию задачи нижняя граница интервала  $[a, b]$  совпадает с началом координат, значения ненормированных параметров  $\mu_j^* (j=0,1,2)$ , распределения совпадают с искомыми.

Оценка плотности распределения при этом запишется в виде:

$$f(x)=\exp(-1,24388+2,66133x-1,72627x^2).$$

На рисунке 2.2 сплошной линией показана оценка функции распределения, полученная с помощью информационного метода. Ломаной линией показана эмпирическая функция распределения. Исходные данные для примера получены с помощью датчика случайных чисел, подчиняющегося экспоненциальному распределению с параметрами  $\lambda=0,5$  и интервалом усечения  $[0; 2]$ . Заданная функция распределения показана на рисунке пунктирной линией. Как видно из рисунка наибольшее абсолютное отклонение оценки  $F(x)$  от заданной функции распределения  $F_3(x)$  составляет 0,09 при  $x=0.4$ . Наивысшее абсолютное отклонение эмпирической



функции распределения от заданной составляет 0,22 и достигается при  $x = 0,80314$ .

Рис. 2.2

Таблица 2.3.

$\sigma^H \backslash v_1^H$	4.5	5	5.5	6	6.5	$v_1^H$	
3.5	-0.0999	0.0125	0.05	0.1875	0.25	0.14310	
3	0.15	0.275	0.3875	0.48125	0.56562	0.45694	
2.5	0.475	0.625	0.75	0.875	0.975	0.84094	
2	0.99416	1.17239	1.33102	1.4762	1.6128	1.43709	
1.5	1.96886	2	2.22222	2.44444	2.66666	2.88888	2.60460

Таблица 2.4.

$\sigma^H \backslash v_1^H$	4.5	5	5.5	6	6.5	$v_1^H$
3.5	-	-	-	-	-	-
3	0.00597	0.01134	-0.012	-0.0192	0.02065	0.01682
2.5	-	-	-	-	-	-
2	0.02772	0.03423	0.03898	-0.04209	0.04434	0.04136
1.5	-	-	-	-	-	-
1	-0.0592	0.06601	0.06985	-0.07381	0.07536	0.07274

	-	-	-	-	-	-
<b>2</b>	0.11286	-0.1183	0.12146	-0.12321	0.12414	0.12282
	-	-	-	-	-	-
<b>1.5</b>	0.21910	0.22222	0.22222	-0.22222	0.22222	0.22214

Таблица 2.5.

$\sigma^H$	<b>3.5</b>	<b>3</b>	<b>2.5</b>	<b>2</b>	<b>1.5</b>	$\sigma^H$
$\mu_1^H$	0.14310	0.45694	0.84094	1.43709	2.60460	0.38019
	-	-	-	-	-	-
$\mu_2^H$	0.01682	0.04136	0.07274	-0.12282	0.22214	0.03523

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная идея метода прямоугольных вкладов?
2. Условия применимости метода прямоугольных вкладов.
3. В чем отличие метода уменьшения неопределенности от метода прямоугольных вкладов?
4. Почему в качестве априорной компоненты метода прямоугольных вкладов целесообразно использовать равномерное распределение?
5. Преимущества и недостатки метода сжатия области существования интегральных законов распределения?

## Лабораторная работа №3

Определение показателей надежности по результатам испытаний и эксплуатации изделий

**Цель работы:** изучить методы построения основных показателей надежности изделий на основе экспериментальных данных. Разработать программный комплекс обработки статистических данных по отказам изделий в процессе испытаний на надежность или в процессе их эксплуатации.

### Программа работы

Выполнение данной лабораторной работы включает в себя следующие этапы:

1. Изучение методики определения показателей надежности по экспериментальным данным.
2. Ввод в программу выборки  $t_k$ ,  $k = \overline{1, N}$  и ее сортировка по возрастанию. Выборка в индивидуальном варианте читается слева направо и сверху вниз.
3. Выбор величины  $n$  и интервалов  $\Delta t_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .
4. Разработка и программирование алгоритма определения значений  $\Delta r_i$  и  $r_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .
5. Разработка и программирование алгоритма вычисления показателей надежности по формулам (2), (4), (5), (7).
6. Программирование процедуры контроля правильности вычислений с использованием выражения (6).
7. Вывод результатов расчета осуществлять в виде таблицы:

Интервалы	Кол-во отказов	Интенсивность отказов	Плотность распределения	Функция надежности	Контроль
$(t_i, t_{i+1})$	$\Delta r_i$	$\lambda_i^*$	$f_i^*$	$p_i^*$	$\lambda_i^* p_i^* - f_i^* = 0$

Средняя наработка на отказ = ... час.

8. Привести расчеты показателей надежности для трех вариантов значений  $n$  и  $\Delta t_i$ ,  $i = \overline{(0, n-1)}$ .

### Краткие сведения из теории

Пусть под наблюдением в процессе испытаний или эксплуатации находилось  $N$  ( $N=100$ ) однотипных изделий, работающих до первого отказа. Обозначим через  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{N-1}, t_N$  значения моментов времени выхода из строя всех рассматриваемых изделий. Разделим весь диапазон времени безотказной работы всех  $N$  изделий на  $n$  интервалов времени:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = \overline{(0, n-1)}. \quad (1)$$

При этом  $t_0=0$ ,  $t_n = \max_{1 \leq k \leq N} t_k$ .

Определим количество отказов  $\Delta r_i$  изделий, приходящихся на каждый  $i$ -ый интервал времени. Статистическая оценка интенсивности отказов, соответствующая каждому  $i$ -му интервалу времени вычисляется по формуле:

$$\lambda_i^* = \frac{\Delta r_i}{(N - r_{i-1}) \Delta t_i}, \quad i = \overline{(0, n-1)}. \quad (2)$$

Общее число отказов наблюдаемых изделий в интервале времени  $(0, t_{i-1})$  вычисляется с помощью соотношения вида:

$$r_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta r_j. \quad (3)$$

Статистическая оценка плотности распределения отказов определяется как

$$f_i^* = \frac{\Delta r_i}{N \Delta t_i}, \quad i = \overline{(0, n-1)}. \quad (4)$$

Статистическая оценка функции надежности изделия вычисляется как

$$p_i^* = 1 - (r_i / N), \quad i = \overline{(0, n-1)}, \quad (5)$$

где  $r_i = \sum_{j=1}^i \Delta r_j$  - число объектов, отказавших в интервале времени  $(0, t_i)$ .

Для проверки правильности определения оценок показателей надежности используется связь между показателями  $\lambda(t)$ ,  $p(t)$  и  $f(t)$  вида:

$$\lambda_i^* = \frac{f_i^*}{p_i^*}, \quad i = \overline{(0, n-1)}. \quad (6)$$

На практике для удобства интерпретации экспериментальные значения показателей надежности  $\lambda(t)$ ,  $p(t)$  и  $f(t)$  представляются в форме гистограмм.

В технической документации на изделия часто используется такой показатель как средняя наработка на отказ. Оценка такого показателя имеет вид:



$$m_t^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k . \quad (7)$$

### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Блок-схема алгоритма определения показателей надежности.
3. Графики четырёх функций  $\Delta r_i(t_i)$ ,  $\lambda^*_i(t_i)$ ,  $f^*_i(t_i)$ ,  $p^*_i(t_i)$ . На каждом графике должно быть по 3 кривых – для трёх вариантов величин ( $n=50; 60; 70$ ).
4. Сделать следующие выводы:
  - каково влияние величины  $n$  на значения показателей надежности;
  - дать заключение о виде закона распределения времени безотказной работы (равномерный, показательный или экспоненциальный).

## Лабораторная работа №4

Расчет надежности системы с независимыми элементами,  
работающими до первого отказа

**Цель работы:** Изучить методы расчета функции надежности системы с учетом разнообразных связей ее элементов. Получить навыки декомпозиции произвольных структур анализируемых систем и алгоритмизации задач расчета их надежности. Разработать программный комплекс расчета надежности сложных систем с независимыми элементами, работающими до первого отказа.

### Программа работы

Выполнение данной лабораторной работы включает в себя 2 раздела (1 - анализ последовательно и параллельного соединения элементов; 2 - определение надежности заданного варианта схемы), состоящих из следующих этапов:

1. Изучение методики расчета надежности систем.
2. Разработка процедур расчета показателей надежности (1)-(3) и (4)-(6) для задаваемых в диалоговом режиме значений  $n$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (см. табл.П1), в приведенной таблице каждый столбец соответствует выбранному варианту (1-4), в графе « $n$ » расположены 3 возможных значения  $n$ . Значения  $\lambda_i$ , для выбранного количества элементов  $n$  представлены в табл.П1 в столбце, в нижней части которого расположен номер индивидуального варианта.

**Примечание:** при вычислении показателя (6) одним из численных методов интегрирования (метод прямоугольников, метод трапеций и т.д.) необходимо выбрать величину верхнего предела в формуле (6) равной достаточно большому числу  $M$ , при котором  $p_C(M) \approx 0$ .

3. Задаться значением  $\tau$  (например,  $\tau = 3T_C$ , с помощью выражению (3) или (6)) и рассчитать величины  $T_C$ ,  $p_C(t)$ ,  $q_C(t)$  для последовательного и параллельного соединения элементов.
4. Вывод результатов расчета осуществлять в виде таблицы:

	$n = \dots$	$T_{C, \text{посл}} = \dots$	$T_{C, \text{пар}} = \dots$
$t$ ,	Последовательное соединение	Параллельное соединение	

час	$p(t)$	$q(t)$	$p(t)$	$q(t)$

и в графической форме (например, с помощью средств Microsoft Office).

5. Привести расчеты для 3 вариантов числа элементов  $n$  (см. табл.П1) и **сделать количественное заключение**: какой из видов соединений имеет более высокую надежность.
6. Для заданного индивидуального варианта структуры системы вывести формулы для вычисления функций  $p_c(t)$ ,  $q_c(t)$  и  $T_c$  с диалоговым вводом значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . (значения интенсивностей отказов выбираются из табл.П1 согласно графе «**Вариант**»).

**Примечание:** при разработке программы использовать процедуры из п.2.

7. Провести расчеты показателей надежности системы для 3-х вариантов значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , в том числе для варианта  $\lambda_i = \lambda$ ,  $i = (\overline{1, n})$  (см. табл.П1), соответствующему случаю использования равнонадежных элементов (**см. примечание**). Вывод результатов проводить в виде следующей таблицы

$T_c = \dots$

$t$ , час	$p_1(t)$	$q_1(t)$	$p_2(t)$	$q_2(t)$	...	$q_n(t)$	$p_c(t)$	$q_c(t)$

8. Сделать **количественно обоснованное заключение** по следующим вопросам:
  - а) как влияет равнонадежность элементов на общую надежность системы?
  - б) какие элементы системы являются критическими с точки зрения ее надежности?

Примечание: каким образом выбирать 3 различных варианта значений  $\lambda_i$ ,  $i = (\overline{1, n})$ ? Например, номер Вашего индивидуального варианта – 8. Тогда в качестве первого варианта используйте значения  $\lambda_i$ , приведенных в столбце №2 (см. табл.П1), в качестве второго варианта используйте равнонадежные значения  $\lambda_i = \lambda$ , взятых из пересечения столбца №2 со строкой « $\lambda$ ». В качестве третьего варианта используйте значения  $\lambda_i$ , расположенных справа от Вашего столбца (т.е. столбца №3). Соответственно, если номер Вашего индивидуального варианта 16, 17, 18, 19 или 20, то в качестве третьего варианта значений  $\lambda_i$  Вы должны использовать столбец №1.

## Краткие сведения из теории

Основной задачей теории надежности является определение надежности системы по надежности составляющих ее элементов.

При расчете строится структура надежности рассматриваемой системы, которая относится к одному из трех основных видов:

- 1) последовательное соединение независимо работающих элементов;
- 2) параллельное соединение независимо работающих элементов;
- 3) смешанное соединение элементов.

Пусть система состоит из  $n$  элементов, для которых заданными являются функции надежности  $p_i(t)$  и отказа  $q_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Требуется определить вид функции надежности  $p_C(t)$  исследуемой системы и вычислить ее значения при  $t \in [0, \tau]$ , а также определить среднее время безотказной работы.

При последовательном соединении элементов, приведенном на рис.1, отказ одного элемента приводит к отказу всей системы.

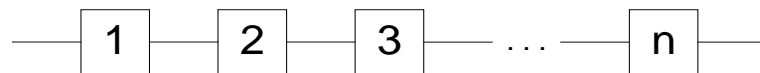


Рис.1. Последовательное соединение элементов.

Функция надежности такой системы вычисляется как:

$$p_C(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_n(t), \quad (1)$$

а функция отказа:

$$q_C(t) = 1 - [(1 - q_1(t))(1 - q_2(t))\dots(1 - q_n(t))]. \quad (2)$$

В случае показательного закона надежности элементов имеем, что

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i = \text{Const}$  - интенсивность отказов  $i$ -го элемента. Из выражения (1) следует, что:

$$p_C(t) = e^{-\lambda_C t},$$

где  $\lambda_C$  - интенсивность отказов системы, которая вычисляется как

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Среднее время безотказной работы такой системы будет равно:

$$T_c = 1/\lambda_c. \quad (3)$$

Параллельное соединение элементов (см. рис.2) выбирается в том случае, если отказ системы возникает при отказе всех ее элементов. При этом функция отказов системы определяется как

$$q_c(t) = q_1(t)q_2(t)\dots q_n(t) \quad (4)$$

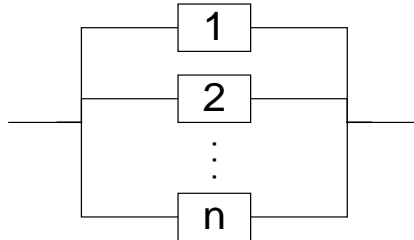


Рис.2. Параллельное соединение элементов.

Функция надежности такой системы будет равна:

$$p_c(t) = 1 - [(1-p_1(t))(1-p_2(t))\dots(1-p_n(t))]. \quad (5)$$

В случае показательного закона надежности имеем, что

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad q_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Среднее время безотказной работы системы вычисляется по формуле:

$$T_c = \int_0^{\infty} p_c(t) dt. \quad (6)$$

При смешанном соединении элементов предполагается, что в системе можно выделить участки последовательного и параллельного соединения элементов.

Вид функции надежности  $p_c(t)$  строится путем декомпозиции структуры системы на такие участки и использования для них выражений вида (1), (2) и (4), (5).

Приведем пример построения функций  $p_c(t)$  и  $q_c(t)$  для структуры системы приведенной на рис.3.

Разобьем систему на 3 подсистемы (блока) I, II, III. Блоки I и II соединены параллельно. Поэтому для них согласно (4) и (5) имеем, что:

$$q_{I,II} = q_I q_{II}; \quad p_{I,II} = 1 - (1-p_I)(1-p_{II}). \quad (7)$$

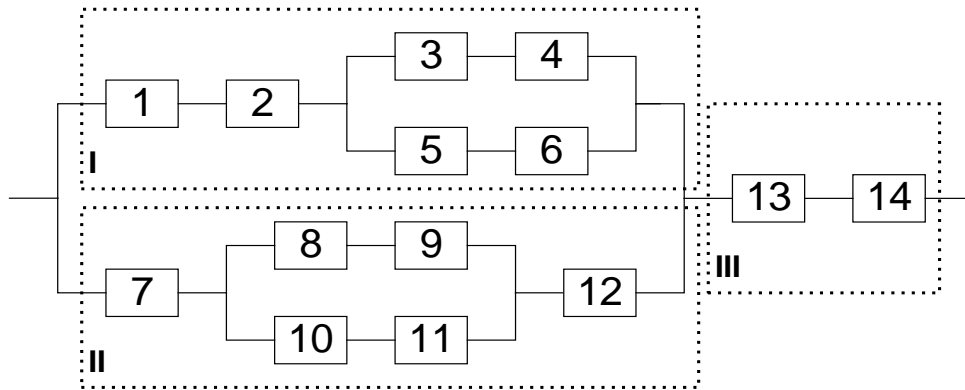


Рис.3. Пример смешанного соединения.

Здесь и ниже параметр  $t$  опущен, а  $q_I, q_{II}, r_I, r_{II}$  означают соответствующие функции для блоков I и II. Эти блоки соединены с блоком III последовательно. используя (1), (2), (7) имеем, что:

$$r_C = r_{I,II,III} = r_{I,II} r_{III} = [1 - (1 - r_I)(1 - r_{II})] r_{III};$$

$$q_C = q_{I,II,III} = 1 - r_{I,II,III} = 1 - (1 - q_I q_{II})(1 - q_{III}),$$
(8)

где  $r_{III}, q_{III}$  - показатели надежности блока III.

Для построения функций  $r_C(t)$  и  $q_C(t)$  требуется определить функции надежности и отказов блоков I, II, III.

Блок I состоит из 6 элементов (в том числе элементов 1, 2 и подсистемы, состоящей из элементов 3, 4, 5 и 6). Эти элементы и выделенная подсистема соединены последовательным образом. Поэтому получаем, что:

$$r_I = r_1 r_2 r_{3456};$$

$$q_I = 1 - r_I = 1 - (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_{3456}).$$
(9)

Элементы 3, 4, 5, 6 соединены параллельно. Следовательно

$$r_{3456} = 1 - (1 - r_{34})(1 - r_{56});$$

$$q_{3456} = q_{34} q_{56}.$$
(10)

Из рис.3 следует, что элементы 3 и 4, а также 5 и 6 соединены после-

довательно, поэтому

$$\begin{aligned}p_{34} &= p_3 p_4; \quad p_{56} = p_5 p_6; \\ q_{34} &= 1 - (1 - q_3)(1 - q_4); \\ q_{56} &= 1 - (1 - q_5)(1 - q_6).\end{aligned}\tag{11}$$

Аналогичным образом для блока II запишем:

$$\begin{aligned}p_{II} &= p_7 p_{891011} p_{12}; \\ q_{II} &= 1 - (1 - q_7)(1 - q_{891011})(1 - q_{12}); \\ q_{891011} &= q_{89} q_{1011}; \\ p_{891011} &= 1 - (1 - p_{89})(1 - p_{1011}); \\ p_{89} &= p_8 p_9; \quad p_{1011} = p_{10} p_{11}; \\ q_{89} &= 1 - (1 - q_8)(1 - q_9); \quad q_{1011} = 1 - (1 - q_{10})(1 - q_{11}).\end{aligned}\tag{12}$$

Расчетные соотношения для блока III имеют вид:

$$\begin{aligned}p_{III} &= p_{13} p_{14}; \\ q_{III} &= 1 - (1 - q_{13})(1 - q_{14}).\end{aligned}\tag{13}$$

Таким образом, если заданы функции надежности  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_{14}(t)$  и отказов  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_{14}(t)$  для каждого элемента, то надежность системы, структура которой представлена на рис.3, вычисляется по соотношениям (8)-(13).

### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Блок-схема алгоритма анализа надежности последовательного и параллельного соединения.
3. Семейство графиков  $p(t)$  (3 шт.) для последовательного соединения.
4. Семейство графиков  $q(t)$  (3 шт.) для последовательного соединения.
5. Семейство графиков  $p(t)$  (3 шт.) для параллельного соединения.
6. Семейство графиков  $q(t)$  (3 шт.) для параллельного соединения.
7. Выводы (см раздел 3, п.8).
8. Индивидуальный вариант схемы соединения элементов, приведенный к виду, удобному для декомпозиции.
9. Конечная декомпозиция схемы соединения элементов согласно соотношениям (8)-(13).
10. Семейство графиков  $p_C(t)$  (3 шт.).

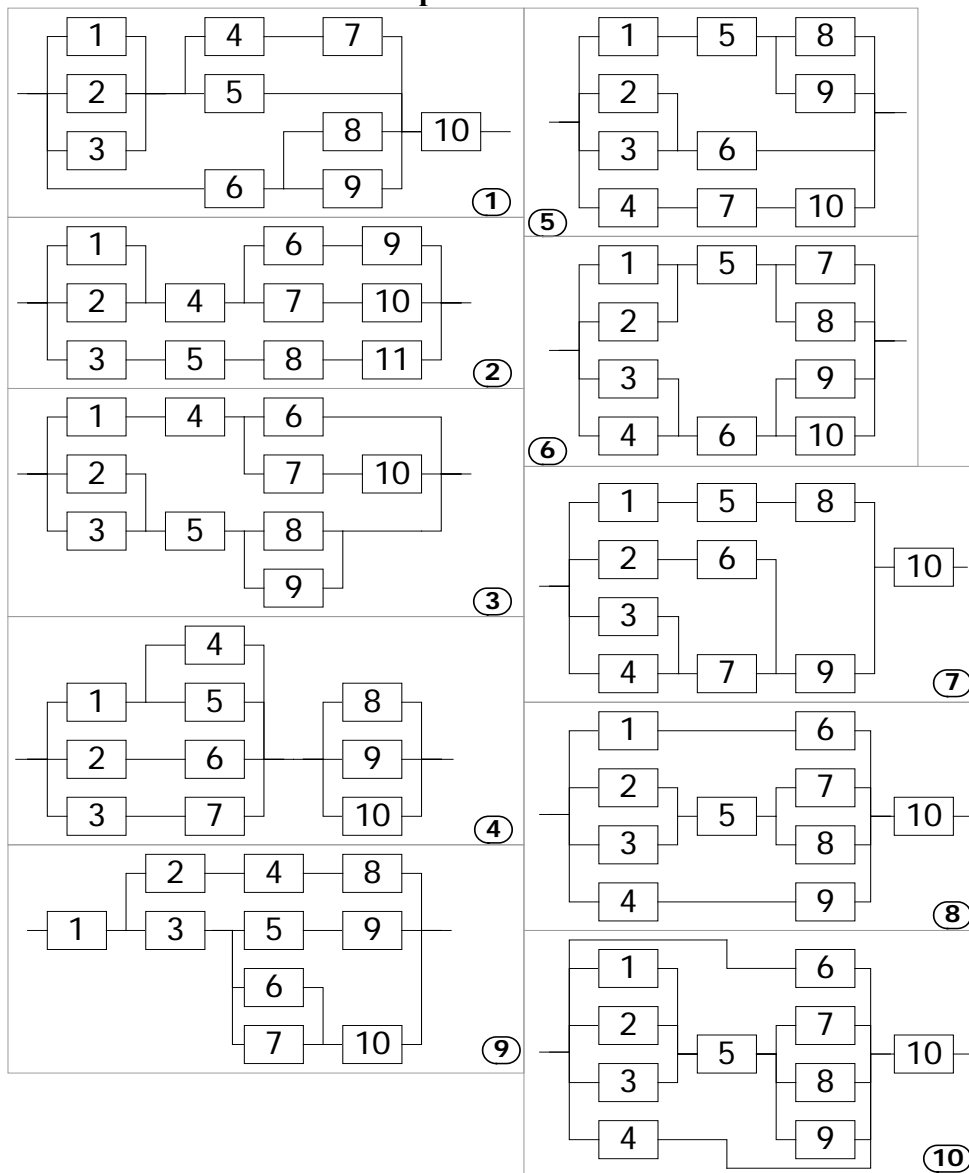
11. Семейство графиков  $q_C(t)$  (3 шт.).
12. Вычисленное значение наработки на отказ  $T_C$  (3 шт.).
13. Количественно-обоснованное заключение (см. п.8).



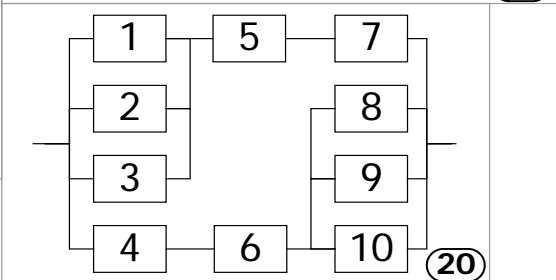
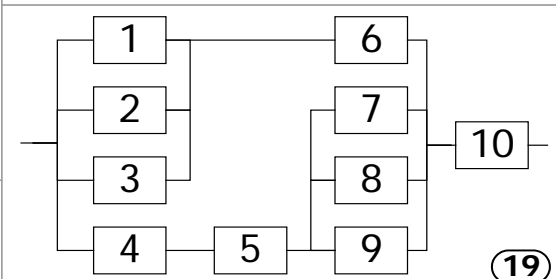
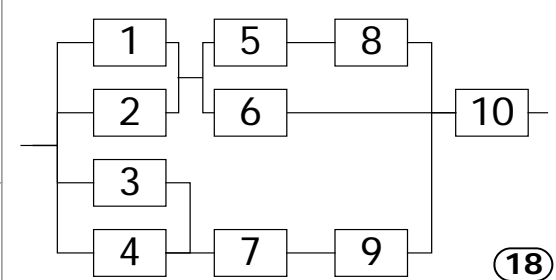
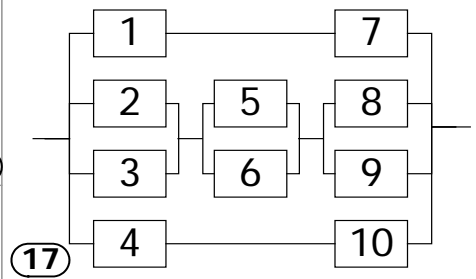
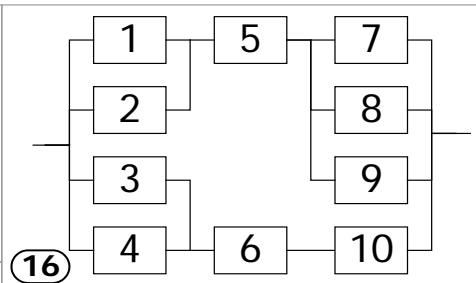
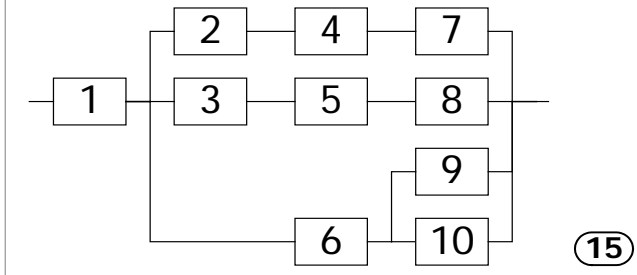
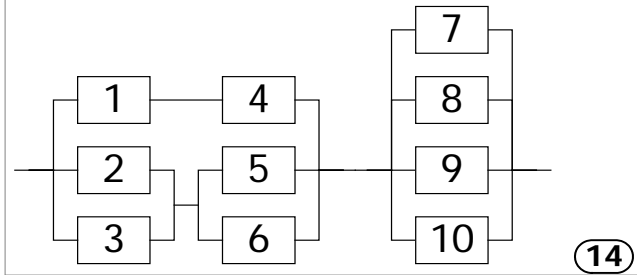
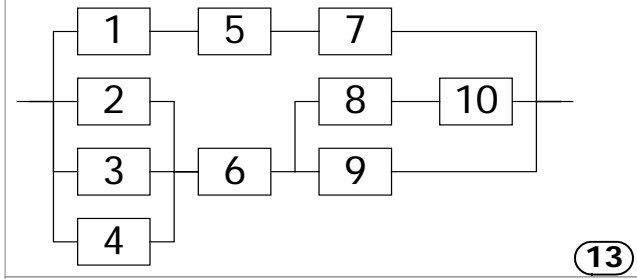
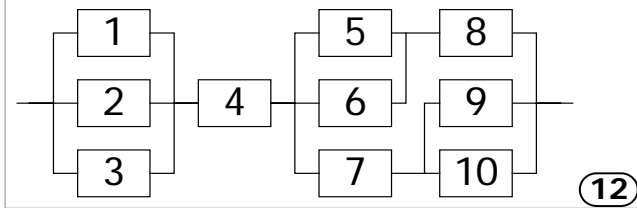
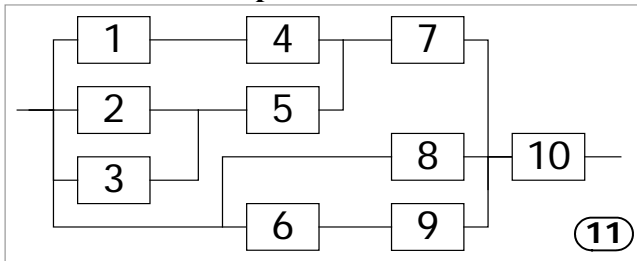
Табл.ПІ. Интенсивность отказов элементов

i	$\lambda_i, \text{час}^{-1}$			
	1	2	3	4
1	1/100	1/200	1/500	1/200
2	1/200	1/300	1/200	1/100
3	1/300	1/400	1/200	1/200
4	1/400	1/400	1/400	1/300
5	1/500	1/500	1/300	1/500
6	1/300	1/200	1/100	1/100
7	1/300	1/300	1/200	1/400
8	1/100	1/100	1/500	1/300
9	1/200	1/200	1/300	1/500
10	1/100	1/300	1/200	1/400
11	1/400	1/100	1/300	1/400
<b>n</b>	<b>5,7,10</b>	<b>6,8,9</b>	<b>4,7,11</b>	<b>5,8,10</b>
<b><math>\lambda</math></b>	<b>1/400</b>	<b>1/200</b>	<b>1/300</b>	<b>1/500</b>
<b>Вариант</b>	<b>1-5</b>	<b>6-10</b>	<b>11-15</b>	<b>16-20</b>

Варианты 1-10



Варианты 11-20



## Лабораторная работа №5

Применение расчетно-экспериментального метода оценки показателей надежности изделий по результатам кратковременных испытаний

**Цель работы:** изучение методов моделирования законов распределения показателей надежности (ПН); Изучение расчётно-экспериментального метода (РЭМ) оценки показателей надежности изделий при наличии неполной статистики; Разработка программного обеспечения обработки неполных статистических данных по отказам изделия с применением РЭМ.

### Программа работы:

В случаях, когда применение экспериментального метода по причинам больших материальных и временных затрат затруднительно, используют РЭМ для оценки комплексных ПН, таких как наработка на отказ, коэффициент готовности и т.п.

При использовании метода статистического моделирования определение функции распределения ПН осуществляется при многократном моделировании на ЭВМ процесса испытаний образца и обработки статистических данных.

Конкретизируем этот метод применительно к оценке наработки на отказ аппаратуры без резервирования (т.е. все блоки аппаратуры соединены последовательно). Требуемым значением ПН является  $T_{\text{ТРЕБ}}$ .

Рассмотрим основные соотношения, справедливые для ПН, распределенного по показательному закону:

$$T = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right]^{-1}; \quad T_{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{\Sigma,i}; \quad T_i = \begin{cases} \frac{T_{\Sigma,i}}{r_i}, & r_i > 0 \\ 1,44 \cdot T_{\Sigma,i}, & r_i \neq 0 \end{cases}; \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $T$  – средняя наработка на отказ всего изделия;  $T_i$  – средняя наработка на отказ  $i$ -го блока;  $r_i$  – количество зафиксированных за период испытаний отказов  $i$ -го блока изделия;  $T_{\Sigma,i}$  – наработка  $i$ -го блока изделия за пе-

риод испытаний;  $T_{\Sigma}$  – общая наработка изделия;  $n$  – количество блоков изделия.

Будем считать, что по результатам проведенных испытаний аппаратуры известны следующие значения:  $r_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $T_{\Sigma, i}$ .

Методика включает в себя алгоритм построения границ доверительной области  $W(T)$  (см. рис.1) с помощью статистического моделирования отказов аппаратуры, определение границ доверительного интервала и применение приведенного на рис.2 решающего правила. Точечная оценка ПН  $T_j$  с вероятностью, равной  $\gamma$ , находится в интервале  $[T_A^{(j)}, T_B^{(j)}]$ .

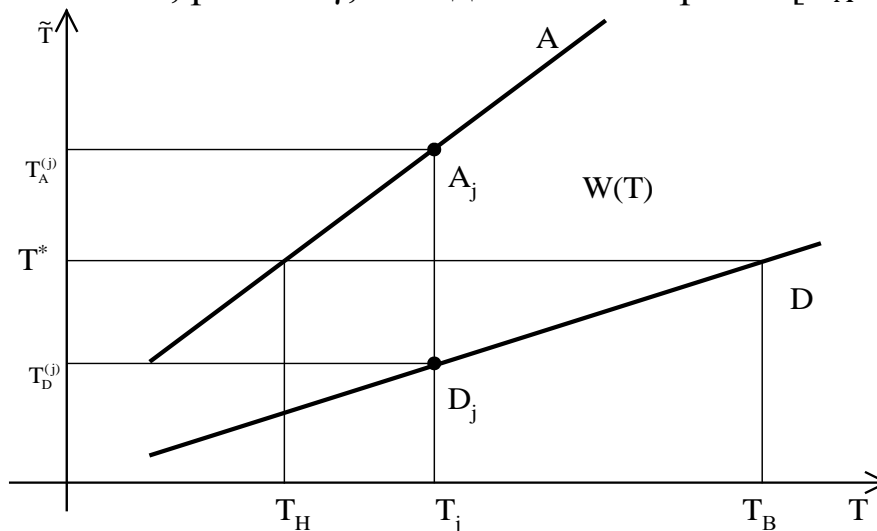


Рис.1. Построение доверительной области  $W(T)$ .



Рис.2. Решающее правило принятия решения.

### 3. Алгоритм реализации РЭМ

Рассмотрим алгоритм статистического моделирования отказов аппаратуры за фиксированный период: сдвигка пунктов

1. Фиксируем начальное значение номера статистического эксперимента  $j=0$ .
2. Проверка условия  $j>0$ . При его выполнении осуществляем переход к п.3. В противном случае полагаем  $T_{\Sigma, 0}=T$  (значение  $T$  вычисляется с помощью выражения (1)) и переходим к п.14.

3. Фиксируем  $i=1$ .
4. Проверка условия  $r_i=0$ . При его выполнении принимаем  $T_{ij}=T_i$  и переходим к п.9, в противном случае переход к п.5.
5. Фиксируем  $s=1$ .
6. Генерируем с помощью датчика псевдослучайных чисел случайную величину  $\xi_s$ , распределенную по равномерному закону в интервале  $[0,1)$ .
7. Проверка условия  $s < r_i$ . При его выполнении полагаем  $s=s+1$  и осуществляем возврат к п.6, в противном случае переход к п.8.
8. Вычисляем реализацию случайной величины наработки  $i$ -го блока изделия на отказ, распределенной по закону  $\chi^2$  с параметром  $T_i$ :

$$T_{ij} = - \left[ \sum_{s=1}^{r_i} \ln \xi_s \right]^{-1} T_i. \quad (2)$$

9. Проверка условия  $i < n$ . При выполнении этого условия полагаем  $i=i+1$  и переходим к п.4, в противном случае переходим к п.10.
10. На основании соотношения (1) вычисляем значение наработки на отказ изделия в целом, используя выражение (2):

$$T_{\Sigma,j} = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{ij}} \right]^{-1}.$$

11. Запоминаем вычисленное значение  $T_{\Sigma,j}$  в массиве.
12. Проверка условия  $(j \text{ MOD } 100) \neq 0$  (операция MOD – вычисление остатка от деления). Если условие выполняется, то переход к п.14, в противном случае вычисляем точность моделирования с помощью следующего выражения:

$$\varepsilon = t_\gamma \sqrt{\left[ \left( \sum_{k=1}^j T_{\Sigma,k} \right)^{-2} \sum_{k=1}^j T_{\Sigma,k}^2 - \frac{1}{j} \right] \frac{j}{j-1}},$$

где величина  $t_\gamma$  для заданной доверительной вероятности  $\gamma$  определяется из табл.1.

13. Проверка условия  $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{зад}}$ , где  $\varepsilon_{\text{зад}}$  – заданная точность моделирования ( $\varepsilon_{\text{зад}}=0.001; 0.0001$ ). При выполнении условия переход к п.15.
14. Вычисляем  $j=j+1$  и возвращаемся к п.3.
15. Запоминаем количество проведенных опытов  $m=j$ .

16. Из величин  $T_{\Sigma,j}, j = \overline{0, m}$  формируем вариационный ряд, располагая их в порядке возрастания.
17. Вычисляем вероятности определения верхней и нижней границы интервальной оценки с помощью выражений:

$$\gamma_1 = \frac{1-\gamma}{2}; \gamma_2 = \frac{1+\gamma}{2}.$$

18. Определяем верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала как квантили распределения  $\{T_{\Sigma,j}\}$  при вероятностях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (это такие элементы вариационного ряда, номера которых наиболее близки к значениям  $m\cdot\gamma_1$  и  $m\cdot\gamma_2$ ):

$$T_H = T_{\Sigma, m\gamma_1}; T_B = T_{\Sigma, m\gamma_2}. \quad (7)$$

19. На основании вычисленной интервальной оценки и требуемого значения ПН ( $T_{\text{ТРЕБ}}$ ) применяем решающее правило (см. рис.2).
20. Таблица 1. Значение величины  $t_\gamma$ .

$\gamma$	$t_\gamma$	$\gamma$		$t_\gamma$	$\gamma$	$t_\gamma$
0.800	1.282	0.950		2.960	0.990	2.580
0.900	1.645	0.980		2.330	0.999	3.290

#### 4. Порядок выполнения работы

Исходные данные ( $r_i, T_{\Sigma,i}, n, T_{\text{ТРЕБ}}, \gamma$ ) выбираются согласно индивидуального варианта (величины  $T$  и  $T_i$ , необходимые для моделирования, вычисляются согласно соотношениям (1)). В каждом варианте представлено 3 набора данных (т.е. на испытания было поставлено 3 комплекта однотипного изделия). Для каждого из комплектов необходимо применить алгоритм РЭМ (пп.1-19) и решающее правило (см. рис.2) согласно заданных значений требуемого ПН.

Рекомендация: для хранения выборки моделирования и построения вариационного ряда  $T_{\Sigma,j}$  используйте достаточно объемный массив (порядка 300-400 тыс. элементов).

#### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Алгоритм реализации РЭМ.
3. Номер и содержание индивидуального варианта.

Далее для каждого из заданных комплектов:

4. Вычисленное с помощью выражений (1) значение средней наработки и наработки на отказ изделия.
5. График, содержащий полученный вариационный ряд.
6. График, отражающий зависимость точности моделирования  $\varepsilon$  от объема выборки (т.е. зависимость  $\varepsilon(j)$ ).
7. Полученный интервал распределения точечной оценки ПН  $[T_H, T_B]$ .
8. Результат моделирования, выраженный в использовании решающего правила (см. рис.2) для заданных значений  $T_{ТРЕБ}$ .

## Лабораторная работа №6

### Прогнозирование оценок показателей надежности

**Цель работы:** изучение метода наименьших квадратов для построения прогноза оценки показателей надежности (ПН), полученных с помощью РЭМ; Разработка программного обеспечения обработки результатов РЭМ с целью прогнозирования оценок ПН.

### Программа работы:

Рассмотрим задачу экстраполяции результатов оценки комплексных ПН, полученных с помощью РЭМ, с целью построения прогноза для оценки характера проведения испытаний для изделия в целом. Для применения методики необходимо использовать оценки ПН, полученные при испытании  $N_k$  комплектов (в нашем случае остановимся на трёх комплектах, рассмотренных в лаб.р.№3):

$$\{T^{(i)}, T_H^{(i)}, T_B^{(i)}\}, i = \overline{1, N_k}, \quad (1)$$

где значения  $(T_H^{(i)}, T_B^{(i)})$ ,  $i = \overline{1, N_k}$  являются оценками нижней и верхней границ доверительного интервала (см. рис.2 лаб.р.№3);  $T^{(i)}$  – наработка на отказ  $i$ -го комплекта, определяемая из соотношений, рассмотренных в лаб.р.№3).

Для построения прогноза необходимо линеаризовать результаты моделирования, воспользовавшись методом наименьших квадратов для нахождения коэффициентов линейных функций вида:

$$\tilde{T}_H(T) = a_H T + b_H, \quad \tilde{T}_B(T) = a_B T + b_B. \quad (2)$$

Коэффициенты функций (2) определяются из следующих соотношений:

$$a_B = \frac{K_{TT_B}^*}{D_T^*}, \quad b_B = m_{T_B}^* - a_B m_T^*; \quad (3)$$
$$a_H = \frac{K_{TT_H}^*}{D_T^*}, \quad b_H = m_{T_H}^* - a_H m_T^*,$$



где  $m_T^*, m_{T_B}^*, m_{T_H}^*$  - математические ожидания выборок (1);  $K_{TT_B}^*, K_{TT_H}^*$  - коэффициенты корреляции;  $D_T^*$  - дисперсия выборки  $T^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N_k}$ . Выражения для вычисления данных величин имеют вид:

$$m_T^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} T^{(i)}; \quad m_{T_B}^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} T_B^{(i)}; \quad m_{T_H}^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} T_H^{(i)};$$

$$K_{TT_B}^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} T^{(i)} T_B^{(i)} - m_T^* m_{T_B}^*; \quad K_{TT_H}^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} T^{(i)} T_H^{(i)} - m_T^* m_{T_H}^*; \quad (4)$$

$$D_T^* = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} (T^{(i)})^2 - (m_T^*)^2.$$

### 3. Алгоритм прогнозирования ПН

Рассмотрим методику прогнозирования оценки ПН, на основании результатов РЭМ, используемого на 3 комплектах:

1. Результаты применения РЭМ (с заданной доверительной вероятностью  $\gamma$  и точностью моделирования  $\varepsilon_{\text{зад}}$ ) вносим в табл.1.

Результаты применения РЭМ. Табл.1.

№ п/п	Общая наработка изделия, $T_\Sigma$ , час	Кол-во отказов по изделию, $r$	Наработка на отказ, $T$ , час	Нижняя граница интервала, $T_H$ , час	Верхняя граница интервала, $T_B$ , час
1	$T_\Sigma^{(1)}$	$r^{(1)}$	$T^{(1)}$	$T_H^{(1)}$	$T_B^{(1)}$
2	$T_\Sigma^{(2)}$	$r^{(2)}$	$T^{(2)}$	$T_H^{(2)}$	$T_B^{(2)}$
2	$T_\Sigma^{(3)}$	$r^{(3)}$	$T^{(3)}$	$T_H^{(3)}$	$T_B^{(3)}$

2. Для выборок  $(T^{(i)}, T_H^{(i)})$  и  $(T^{(i)}, T_B^{(i)})$  с помощью соотношений (3), (4) находим коэффициенты  $(a_H, b_H, a_B, b_B)$  линейных зависимостей вида (2).

3. В координатной плоскости  $T_0\tilde{T}$  строим два графика по зависимостям (2) (см. рис.1).

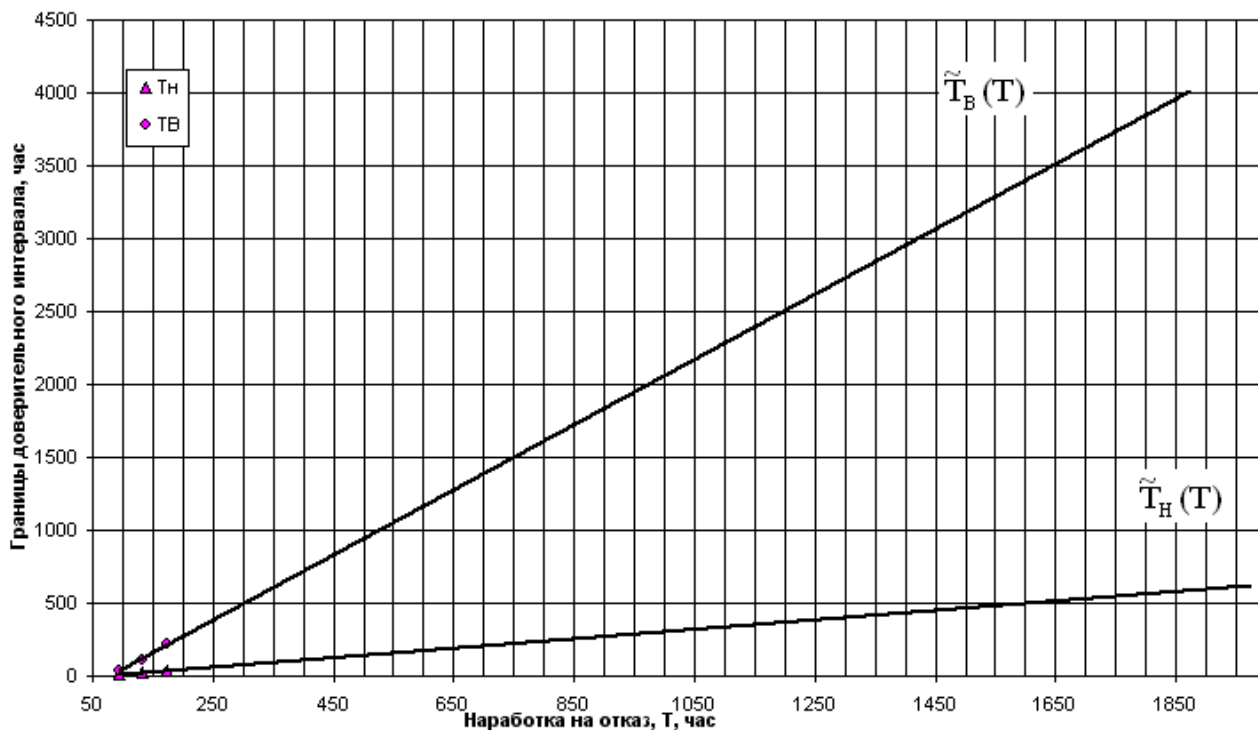


Рис.1. Линейные тренды оценок ПН.

4. Для определения доверительного интервала соответствия ПН  $T_{ТРЕБ}$  необходимо найти на графике точки пересечения прямых  $\tilde{T}_H(T)$  и  $\tilde{T}_B(T)$  с горизонталью  $\tilde{T} = T_{ТРЕБ} = T^*$ . Значения нижней и верхней границ доверительного интервала для значения  $T^*$  определяются с помощью соотношений вида:

$$T_H^* = \frac{T^* - b_H}{a_H}; \quad T_B^* = \frac{T^* - b_B}{a_B}.$$

5. Для полученных интервалов  $[T_H^*, T_B^*]$  и требуемых значений  $T^*$  применяем решающее правило (см. рис.2 лаб.р.№3).

#### 4. Порядок выполнения работы

Исходные данные  $T^*$  выбираются согласно индивидуального варианта представленного в лаб.р.№3 (два значения из графы « $T_{ТРЕБ}$ », третье значение принять равному 1800 часов). Далее на основании результатов РЭМ (см. лаб.р.№3) применяем алгоритм, описанный в п.3.

### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Алгоритм реализации прогноза ПН.

3. Номер и содержание индивидуального варианта.
4. Результаты работы РЭМ, представленные в виде табл.1.
5. График, содержащий построенные линейные тренды.
6. Значение прогноза интервалов  $[T_H^*, T_B^*]$  для заданных значений  $T^*$ .
7. Результат прогноза, выраженный в использовании решающего правила (см. рис.2 лаб.р.№3) для заданных значений  $T^*$  (для трёх значений).

## Лабораторная работа №7

### Определение показателей надежности элементов

по опытным данным

**Цель работы:** определить показатели надежности элементов

по опытным данным.

**Программа работы:**

Дано:

- $N$  – число элементов, находящихся на испытании;
- $t_i$  – время исправной работы  $i$ -го элемента,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $n$  – число отказавших элементов за время испытания  $t$ .

Определить показатели надежности элемента:

- $\lambda(t)$  – интенсивность отказа как функцию времени;
- $\omega(t)$  – плотность распределения времени исправной работы элемента;
- $f(t)$  – параметр потока отказов как функцию времени.

Эти показатели надежности необходимо определить при следующих двух видах испытания:

- а) с выбрасыванием отказавших элементов;
- б) с заменой новыми или отремонтированными.

В случае (а) число элементов в процессе испытания убывает, в случае (б) — остается постоянным.

Варианты задания приведены далее в *разд. 1.5*.

### Краткие сведения из теории

В теории надежности под **элементом** понимают элемент, узел, блок, имеющий показатель надежности и входящий в состав системы. Элементы бывают двух видов: невосстанавливаемые (резистор, конденсатор, подшипники и т. п.), и восстанавливаемые или ремонтируемые (генератор тока, колесо автомобиля, телевизор, ЭВМ и т. п.). Отсюда следует, что показателями надежности невосстанавливаемых элементов являются только такие показатели, которые характеризуют надежность техники до ее первого отказа.

Показателями надежности вос- становливаемых элементов являются показатели, которые характеризуют надежность техники не только до первого отказа, но и между отказами.

Показателями надежности невосстанавливаемых элементов являются:

- $P(t)$  – вероятность безотказной работы элемента в течение времени  $t$ ;
- $T_1$  – среднее время безотказной работы (наработка до отказа);
- $\omega(t)$  — плотность распределения времени до отказа;
- $\lambda(t)$  — интенсивность отказа в момент  $t$ .

Между этими показателями существуют следующие зависимости:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}, \quad (1.1)$$

$$\omega(t) = -P'(t), \quad P(t) = \int_t^{\infty} \omega(t) dt, \quad (1.2)$$

$$\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{P(t)}, \quad (1.3)$$

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (1.4)$$

Интенсивность отказа многих элементов, особенно элементов электроники, является величиной постоянной:  $\lambda(t) = \lambda$ . В этом случае зависимости между показателями надежности имеют вид:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-\lambda t}, \\ T_1 &= \frac{1}{\lambda}, \\ \omega(t) &= \lambda e^{-\lambda t}, \\ \lambda(t) &= \lambda = const. \end{aligned}$$

Показателями надежности восстанавливаемых элементов являются:

- $\omega(t)$  – параметр потока отказов в момент времени  $t$ ;
- $T$  – среднее время работы между отказами (наработка на отказ).

Показателями надежности восстанавливаемых элементов могут быть также показатели надежности невосстанавливаемых элементов. Это имеет место в тех случаях, когда система, в состав которой входит элемент, является неремонтируемой по условиям ее работы (необитаемый космический аппарат, аппаратура, работающая в агрессивных средах, самолет в процессе полета, отсутствие запчастей для ремонта и т. п.). Между показателями надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых элементов имеют место следующие зависимости:

$$f(t) = \omega(t) + \int_0^t f(\tau)\omega(t-\tau)dt, \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{T_1}. \quad (1.6)$$

Из выражений для показателей надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых элементов можно сделать следующий важный вывод: основным показателем надежности элементов сложных систем является интенсивность отказов  $\lambda(t)$ . Это объясняется следующими обстоятельствами:

- надежность многих элементов можно оценить одним числом, т. к. их интенсивность отказа — величина постоянная;
- по известной интенсивности  $\lambda(t)$  наиболее просто оценить остальные показатели надежности элементов и сложных систем;
- $\lambda(t)$  обладает хорошей наглядностью;
- интенсивность отказов нетрудно получить экспериментально.

Следует, однако, иметь в виду, что плотность распределения наиболее полно характеризует случайное явление — время до отказа. Остальные показатели, в том числе и  $\lambda(t)$ , лишь в совокупности позволяют достаточно полно оценить надежность сложной системы.

Основным способом определения показателей надежности элементов сложных систем является обработка статистических данных об их отказах в процессе эксплуатации систем или при испытаниях в лабораторных условиях. При этом возможны следующие два случая:

- отказавшие элементы в процессе испытания или эксплуатации системы новыми не заменяются (испытания без восстановления);
- отказавший элемент заменяется новым того же типа (испытания с восстановлением).

В процессе эксплуатации системы или при испытаниях в лабораторных условиях фиксируется дата возникновения отказа. По этим данным путем статистической обработки и определяются показатели надежности элементов.

Как следует из определений показателей надежности невосстанавливаемого элемента, все они могут быть вычислены, если известен закон распределения времени работы элемента до отказа в виде плотности  $\omega(t)$ . Если элемент может ремонтироваться, то все показатели надежности выражаются через закон распределения времени безотказной работы  $\omega(t)$ .

Поэтому важным обстоятельством является умение находить  $\omega(t)$  с помощью проведения и обработки результатов эксперимента.

Предположим, что в результате проведения испытаний над  $N$  элементами в течение времени  $T$  получены некоторые статистические данные о распределении количества отказавших элементов. Возможны три способа регистрации отказов элементов.

- Первый способ регистрации

Элементы, поставленные на испытания, являются невосстанавливаемыми. При возникновении отказа некоторого элемента фиксируется момент времени его отказа.

В результате испытаний статистической информацией является последовательность  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$  моментов времени отказа элементов (рис. 1.1).

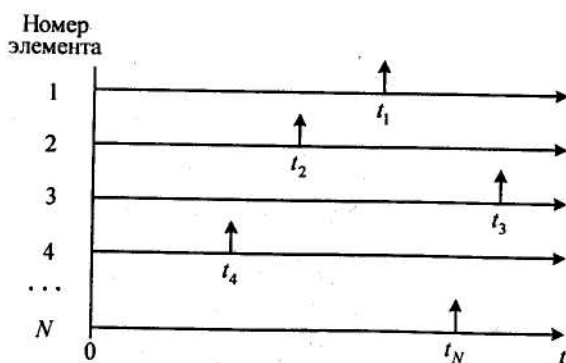


Рис. 1.1. Временная диаграмма моментов отказов невосстанавливаемых элементов

- Второй способ регистрации

Элементы, поставленные на испытания, являются восстанавливаемыми. После отказа какого-либо элемента он заменяется новым. В результате испытаний исходной статистической информацией является последовательность моментов времени отказов  $i$ -го элемента  $t_{i,j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ , и,  $j = 1, 2, \dots, N$ ) в течение периода наблюдений  $T$  (рис. 1.2). Реализациями наработок элемента в этом случае служат разности  $\tau_{i,j}$ .  $t_{i,j} - t_{i,j-1}$  предполагается, что  $t_{i,0} = 0$ ).

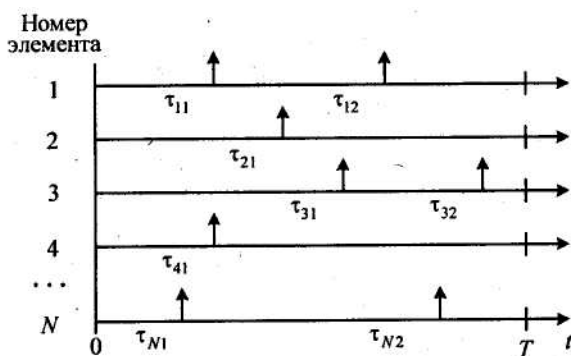


Рис. 1.2. Временная диаграмма моментов отказов восстанавливаемых элементов

с известными номерами

Второй способ регистрации отказов, очевидно, сводится к первому, если фиксируются номера отказавших элементов. В качестве статистических данных берется совокупность разностей  $\tau_{i,j}$ , представляющих собой времена работы элементов до первого отказа.

- Третий способ регистрации

Элементы, поставленные на испытания, являются восстанавливаемыми. После отказа какого-либо элемента он заменяется новым, однако не известен номер отказавшего элемента. В результате испытаний исходной статистической информацией является последовательность  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$  моментов отказов элементов, где  $n$  – число отказавших элементов. Таким образом, в отличие от второго способа, здесь регистрируются моменты отказов элементов без указания их номеров.

Рассмотрим статистические определения показателей надежности элемента. Соответствующий статистический аналог показателя надежности будем обозначать тем же символом, что и раньше, но со знаком (^) сверху.

### Невосстанавливаемые элементы

Исходными статистическими данными является время работы элементов первого отказа:  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$ . Тогда среднее время работы элемента до отказа равно среднему арифметическому времени  $t_i$ , т. е

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i.$$

Обозначим через  $v(t)$  число элементов, для которых отказ произошел позднее момента времени  $t$ . Тогда вероятность отказа элемента равна

$$\hat{Q}(t) = \frac{v(t)}{N},$$

а вероятность безотказной работы —

$$\hat{P}(t) = 1 - \hat{Q}(t),$$

Пусть последовательность  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$  получена упорядочением исходной последовательности. Функция  $\hat{Q}(t)$  представляет собой эмпирическую функцию распределения, и если все  $t_{(i)}$  различны, то

$$\hat{Q}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_{(1)} \\ i/N, & \\ 1, & \end{cases}$$



при  $t_{(1)} \leq t < t_{(i+1)}$

при  $t \geq t_{(N)}$

Величина всех скачков равна  $1/N$ , а типичный график функции  $\hat{Q}(t)$  приведен на рис. 1.3.

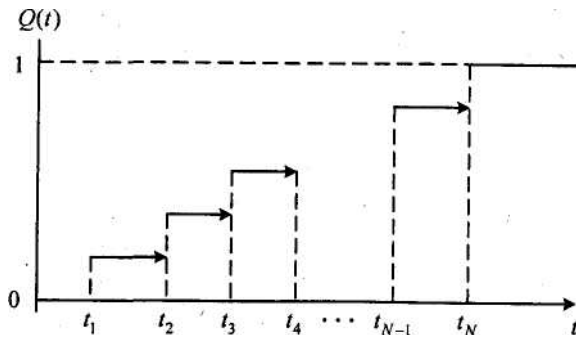


Рис. 1.3. График статистической вероятности отказа элемента

Другим наглядным способом представления статистических данных является *гистограмма*. Область значений  $[t_{(1)}; t_{(N)}]$  разбивается на равные интервалы  $\Delta_i = 1, 2, \dots, k$  длины  $h = \frac{R}{k}$ , где  $R = t_{(N)} - t_{(1)}$ , и называется размахом выборки. Гистограмма представляет собой примыкающие друг к другу прямоугольники, основанием которых являются указанные интервалы, а высоты равны плотностям относительных частот  $\frac{N_i}{N_h}$ , где  $N_i$  – число выборочных значений, попавших в данный интервал (рис. 1.4). Гистограмма является статистической плотностью распределения времени работы до отказа. Для оценки плотности иногда используется также *полигон* относительных частот, который представляет собой ломаную линию, построенную по точкам, абсциссами которых являются середины интервалов  $\Delta_i = 1, 2, \dots, k$ , а ординаты соответствуют плотностям  $\frac{N_i}{N_h}$  (рис. 1.4).

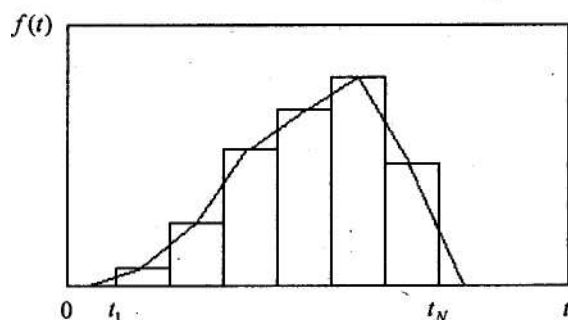


Рис. 1.4. График статистической плотности распределения в виде гистограммы и полигона частот

Интенсивность отказа элемента рассчитывается как отношение плотности распределения к вероятности безотказной работы.

### Восстанавливаемые элементы

Исходными статистическими данными являются моменты времени отказов элементов:  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$ , где  $n$  – число отказавших элементов,  $N$  – общее число элементов, участвующих в испытаниях. Информация об отказах элементов может быть представлена в виде табл. 1.1. Весь период испытаний разбивается на интервалы времени определенной длины, и подсчитывается количество отказавших элементов на каждом интервале.

Таблица 1.1. Таблица отказов элементов

$\Delta t$	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	...	$\Delta t_k$
$\Delta n$	$\Delta n_i$	$\Delta n_i$	...	$\Delta n_k$

Табличные данные означают, что на интервале времени  $\Delta t$ , было зафиксировано точно  $\Delta n$ , отказов элементов,  $t = 1, 2, \dots, k$ . Тогда имеет место следующее статистическое определение параметра потока отказов элемента:

$$\hat{\omega}(t) = \frac{\Delta n_i}{N \Delta t_i}$$

Для всех  $t$ , принадлежащих  $i$ - интервалу времени:

$$\Delta t_1 + \dots + \Delta t_{i-1} < t \leq \Delta t_1 + \dots + \Delta t_{i-1} + \Delta t_i.$$

Определение плотности распределения  $f(t)$  путем решения интегрального уравнения (1.5) связано с некоторыми трудностями, которые вызваны скачкообразным изменением параметра потока отказов. Один из возможных подходов к определению функции  $f(t)$  состоит в следующем. Найдем функцию  $f(t)$  в виде кусочно-постоянной функции

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_k, & \text{если } a_{k-1} < t \leq a_k, k=1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{если } t = a_n \end{cases}$$

Здесь  $a_0 = 0$ ,  $a_n = T$ ,  $\omega_k$  – искомые величины, которые можно определить из условия выполнения уравнения (1.5) в среднем по интегральной метрике

$$\int_0^T \left( \hat{\omega}(t) - f(t) - \int_0^t f(\tau) \hat{\omega}(t-\tau) dt \right)^2 dt \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\int_0^T f(t)dt = 1, f(t) \geq 0$$

### 1.3. Пример выполнения лабораторной работы

#### Постановка задачи

Требуется определить показатели надежности элемента без восстановления и с восстановлением соответственно для двух вариантов исходных данных:

##### 1. Первый набор исходных данных

На испытания поставлено  $N = 100$  элементов. Моменты отказов элементов представлены в табл. 1. Все элементы работают до своего отказа и после отказа не ремонтируются. Требуется определить статистические и теоретические показатели надежности элемента:  $T_1, P(t), Q(t), \omega(t)$ .

Таблица 1. Моменты отказов элементов, в часах

120	221	151	212	445	575	411	415	152	750
123	130	235	875	147	316	613	745	251	319
120	145	120	309	432	243	649	158	344	789
247	197	623	254	655	723	696	267	997	326
128	130	158	462	346	294	120	30	165	215
232	186	938	146	518	248	177	848	127	198
239	450	216	559	239	560	263	144	139	261
378	289	768	310	413	351	141	292	319	969
56	877	357	265	796	584	243	394	614	146
422	255	360	360	824	114	242	396	166	224

##### 2. Второй набор исходных данных

На испытаниях находится  $N = 10$  элементов. В течение периода  $T = 700$  час регистрируются моменты времени отказов элементов (табл. 2). Предполагается, что отказавшие элементы заменяют идентичными по надежности элементами. Требуется определить показатели надежности элемента, характеризующие время его работы между соседними отказами:  $T_2, \omega(t), F(t), \lambda(t)$ .

Обработка статистических данных предусматривает их группировку в 10 частичных интервалах (классах). Уровень значимости принять равным 0,05.

Таблица 2. Моменты времени отказов элементов

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
----------------	---

1	204; 221; 345; 376; 537; 697
2	2; 39; 71; 104; 118; 213; 544; 596; 608; 657
3	138; 314; 387; 467; -471; 556; 699
4	8; 11; 52; 94* 192; 476; 491; 527; 655
5	106; 168; 325; 360; 690
6	192; 207; 217; 362; 426
7	225; 440; 618; 657; 667
8	371; 420; 500
9	85; 371; 568; 579; 611; 625; 663
10	80; 111; 152; 162; 369; 394; 462; 551

### 1.3.2. Последовательность выполнения работы с использованием программы StatGraphics

Статистический графический пакет StatGraphics (Statistical Graphics System) предназначен для статистического анализа и обработки данных на персональном компьютере. Он является наиболее полной интегрированной статической и графической системой, объединяющей профессиональные методы обработки больших объемов данных, качественную графику и дружелюбный пользовательский интерфейс. StatGraphics позволяет выполнять статический анализ экспериментальных данных, полученных в результате исследования сложных стохастических (вероятностных) систем.

Для определения показателей надежности для двух вариантов исходных данных необходимо выполнить последовательность действий:

1. *Подготовка исходных данных к статистической обработке для двух наборов одновременно.* С этой целью запускаем StatGraphics Plus, создадим две переменные (2 столбца) с именами *parabotka1* и *parabotka2*, сохраним их в файле с именем ОТКАЗ.

В переменную (столбец) *parabotka1* поместим первый набор исходных данных непосредственно из табл. 1. Для исходных данных, содержащихся в табл. 2, вычислим разности между последующими и предыдущими значениями моментов времени отказов каждого элемента, в результате чего получим набор чисел, приведенный в табл. 3.

Таблица 3. Время между отказами элементов

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	204; 17;124;31;161;160
2	2;37;32;33;14;95;331;52;12;49
3	138; 176;73;80;4;85;143
4	8; 3;41;42;98;284;15;36;128
5	106; 62;157;35;330
6	192; 15;10;145;64
7	225;215;178;39;10
8	371; 49;80
9	85; 286;197;11;32;14;38
10	80; 31;41;10;207;25;68;89

Полученные разности из табл. 3 поместим в переменную (столбец) `narabotka2`. На экране компьютера получается следующая заставка:

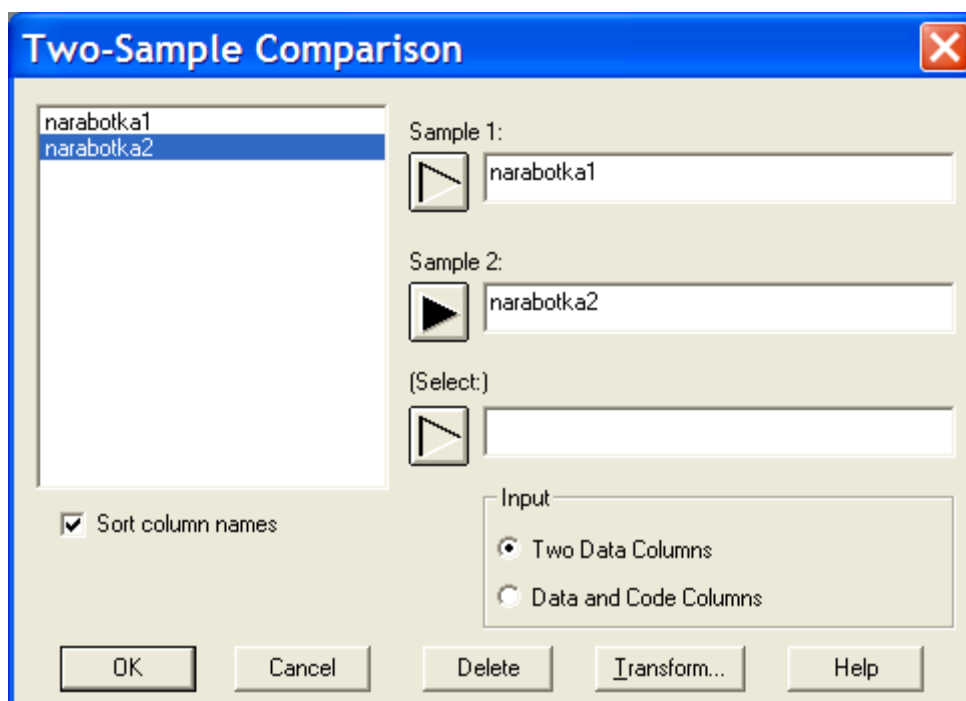
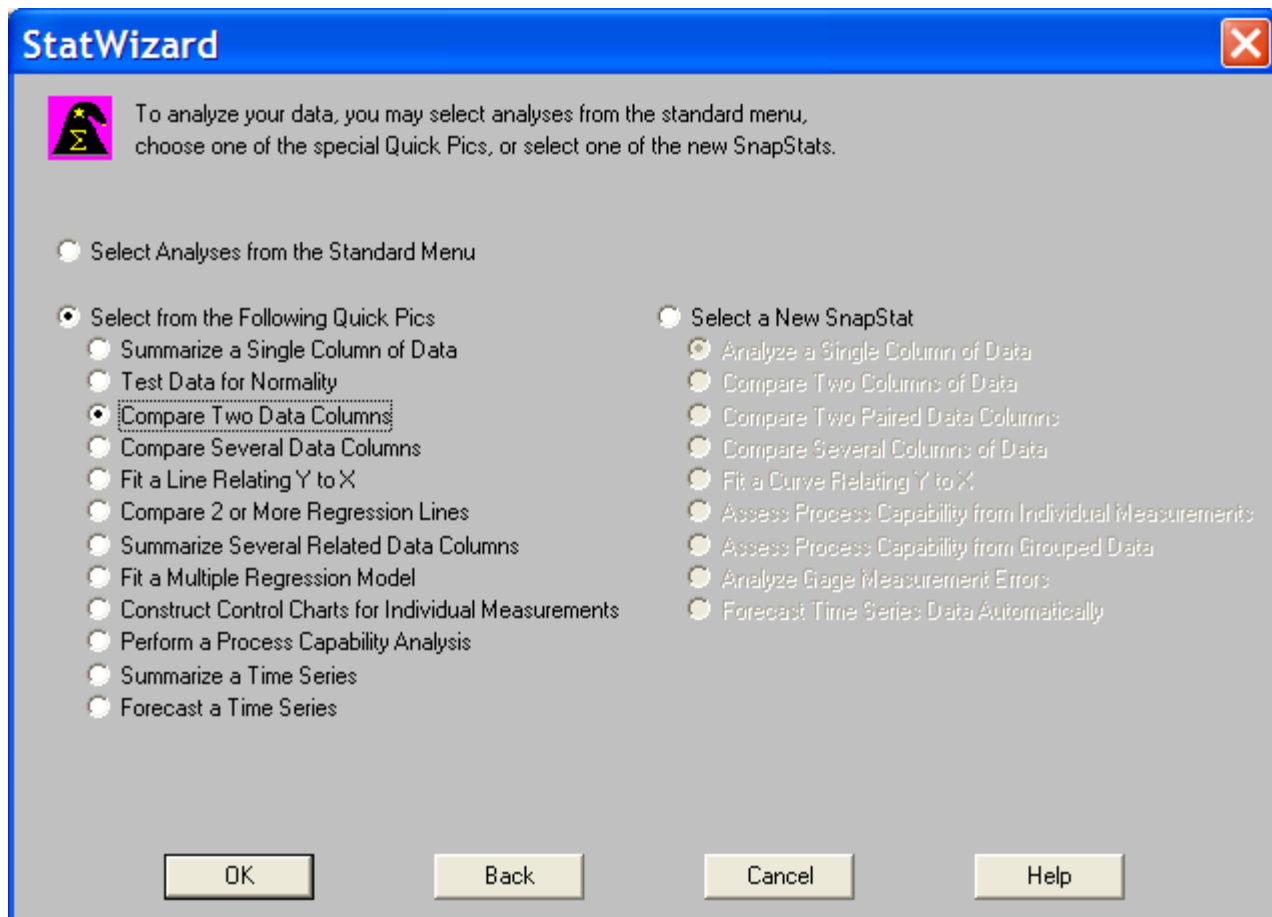
The screenshot shows the STATGRAPHICS Plus software window titled 'OTKAZ.sgp'. The main data window displays a table with the following data:

	narabotka1	narabotka2
1	120	204
2	221	17
3	151	124
4	212	31
5	445	161
6	575	160
7	411	2
8	415	37
9	152	32
10	750	33
11	123	14
12	130	95
13	235	331
14	875	52
15	147	12
16	316	49
17	613	138
18	745	176
19	251	73
20	319	80
21	120	4
22	145	85

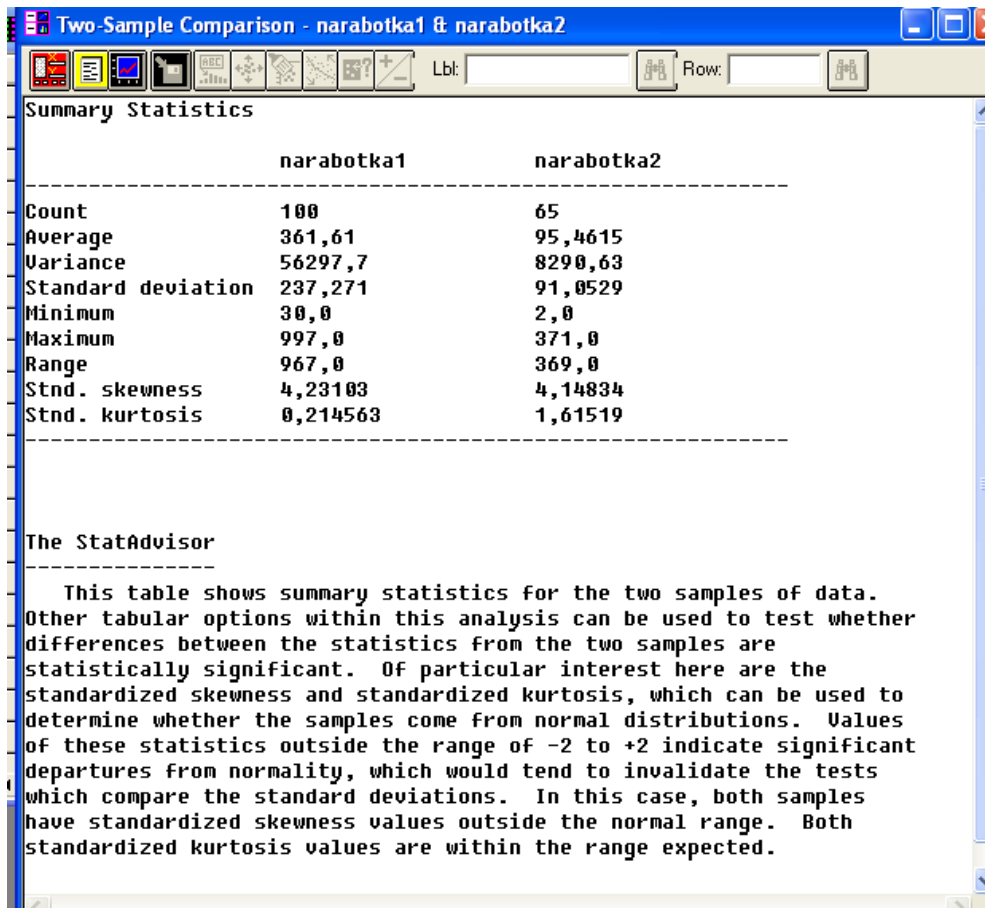
Длины переменных `narabotka1` и `narabotka2` соответственно равны 100 и 65, что соответствует количеству чисел в табл. 1 и 3.

2. *Определение статистических показателей для каждого набора данных, содержащихся в переменных `OTKAZ.narabotka1` и `OTKAZ.narabotka2`.*

Нажатие кнопки StatWizard  получим:



Это приведет к расчету требуемых характеристики и выводу их на экран в следующем виде:



	Narabot-ka1	Narabot-ka2
Размер выборки	100	65
Среднее значение	361,61	95,4615
Стандартное отклонение	237,271	91,0529
Минимум	30	2
Максимум	997	371
Размах	967	369

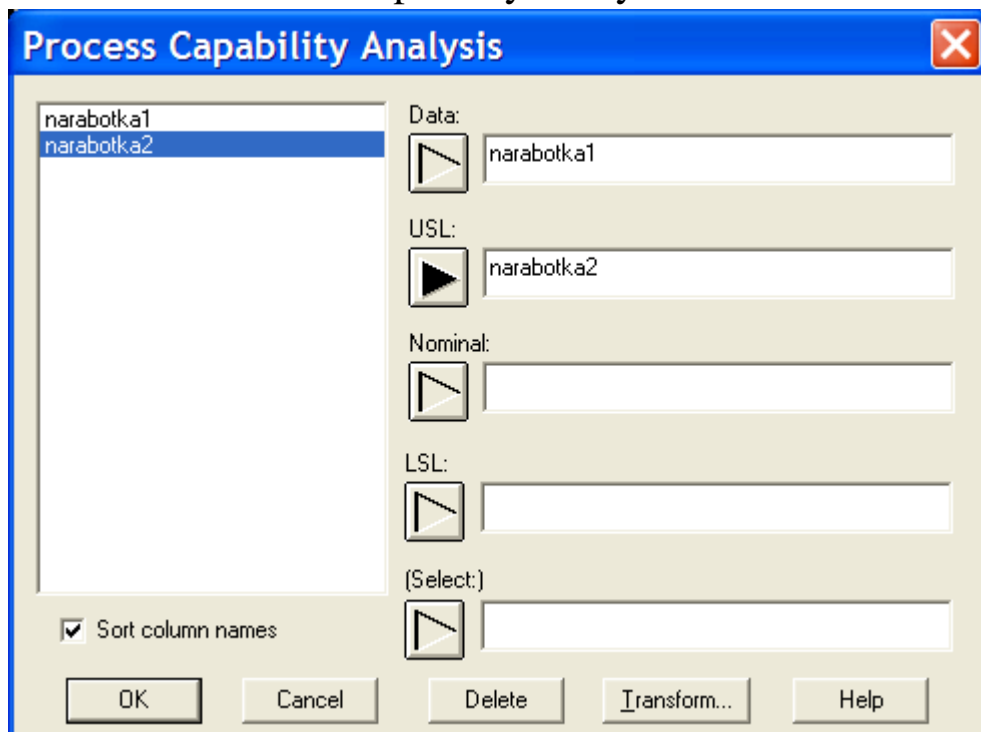
Отсюда следует, что для первого набора исходных данных средняя наработка до первого отказа приблизительно равна  $T_1=362$  часа, а для второго набора средняя наработка на отказ равна  $T_2 = 95$  часов. В первом случае распределение времени работы элемента между отказами явно отличается от экспоненциального, т. к. стандартное отклонение  $s_1=237$  существенно отличается от средней наработки на отказ. Во втором случае стандартное отклонение  $s_2=91$  достаточно близко к средней наработке до

отказа, что свидетельствует о возможной близости распределения к экспоненциальному.

Видим также, что для первого набора данных все реализации случайной наработки до отказа находятся в интервале [30; 997], и размах выборки равен 967 часов. Для второго набора данных все выборочные значения содержатся в интервале [2; 371] длиной 369 часов.

## Определение показателей надежности неремонтируемого элемента

Нажатием кнопки Capability Analysis 



Заполним поля Data и USL. В Analysis Options контекстного меню выберем пункт Gamma получим гистограмму частот и выравнивающую ее функции плотности Гамма-распределения (рис. 1.5).



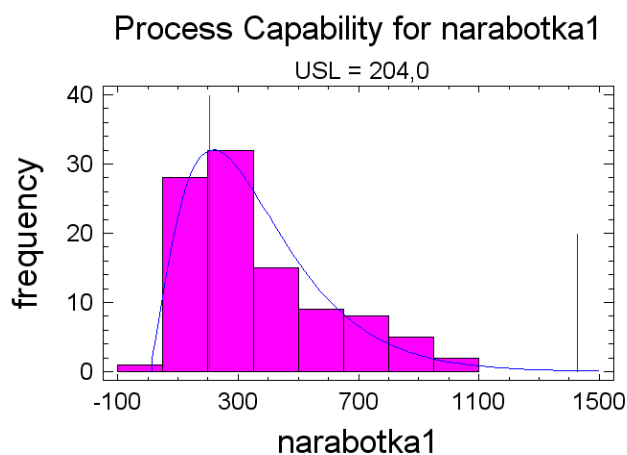
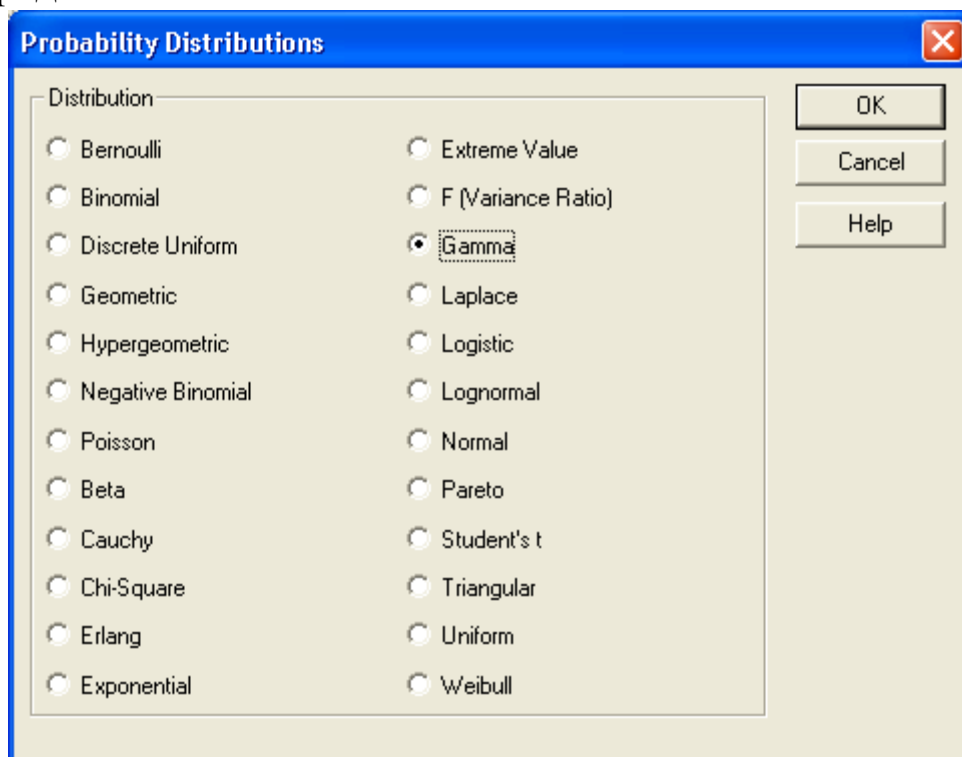


Рис. 1.5. Подбор плотности распределения к гистограмме частот  
 Уровень значимости для Гамма-распределения равен 0,728906. Так как это значение больше требуемого 0,05, то Гамма-распределение согласуется с экспериментальными данными.

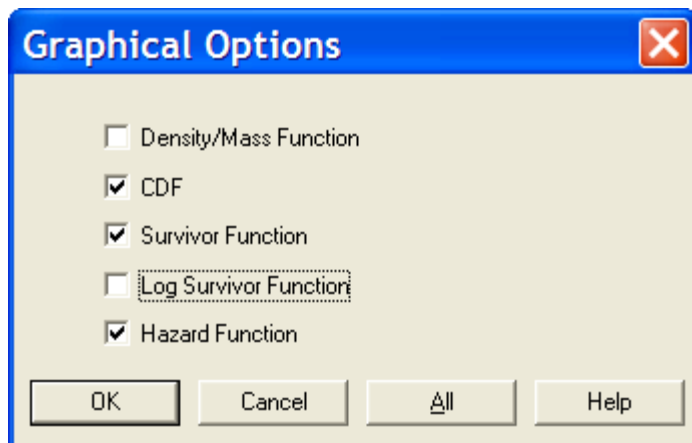
В пункте меню Describe\Distributions\Probability Distributions построим графики требуемых показателей надежности в соответствии с рассчитанными ранее параметрами.

В качестве примера для переменной narabotka1 подберем Гамма-распределение.



Выберем пункт Gamma.

В окне Probability Distributions раскроем вспомогательное меню Graphical Options и отметим соответствующие пункты:



Пункты вспомогательного меню означают следующее:

**Density function** — плотность распределения  $w(t)$ ;

**Cumulative d.f.** — функция распределения  $Q(t)$ ;

**Survivor function** — вероятность безотказной работы  $P(t)$ ;

**Log survivor function** — логарифм вероятности безотказной работы;

**Hazard function** — интенсивность отказов  $\lambda(t)$ .

В результате выбора того или иного пункта меню получим графики, изображенные на рис. 1.6—1.8.

В Analysis Options контекстного меню введем значение Shape и Scale.

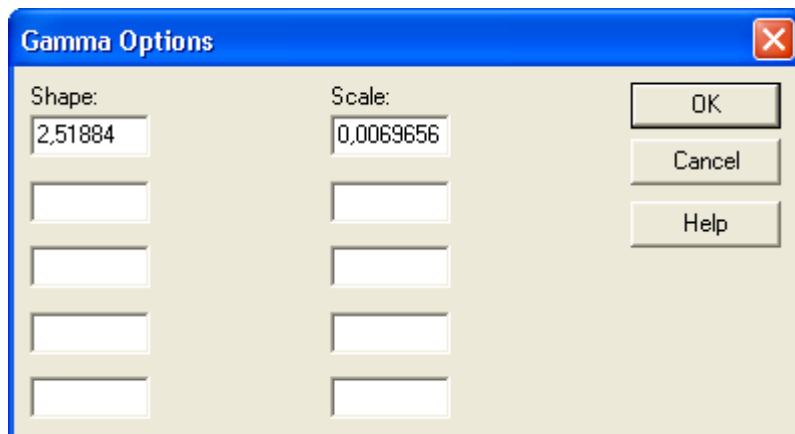


Рис. 1.6. Вероятность безотказной работы элемента  $P(t)$

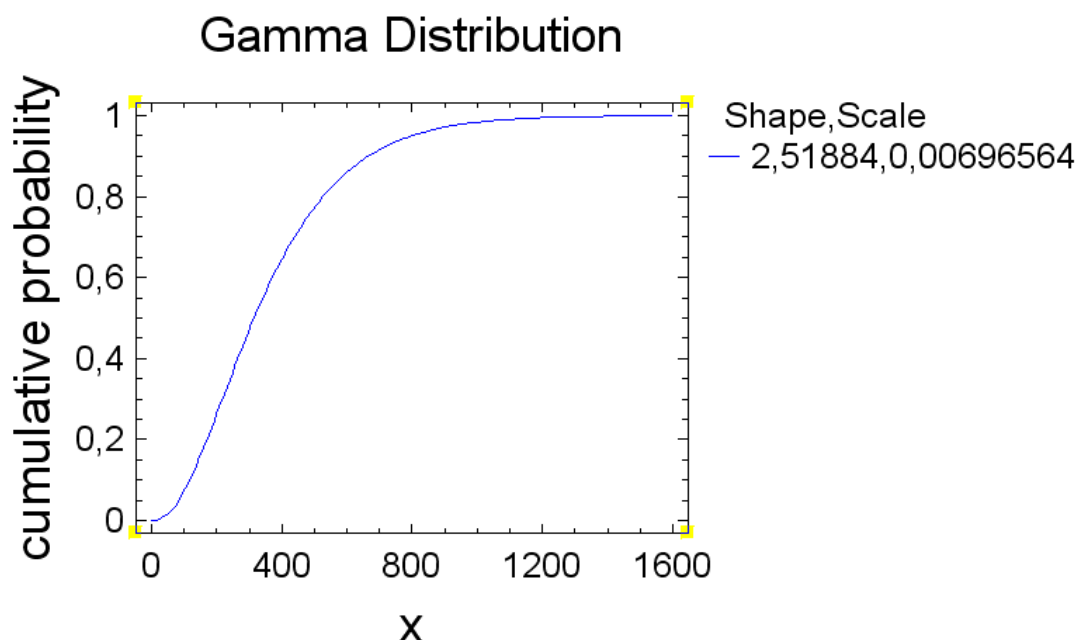


Рис. 1.7. Вероятность отказа элемента  $Q(t)$

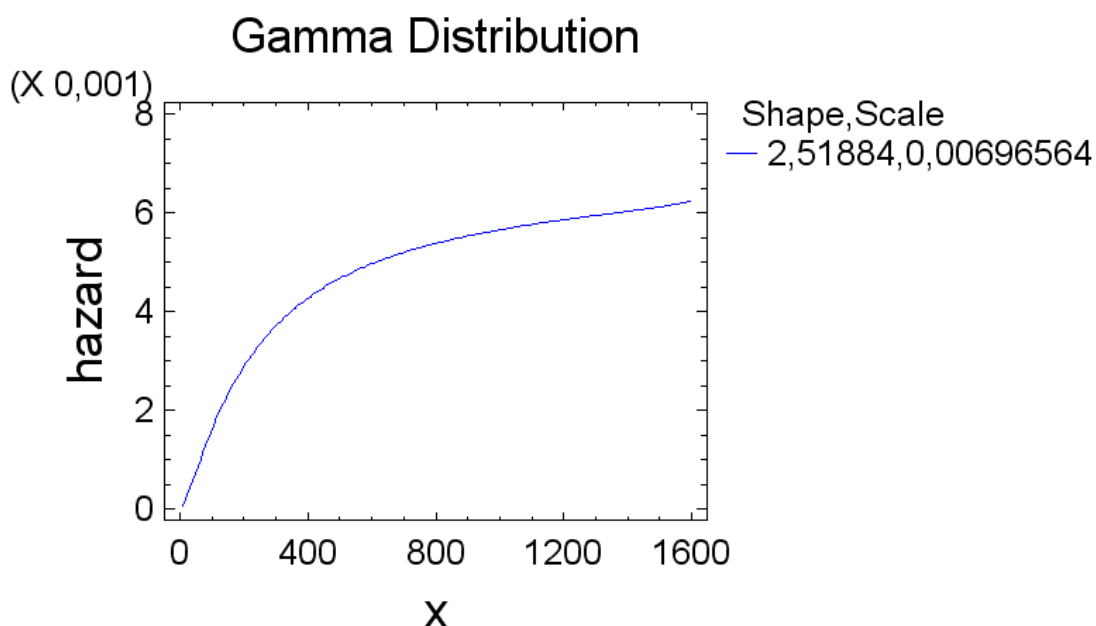


Рис. 1.8. Интенсивность отказов элемента  $\lambda(t)$

### Определение показателей надежности ремонтируемого элемента

В окне Probability Distributions раскроем вспомогательное меню Graphical Options, произведем перебор 5 различных распределений и выберем наиболее подходящее по уровню значимости. В качестве примера рассмотрим экспоненциальное распределение.

Гистограмма по наработкам<sup>2</sup> и соответствующая кривая экспоненциального распределения приведены на рис. 1.9. Уровень значимости для экспоненциального распределения равен 0,284492, что больше заданного

уровня значимости, равного 0,05. Следовательно, экспоненциальное распределение не противоречит опытным данным.

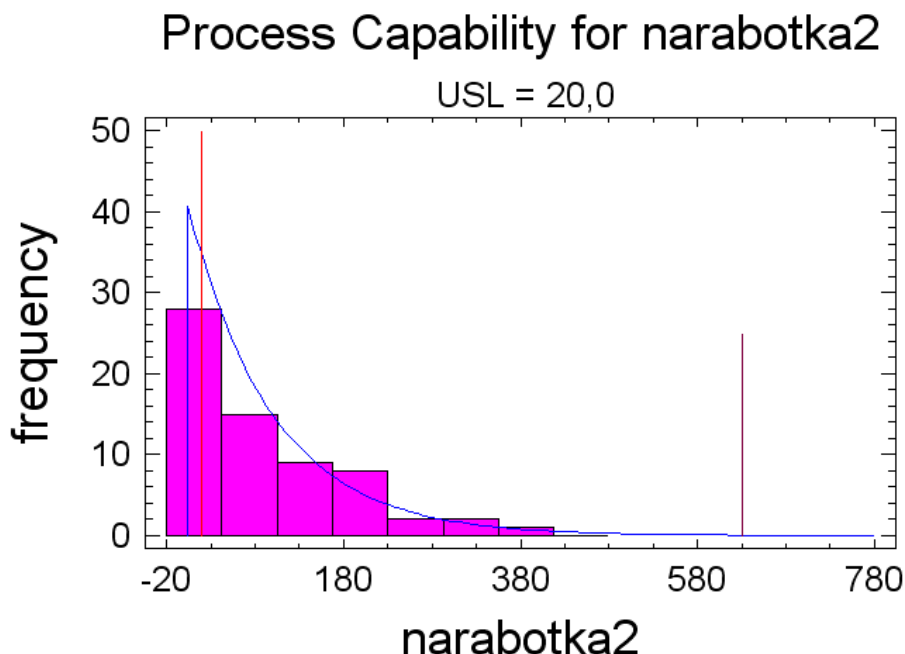
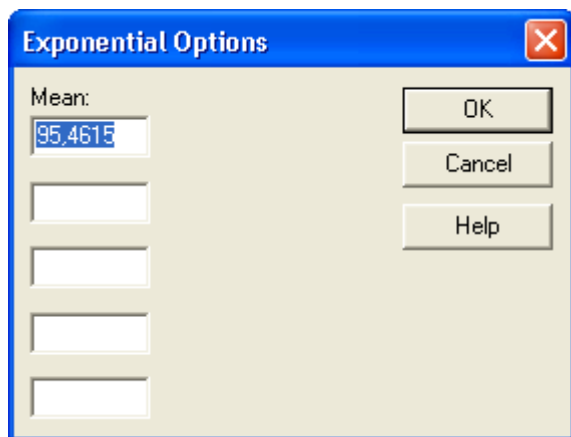


Рис. 1.9. Подбор плотности распределения  $w(t)$  к гистограмме частот

В пункт Analysis Options контекстного меню введем следующие параметры экспоненциального распределения: среднее отклонение = 95.4615



В соответствии с указанными параметрами в пункте меню Describe\Distributions\Probability Distributions строятся графики требуемых показателей надежности.

На рис. 1.10. и 1.11 изображены графики функций распределения и интенсивности отказов соответственно.

Средняя наработка на отказ равна  $T = 95,4615$  час.

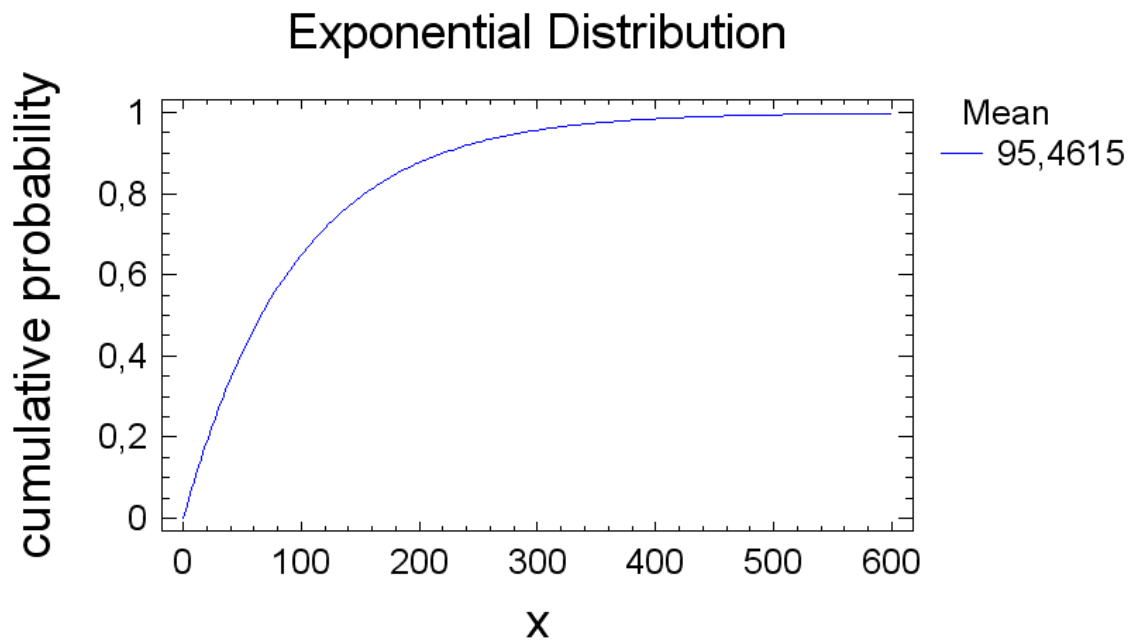


Рис. 1.10. Функция распределения времени работы элемента между отказами  $F(t)$

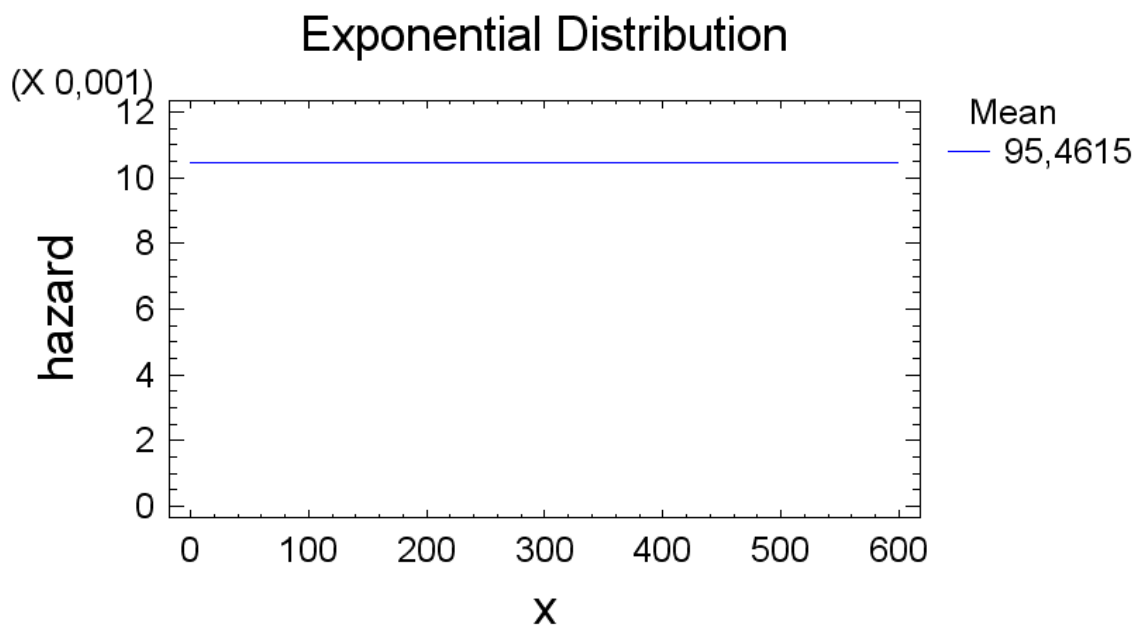


Рис. 1.11. Интенсивность отказов элемента  $\lambda(t)$

## Обработка статистических данных

*Размах варьирования:*

$$h = t_{\max} - t_{\min} = 997 - 30 = 967$$

*Разобьем размах варьирования на  $k$  интервалов:*

$$k < 1 + 3.31 \lg N,$$

$$5 < k < 20 \quad , \text{ где } N\text{-число элементов выборки. } N=100$$

$$k = 1 + 3.31 \lg 100 = 7$$

*Длина интервала:*

$$\Delta h = \frac{h}{k} = \frac{967}{7} = 138,14$$

*Количество отказов выборки, попавших в  $i$ -ый интервал:*

$$[30;168) : n_1 = 24;$$

$$[168;306) : n_2 = 29;$$

$$[306;444) : n_3 = 20;$$

$$[444;582) : n_4 = 7;$$

$$[582;720) : n_5 = 7;$$

$$[720;858] : n_6 = 8;$$

$$(858;997] : n_7 = 5;$$

*Все интервалы удовлетворяют условию  $n \geq 5$ , следовательно, объединение интервалов не требуется.*

$$W_i = \frac{n_i}{N}$$

$$W_1 = 0,24; W_2 = 0,29; W_3 = 0,2; W_4 = 0,07; W_5 = 0,07; W_6 = 0,08; W_7 = 0,05.$$

*Плотность распределения наработке до отказа:*

$$\omega_i(t) = \frac{W_i}{\Delta h} = \frac{W_i}{138,14}$$

$$\omega_1(t) = 0.001737;$$

$$\omega_2(t) = 0.002099;$$

$$\omega_3(t) = 0.001448;$$

$$\omega_4(t) = 0.000507;$$

$$\omega_5(t) = 0.000507;$$

$$\omega_6(t) = 0.005791;$$

$$\omega_7(t) = 0.000362.$$

*Интенсивность отказа в момент  $t$ :*

$$\lambda_i^*(t) = \frac{n_i}{(N - n_{i-1}) \cdot \Delta h}$$

$$\lambda_2^*(t) = \frac{29}{(100 - 24) \cdot 138,14} = 0,0027622;$$

$$\lambda_3^*(t) = \frac{20}{(100 - 29) \cdot 138,14} = 0,0020391;$$

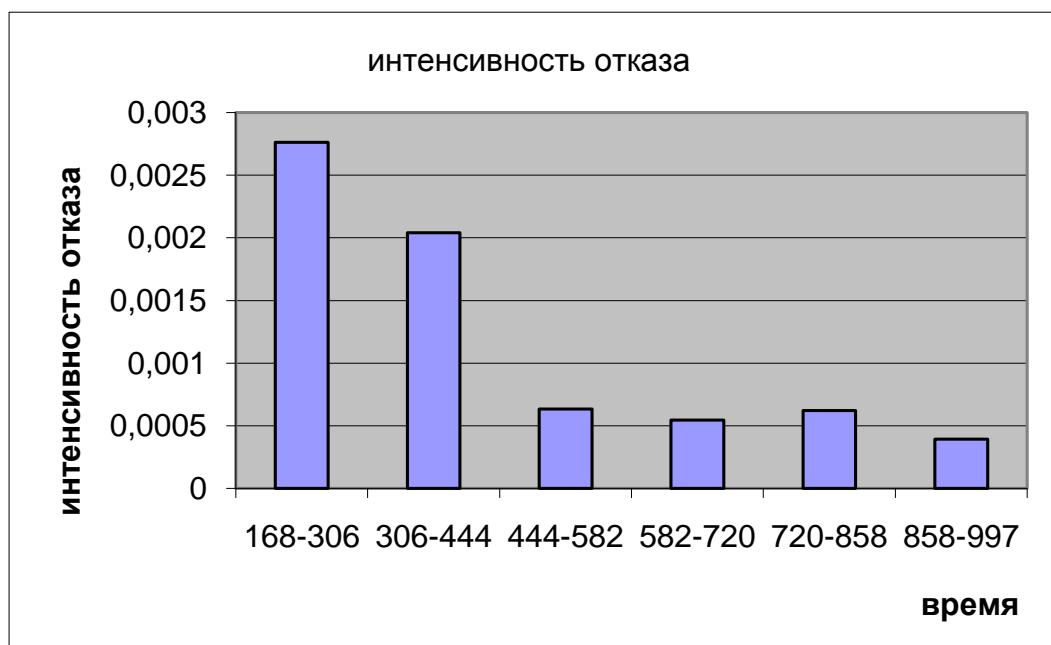
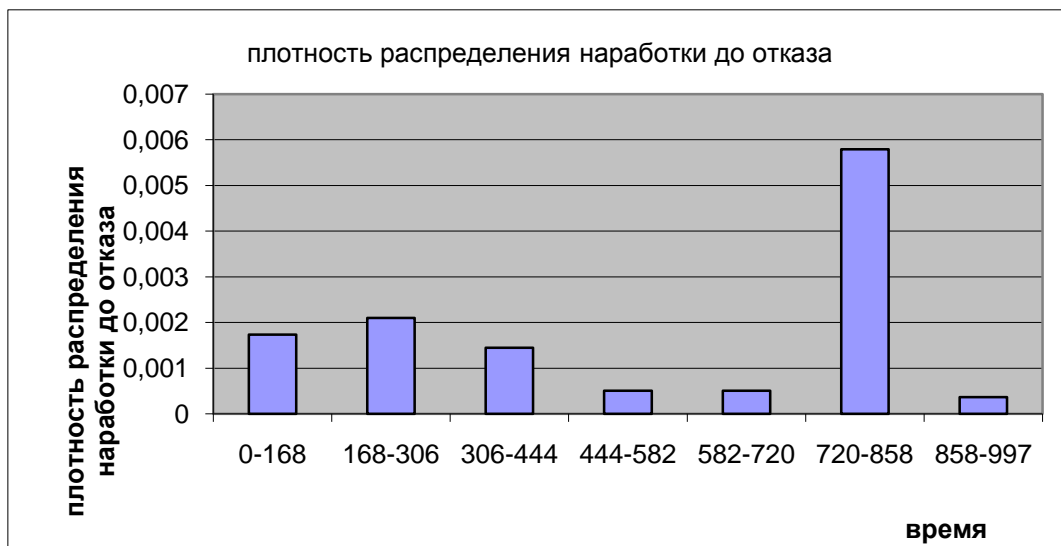
$$\lambda_4^*(t) = \frac{7}{(100 - 20) \cdot 138,14} = 0,0006334;$$

$$\lambda_5^*(t) = \frac{7}{(100 - 7) \cdot 138,14} = 0,0005449;$$

$$\lambda_6^*(t) = \frac{8}{(100 - 7) \cdot 138,14} = 0,0006227;$$

$$\lambda_7^*(t) = \frac{5}{(100 - 8) \cdot 138,14} = 0,0003934.$$

## Гистограммы:



## Варианты заданий

Дано:

- Два набора исходных данных об отказах элементов.
- $N$  – число элементов в каждом наборе.
- Закон распределения времени до отказа в первом варианте.
- Закон распределения времени между отказами во втором варианте.
- Моменты отказа элементов.

Определить:

- Показатели надежности элемента, характеризующие время его между отказами (второй набор исходных данных):  $T_1$ ,  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $w(t)$ ,  $\chi(t)$ .

- Показатели надежности элемента, характеризующие время его работы между отказами (второй набор исходных данных):  $T_1$ ,  $F(t)$ ,  $w(t)$ ,  $\chi(t)$ .

Решение получить в виде таблиц и графиков.

При обработке данных вручную и на компьютере их следует разоб-  
брать 10 групп (классов). Подбор подходящего распределения необходи-  
мо установить для уровня значимости, равного 0,05.



**ВАРИАНТ 1**

Первый набор исходных данных (Нормальное распределение):

1155	1147	1126	1139	1137	1132	1120	1165	1163	1156
1142	1143	1138	1144	1149	1145	1157	1152	1145	1140
1140	1145	1169	1148	1121	1135	1152	1138	1128	1161
1140	1149	1149	1123	1141	1164	1145	1131	1157	1123
1136	1146	1140	1130	1147	1108	1122	1133	1115	1165
1166	1137	1147	1137	1126	1143	1114	1109	1147	1135
1147	1148	1153	1146	1128	1145	1135	1147	1151	1151
1119	1145	1137	1149	1163	1141	1137	1137	1146	1133
1128	1123	1139	1134	1154	1149	1144	1166	1152	1159
1163	1112	1126	1146	1147	1149	1146	1127	1143	1154

Второй набор исходных данных (Экспоненциальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	37; 90; 279; 355; 360; 420; 466; 488; 627; 671
2	26; 77; 141; 532; 642; 661
3	53; 59; 164; 183; 316; 568; 607
4	22; 26; 134; 287; 356; 470; 472; 481
5	24; 40; 152; 412; 431; 486; 567; 630; 649
6	193; 216; 474; 488; 538; 616
7	86; 355; 415; 451
8	117; 157; 358; 462; 527; 673
9	74; 89; 356; 356; 420; 492; 497; 512; 548; 601
10	204; 276; 327; 515; 516; 544

**ВАРИАНТ 2**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

2127	1162	1131	1111	4414	1291	1266	2122	2268	1168
9168	2126	2134	4116	7119	2113	2110	3123	1103	3192
3288	3289	2229	1261	9224	1282	4221	7229	1248	5228
3232	2263	1216	8253	5262	4243	2268	2272	3270	5202
7235	1220	2292	3263	1251	5220	4200	8219	3208	2116
2146	3121	5109	5147	4214	4156	1202	4104	3123	1122
2288	4225	6234	6210	1240	8238	~171	1263	1208	8214
9236	1100	7137	3196	2158	5110	3127	2146	1166	2158
1103	3218	6218	5217	2238	3212	2232	3233	1130	1151
4154	2186	1197	2136	3113	1115	1111	1138	2116	2168

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 600 часов
1	107; 201; 295; 397; 515
2	95; 213; 320; 403; 483; 568
3	97; 196; 282; 399; 504; 584
4	109; 216; 328; 422; 528
5	112; 226; 310; 417; 524
6	103; 195; 300; 392; 480 570
7	93; 178; 268; 375; 494
8	93; 203; 312; 393; 488 581
9	119; 210; 293; 408; 518
10	102; 220; 334; 439; 537

**ВАРИАНТ 3**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

221	370	84	97	196	475	426	151	72	133
282	97	321	315	107	108	156	597	241	210
107	37	176	197	182	467	146	97	244	54
91	255	169	149	256	53	283	103	468	38
369	305	209	227	276	351	244	216	382	430
204	306	163	159	221	235	126	106	670	72
80	466	93	60	123	706	112	236	298	49
277	155	83	67	298	168	30	210	178	275
86	161	397	508	334	252	582	24	427	139
559	138	405	187	229	107	167	519	226	247

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 600 часов
1	110; 211; 296; 408; 512; 584
2	80; 167; 239; 336; 435; 523
3	113; 206; 292; 370; 466; 588
4	123; 211; 301; 397; 502
5	79; 197; 296; 377; 457; 538
6	132; 224; 302; 383; 486; 570
7	86; 185; 312; 390; 471; 576
8	106; 195; 265; 350; 431; 537
9	83; 176; 253; 328; 407; 511; 595
10	130; 232; 371; 442; 539

**ВАРИАНТ 4**

Первый набор исходных данных (Нормальное распределение):

156	161	145	122	180	190	153	174	163	133
135	156	176	160	163	150	157	156	136	168
176	155	165	140	165	160	138	181	183	182
165	175	153	131	180	168	149	156	173	156
148	133	154	149	152	150	188	163	145	142
169	163	174	135	154	183	172	136	166	157
157	182	174	162	173	191	165	146	151	163
175	167	141	163	142	143	167	149	142	173
149	148	150	154	149	178	145	168	176	170
158	140	152	162	163	148	184	159	143	163

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 500 часов
1	105; 208; 323; 414
2	113; 216; 331; 433
3	111; 192; 272; 363; 453
4	110; 209; 314; 426
5	85; 192; 301; 393; 480
6	87; 174; 292; 381; 479
7	102; 195; 314; 404
8	94; 190; 275; 363; 449
9	218; 230; 331; 433
10	105; 219; 310; 408

**ВАРИАНТ 5**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

65	266	138	87	219	466	71	286	107	349
106	231	169	219	387	82	63	92	104	96
54	243	702	245	128	153	260	448	220	326
550	210	124	293	209	473	114	228	194	334
220	29	270	481	499	854	533	606	133	174
426	212	395	199	412	182	153	109	156	65
174	142	374	170	97	52	434	392	197	356
23	200	35	286	352	53	544	198	111	.93
361	409	393	20	296	409	42	73	138	515
223	345	79	98	51	25	188	194	88	106

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	86; 194; 299; 406; 505; 619
2	119; 221; 333; 438; 528; 643
3	86; 200; 295; 389; 496; 600
4	107; 188; 286; 385; 501; 612
5	82; 185; 294; 392; 510; 591; 675
6	117; 234; 340; 425; 516; 613; 695
7	210; 202; 318; 414; 503; 597
8	104; 197; 310; 429; 534; 622
9	109; 196; 289; 395; 510; 619
10	83; 193; 309; 419; 507; 592; 683 -

**ВАРИАНТ 6**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

188	297	644	136	728	194	312	389	387	153
191	332	988	177	132	127	100	137	224	174
975	164	798	182	115	687	165	113	244	847
199	227	118	124	112	986	196	150	319	349
423	П21	224	163	945	789	960	158	377	747
139	154	728	129	197	241	282	152	161	228
171	458	189	381	580	177	986	156	347	277
163	355	347	180	241	256	239	128	862	189
292	221	254	953	253	515	474	588	434	167
240	757	149	178	380	344	546	761	127	271

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 500 часов
1	94; 181; 278; 365; 478
2	87; 168; 261; 353; 468
3	123; 211; 336; 412
4	93; 194; 280; 357; 459
5	80; 175; 266; 365; 493
6	113; 230; 346; 430
7	88; 191; 295; 400
8	74; 187; 286; 405; 478
9	79; 187; 308; 400; 476
10	123; 206; 333; 464

**ВАРИАНТ 7**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

226	649	453	364	340	321	545	497	149	293
295	323	613	257	584	226	277	923	222	764
583	725	690	476	281	1395	230	273	122	292
191	460	444	755	618	235	219	125	367	124
416	293	290	112	138	445	П44	176	934	547
538	143	363	594	116	369	127	688	219	175
233	745	223	466	380	532	230	141	256	996
134	478	180	658	149	643	155	296	280	346
205	495	508	134	314	244	287	579	343	272
199	243	774	790	419	1102	733	637	1412	354

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 900 часов
1	98; 209; 295; 392; 502; 592; 691; 806
2	111; 197; 292; 405; 509; 590; 704; 788; 877
3	105; 218; 313; 397; 485; 570; 656; 766; 870
4	105; 218; 335; 419; 532; 618; 698; 792
5	95; 196; 292; 372; 452; 534; 653; 745; 829
6	99; 208; 293; 390; 478; 561; 669; 773; 860
7	103; 211; 326; 406; 515; 624; 722; 822
8	108; 205; 299; 412; 501; 612; 731; 812; 892
9	88; 191; 278; 360; 443; 539; 644; 750; 854
10	80; 177; 277; 365; 476; 564; 661; 775; 887

**ВАРИАНТ 8**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

936	285	116	367	247	237	456	155	141	157
142	233	135	996	298	180	229	440	150	124
173	123	111	161	111	269	874	245	390	129
149	574	131	745	334	254	417	634	423	178
845	116	267	369	698	190	764	295	108	234
723	119	877	132	119	259	987	484	155	139
253	234	135	156	220	223	198	412	449	186
151	853	155	943	545	429	165	344	277	124
326	245	381	279	491	535	945	558	158	487
386	140	195	151	166	276	679	120	575	225

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 900 часов
1	73; 169; 282; 341; 425; 540; 663; 777
2	73; 147; 213; 305; 372; 461; 569; 666; 768; 873
3	109; 200; 286; 402; 480; 575; 718; 797; 871
4	112; 197; 286; 380; 486; 564; 665; 782; 889
5	92; 187; 260; 355; 476; 567; 668; 760; 865
6	88; 191; 313; 419; 533; 609; 700; 797
7	110; 221; 369; 448; 529; 643; 772; 887
8	94; 182; 280; 340; 436; 534; 638; 750; 875
9	99; 202; 274; 365; 441; 526; 643; 742; 825; 899
10	101; 193; 288; 419; 542; 635; 716; 799; 881



**ВАРИАНТ 9**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

350	244	69	234	145	196	389	23	251	127
226	118	219	204	120	180	406	182	74	240
206	257	181	104	130	341	245	59	226	161
147	71	219	361	162	112	67	182	34	76
143	67	119	190	281	437	226	37	41	148
228	37	296	51	^ 254	44	190	143	795	117
191	14	392	157	16	23	89	346	33	47
377	319	258	37	68	235	385	128	111	640
136	224	174	61	35	71	345	132	197	35
331	83	97	178	328	194	П78	120	106	109

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 600 часов
1	104; 200; 287; 373; 477; 586
2	96; 198; 314; 399; 513
3	81; 165; 277; 375; 475; 562
4	111; 226; 312; 413; 530
5	111; 209; 322; 406; 516; 596
6	83; 198; 288; 384; 468 565
7	99; 215; 317; 415; 506
8	84; 200; 316; 431; 516
9	109; 218; 330; 435; 536
10	85; 172; 271; 386; 496

**ВАРИАНТ 10**

Первый набор исходных данных (Экспоненциальное распределение):

55	87	105	18	386	187	118	227	65	89
106	42	186	113	147	306	202	168	44	563
173	119	41	57	86	59	38	151	348	41
165	395	185	382	67	351	16	540	41	31
96	468	37	19	263	58	267	443	260	130
116	211	243	225	77	175	276	762	634	436
341	670	23	41	89	486	137	18	55	139
412	362	120	346	29	34	21	123	140	89
162	567	117	34	73	44	123	32	82	113
176	137	49	190	133	598	115	656	178	167

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 1000 часов
1	115; 222; 328; 406; 486; 594; 696; 801; 896; 977
2	91; 215; 316; 411; 484; 603; 687; 797; 878
3	89; 175; 266; 360; 468; 604; 695; 813; 895
4	85; 170; 258; 382; 470; 579; 658; 739; 819; 920
5	115; 222; 327; 436; 550; 634; 732; 811; 933
6	86; 164; 247; 366; 495; 588; 713; 816; 939
7	105; 205; 290; 409; 473; 580; 680; 773; 869; 969
8	99; 199; 315; 430; 527; 650; 762; 844; 945
9	105; 220; 311; 389; 478; 563; 661; 734; 855; 968
10	106; 184; 284; 395; 490; 593; 697; 779; 922

**ВАРИАНТ 11**

Первый набор исходных данных (Равномерное распределение):

134	126	130	98	172	140	99	141	91	111
119	95	123	173	122	150	88	14	170	137
130	121	121	155	144	124	127	140	150	139
89	116	88	94	110	131	169	81	86	121
175	163	150	17	128	148	133	12.1	128	97
142	111	174	108	122	118	83	118	19	176
105	172	132	125	150	115	177	93	141	133
165	82	86	117	165	147	13	169	88	138
80	126	84	170	106	113	92	96	154	114
154	165	160	172	162	114	168	82	128	95

Второй набор исходных данных (Экспоненциальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	1; 1; 63; 75; 133; 356; 363; 403; 417
2	126; 240; 557
3	40; 72; 216; 220; 267; 305; 313; 474; 493
4	43; 234; 248; 431; 433; 583; 668; 680
5	35; 56; 70; 81; 225; 558; 568
6	18; 93; 121; 130; 229; 313; 461; 474; 532; 572; 603; 610
7	113; 375; 401; 479; 659
8	138; 163; 421; 479; 500; 636; 638; 671
9	222; 261; 404; 533; 568
10	55; 96; 111; 148; 252; 281; 633

**ВАРИАНТ 12**

(Первый набор исходных данных (Нормальное распределение):

975	12	162	130	124	146	113	П54	112	119
127	124	133	137	132	111	138	112	126	133
124	117	135	120	147	924	130	137	130	974
121	113	124	123	127	143	108	995	Н67	116
139	118	120	120	146	121	130	118	128	117
113	984	113	120	114	974	130	124	130	121
119	126	113	116	П56	147	128	141	129	122
122	129	140	140	952	113	128	121	113	103
119	136	120	934	120	966	114	И37	119	129
132	113	127	143	124	103	178	118	897	116

Второй набор исходных данных (Экспоненциальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 800 часов
1	112; 193; 247; 249; 284; 439
2	162; 255; 290; 317; 388; 456; 460; 661; 765
3	53; 335; 390; 401; 445; 610; 623; 792
4	73; 139; 140; 188; 204; 332; 555; 631
5	103; 165; 227; 513; 592; 718; 791
6	43; 158; 688; 792
7	17; 26; 339; 484; 529
8	27; 71; 203; 253; 281
9	216; 318; 669
10	146; 146; 240; 315; 543; 648

**ВАРИАНТ 13**

Первый набор исходных данных (Гамма-распределение):

120	221	151	212	445	575	411	415	152	750
123	130	235	875	147	316	613	745	251	319
120	145	120	309	432	243	649	158	344	789
247	197	623	254	655	723	696	267	997	326
128	130	158	462	346	294	120	30	165	215
232	186	938	146	518	248	177	848	127	198
239	450	216	559	239	560	263	144	139	261
378	289	768	310	413	351	141	292	319	969
56	877	357	265	796	584	243	394	614	146
422	255	360	360	824	114	242	396	166	224

Второй набор исходных данных (Экспоненциальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	204; 221; 345; 376; 537; 697
2	2; 39; 71; 104; 118; 213; 544; 596; 608; 657
3	138; 314; 387; 467; 471; 556; 699
4	8; 11; 52; 94* 192; 476; 491; 527; 655
5	106; 168; 325; 360; 690
6	192; 207; 217; 362; 426
7	225; 440; 618; 657; 667
8	371; 420; 500
9	85; 371; 568; 579; 611; 625; 663
10	80; 111; 152; 162; 369; 394; 462; 551

**ВАРИАНТ 14**

Первый набор исходных данных (Равномерное распределение):

1102	133	1204	136	1109	171	167	159	176	153
126	177	128	118	127	8234	107	120	155	165
171	159	159	136	1405	142	9446	9345	176	127
108	161	1306	169	151	116	8546	125	119	178
164	111	145	1306	151	1203	148	1103	112	158
П56	120	173	136	126	160	834	124	139	1101
1405	120	9154	129	9554	9565	936	127	9322	1320
4582	8433	9345	9347	9450	1467	1322	389	9333	3157
170	1635	1124	1453	1705	996	9565	1155	4193	3134
1386	6119	9658	9561	1313	1339	8344	1675	8546	1275

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 700 часов
1	106; 208; 279; 390; 488; 582; 656
2	98; 186; 304; 377; 477; 539; 622
3	100; 217; 337; 467; 584; 670
4	121; 217; 290; 397; 473; 595
5	100; 212; 301; 385; 480; 605; 694
6	131; 213; 292; 393; 481; 564; 688
7	130; 229; 309; 440; 521; 601; 690
8	87; 196; 297; 403; 499; 610
9	117; 236; 351; 428; 507; 594
10	103; 205; 295; 402; 516; 603

**ВАРИАНТ 15**

Первый набор исходных данных (Нормальное распределение):

992	9143	1304	1143	973	913	993	1301	993	953
1309	983	1193	843	1302	1203	1307	973	1103	1302
883	993	939	1304	1303	П43	936	835	1309	893
793	1300	1311	1303	839	932	1309	3344	9331	836
1342	9340	1302	931	839	953	9833	8733	1317	1300
953	983	973	1307	930	1123	853	1301	943	873
993	933	1304	930	9303	1309	893	935	1302	883
1300	983	933	1304	1307	983	1304	1123	1300	1305
1315	1313	333	П345	9333	9421	8223	1200	9423	1232
9210	9234	1302	П211	9234	9231	9233	8327	1315	9373

Второй набор исходных данных (Равномерное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 600 часов
1	104; 197; 304; 422; 511; 597
2	86; 184; 300; 382; 492; 595
3	106; 218; 312; 395; 493; 573
4	94; 200; 302; 409; 498; 589
5	117; 213; 316; 433; 516
6	94; 186; 293; 401; 507
7	90; 188; 272; 379; 478; 577
8	104; 210; 309; 412; 506; 588
9	99; 194; 300; 419; 530
10	109; 227; 331; 426; 524

**ВАРИАНТ 16**

Первый набор исходных данных (Равномерное распределение):

164	824	935	157	1402	1406	924	163	165	942
118	176	118	142	1401	1402	177	155	175	131
176	1405	854	126	113	944	1409	159	834	964
148	133	145	127	146	139	155	144	984	940
101	1406	116	854	165	123	874	147	170	1402
112	854	1407	124	164	116	125	166	139	115
172	934	144	112	156	144	984	111	137	128
884	153	1408	161	162	964	167	148	940	127
150	162	814	864	128	1408	894	120	133	120
914	141	112	944	177	1406	438	1401	132	924

Второй набор исходных данных (Нормальное распределение):

Номер элемента	Моменты отказа на периоде времени 1000 часов
1	118; 202; 326; 434; 505; 610; 712; 791; 901; 984
2	96; 173; 304; 405; 524; 643; 741; 853; 940
3	116; 197; 269; 381; 483; 587; 687; 804; 923
4	111; 182; 293; 438; 545; 639; 751; 845; 978
5	76; 185; 286; 390; 492; 579; 664; 748; 822; 898
6	111; 239; 360; 469; 555; 652; 739; 824; 923
7	131; 223; 344; 444; 551; 674; 792; 917
8	92; 185; 283; 372; 499; 585; 711; 808; 904
9	95; 186; 273; 353; 447; 568; 689; 793; 865; 944
10	79; 190; 324; 408; 485; 591; 665; 776; 855; 930



## Лабораторная работа №8

### Исследование надежности и риска нерезервированной технической системы

**Цель работы:** Исследовать надежности и риски нерезервированной технической системы.

**Программа работы:**

Дано:

- структурная схема системы в виде основного (последовательного в смысле надежности) соединения элементов;
- $n$  – число элементов системы;
- $\lambda_i$  – интенсивность отказа  $i$ -го элемента системы,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $r_i$  – риск из-за отказа  $i$ -го элемента системы,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $R$  – допустимый риск;
- $T$  – суммарное время работы системы.

Определить:

$B$  показатели надежности системы:

- $P_c(t)$  – вероятность безотказной работы системы в течение времени  $t$ , а также ее значения при  $t = T$  и  $t = T_1$
- $T_1$  – среднее время безотказной работы системы;
- $R_c(t)$  – риск системы как функцию времени; значение риска при  $t = T$  и  $t = T_1$
- возможность расчета риска по приближенной формуле.

Варианты заданий приведены далее *в разделе*

### Краткие сведения из теории

Основными показателями надежности нерезервированной невосстанавливаемой системы являются:  $P_c(t)$  — вероятность безотказной работы системы в течение времени  $t$ ,  $T_1$  — среднее время безотказной работы. При постоянных интенсивностях отказов элементов

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}, T_1 = \frac{1}{\lambda_c}$$

где  $\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  - интенсивность отказа системы.

Риск системы  $R_c(t)$  и  $R_c^*(t)$  вычисляются по следующим формулам:

$$R_c(t) = \frac{Q_c(t)}{\lambda_c} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i,$$

$$R_c^*(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) r_i,$$

$$G_R(t, n) = \frac{R_c(t)}{R_c^*(t)} = \frac{1 - e^{-n\lambda t}}{n(1 - e^{-\lambda t})}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_R(t, n) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} G_R(t, n) = \frac{1}{n}$$

Это означает, что с увеличением длительности времени работы системы погрешность приближенной формулы увеличивается.

### Последовательность выполнения работы

Лабораторную работу следует выполнять в такой последовательности:

1. Вычислить показатели надежности системы  $P_c(t)$  и  $T_1$ . Значение вероятности безотказной работы  $P_c(t)$  следует получить при  $t = T$  и  $t = T_1$  ..
2. Исследовать функцию риска системы по точной формуле (2.1), для чего:
  - получить формулу риска для заданных  $n, \lambda_i, r_i$ .
  - исследовать зависимость  $R_c(t)$ , представив функцию в виде графика и таблицы;
  - вычислить значение риска для исходных данных своего варианта при  $t = T$  и  $t = T_1$ .
3. Исследовать зависимость  $G_R(t, n)$  при допущении, что элементы системы равнонадежны и интенсивность отказа каждого элемента равна их средней интенсивности отказов, т. е.

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

4. Сделать выводы.

По результатам лабораторной работы представляется отчет, в котором обязательными являются следующие пункты:

1. Постановка задачи.
2. Расчетные формулы.

3. Численные значения показателей надежности и риска исследуемой системы.
4. Значение времени непрерывной работы системы, при котором обеспечивается требуемое значение риска.
5. Графики и таблицы функций риска.
6. Выводы по результатам исследований.

### Пример выполнения лабораторной работы

Пусть дана система со следующими исходными данными:

- число элементов системы  $n = 10$ ;
- время непрерывной работы  $T = 1000$  час;
- допустимый риск  $R = 5000$  усл. ед.

Значения риска и интенсивностей отказов элементов приведены в табл. 2.1.

Далее приводится последовательность выполнения работы. Исследования будем проводить с помощью программы Microsoft Excel.

Таблица 2.1. Исходные данные примера.

Исходные дан-										
Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda \cdot 10^{-5}$ ,	1,2	0,8	0,5	1	1,5	0,6	0,0	0,0	1	1,5
$r$ , усл. ед.	200	300	800	100	120	60	500	600	100	120

### Определение показателей надежности системы

Интенсивность отказов системы равна  $\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

Подставляя в это выражение значения интенсивностей отказов элементов из табл. 2.1, получим:  $\lambda = 8,24 \cdot 10^{-5} \text{ час}^{-1}$  (технология вычисления  $\lambda_c$  приведена в разделе 2.4.2).

Тогда вероятность и среднее время безотказной работы будут равны:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-8,24 \cdot 10^{-5} t}, \quad T_1 = \frac{1}{\lambda_c} = 12316 \text{ час.}$$

При  $t = T = 1000$  час,  $P_c(1000) = e^{-8,24 \cdot 10^{-5} \cdot 1000} = 0,92$

При  $t = T_1 = 12316$  час,  $P_c(12316) = e^{-8,24 \cdot 10^{-5} \cdot 12316} = 0,367$

### Определение риска системы по точной формуле

Сначала нужно ввести исходные данные своего варианта, так как показано на рисунке 2.4.2.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	n=	10		λ=	1,2	0,8	0,5	1	1,5	0,6	0,09	0,05	1	1,5
3	T=	1000		r=	2000	300	8000	1000	1200	60	5000	6000	100	120
4	R=	5000												

Рис 2.4.2.1

**Примечание:** данные можно вводить в любые ячейки, но в данном тексте будут использоваться указания на эти конкретные ячейки

Вычисление интенсивности отказов системы  $\lambda_c$  осуществляется так:

Т.к.  $\lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  то выбираем ячейку C8 и вводим :  
 =СУММ(E2:N2)\*0,00001

Для вычисления суммы  $\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i$  необходимо получить скалярное произведение векторов  $\lambda$  и  $r$ , для этого в ячейке E5 вводим: =E2\*E3  
 повторяем эти действия по всем значениям  $\lambda_i$  и  $r_i$  (диапазон ячеек от E5 до N5)

Далее вычисляем  $\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i$ . В ячейке C10 вводим:  
 =СУММ(E5:N5)\*0,00001

Результатом мы получим следующее: (рис 2.4.2.2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	n=	10		λ=	1,2	0,8	0,5	1	1,5	0,6	0,09	0,05	1	1,5
3	T=	1000		r=	2000	300	8000	1000	1200	60	5000	6000	100	120
4	R=	5000												
5				λ*r=	2400	240	4000	1000	1800	36	450	300	100	180
6														
7														
8		Σλ=	0,0000824											
9														
10		Σλ*r=	0,10506											

Рис 2.4.2.2

вероятность и среднее время безотказной работы равняются:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-8,24 \cdot 10^{-5} t}, \quad T_1 = \frac{1}{\lambda_c} \text{ час.}$$

Для вычисления  $T_1$  в ячейку Н8 вводим:  $=1/C8$

Для вычисления  $P_c(t)$  при  $t= T$ , в ячейку К8 вводим:  $=EXP(-C8*B3)$

Для вычисления  $P_c(t)$  при  $t= T_1$ , в ячейку К9 вводим:  $=EXP(-C8*H8)$

Теперь необходимо найти значение функции риска при  $t= T$  и  $t= T_1$

$$\text{Функция риска: } R_c(t) = \frac{Q_c(t)}{\lambda_c} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i,$$

Так как  $Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c t}$ ,  $\lambda_c = 8,24 \cdot 10^{-5}$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i = 0,10506$ , то в соответствии с (2.1) функция риска будет равна:

$$R_c(t) = \frac{1 - e^{-8,24 \cdot 10^{-5} t}}{8,24 \cdot 10^{-5}} \cdot 0,10506,$$

Для вычисления  $R_c(t)$  при  $t= T$ , в ячейку К10 вводим:  $=(1-EXP(-C8*B3))/C8*C10$

Для вычисления  $R_c(t)$  при  $t= T_1$ , в ячейку К11 вводим:  $=(1-EXP(-C8*H8))/C8*C10$

Для  $t = T_1 = 12136$  час значение риска  $R_c(t) = 805,953$ . Из полученных значений  $R_c(t)$  видно, что риск исследуемой системы ниже допустимого значения, равного 5000 условных единиц.

Результатом мы получим следующее: (рис 2.4.2.3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2					введите исходные данные:									
3	n=	10		λ=	1,2	0,8	0,5	1	1,5	0,6	0,09	0,05	1	1,5
4	T=	1000		r=	2000	300	8000	1000	1200	60	5000	6000	100	120
5	R=	5000												
6				λ*r=	2400	240	4000	1000	1800	36	450	300	100	180
7														
8		Σλ=	0,0000824				T1=	12135,92		P_c(T)=	0,920904			
9										P_c(T1)=	0,367879			
10		Σλ*r=	0,10506							R_c(T)=	100,848			
11										R_c(T1)=	805,9537			

Рис 2.4.2.3

### Исследование функции риска

Предполагая, что все элементы системы равнонадежны, а интенсивность

отказа каждого элемента  $\lambda = \frac{\lambda_c}{n} = 0,824 \cdot 10^{-5}$  час<sup>-1</sup> (найдем это значение подставив в ячейку F14 формулу:  $=C8/B2$ ), получим следующее выражение риска:

$$R_c(t) = \frac{1 - e^{-n\lambda t}}{n\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i = \frac{1 - e^{-0,824 \cdot 10^{-5} n t}}{0,824 \cdot 10^{-5} n} \cdot 10506 \cdot 10^{-5} = 12750 \cdot \frac{1 - e^{-0,824 \cdot 10^{-5} n t}}{n}$$

Найдем зависимость  $R_c(t)$  при различных значениях  $n$  в виде графиков и таблиц, используя возможности Excel.

Сначала введем временной диапазон  $t$  (см. рис 2.4.3.1 )

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
16												
17												
18			№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19			время $t$	0	1500	3000	4500	6000	7500	9000	10500	12000

Рис 2.4.3.1

Далее введем в ячейку D20 формулу нахождения  $R_c(t)$  при  $n$ :

$$=(1-EXP(-\$B\$2*\$F\$14*D19))/\$B\$2/\$F\$14*\$C\$10$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени  $t$  (ячейки D20:L20). см. рис 2.4.3.2

Введем в ячейку D21 формулу нахождения  $R_c(t)$  при  $3n$ :

$$=(1-EXP(-3*\$B\$2*\$F\$14*D19))/3/\$B\$2/\$F\$14*\$C\$10$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени  $t$  (ячейки D21:L21). см. рис 2.4.3.2

Введем в ячейку D22 формулу нахождения  $R_c(t)$  при  $5n$ :

$$=(1-EXP(-5*\$B\$2*\$F\$14*D19))/5/\$B\$2/\$F\$14*\$C\$10$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени  $t$  (ячейки D21:L21). см. рис 2.4.3.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
18			№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
19			время $t$	0	1500	3000	4500	6000	7500	9000	10500	12000	
20			$R_c(t)$ при $n$	0	148,240089	279,2448	395,018	497,3306	587,7477	667,6523	738,2666	800,6709	
21			$R_c(t)$ при $3n$	0	131,672665	222,5508	285,2732	328,5631	358,441	379,0622	393,2945	403,1175	
22			$R_c(t)$ при $5n$	0	117,549542	180,9113	215,0646	233,474	243,397	248,7457	251,6288	253,1829	

Рис 2.4.3.2

Из строки 20 видно, что риск возрастает с увеличением времени функционирования системы  $t$ . Так, например, с увеличением с 1500 до 12 000 часов риск увеличивается примерно с 150 до 800 условных единиц.

Построим график:

1) пункт меню: вставка \ диаграмма

2)выбираем вид графика

3)выбираем диапазон: =Лист1!\$C\$20:\$L\$22

4)ось x: t ось y: Rc(t)

5) ГОТОВО

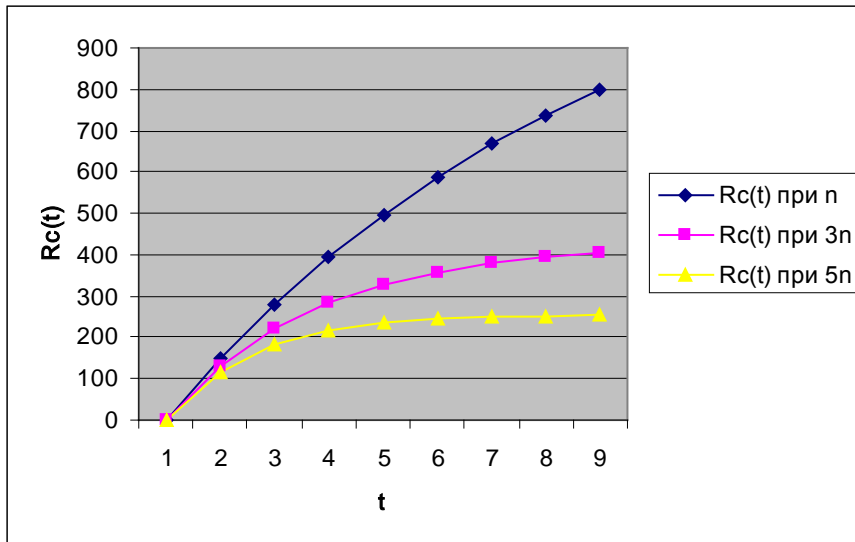


рис 2.4.3.3

**Примечание:** если график не явный то можно изменять значения t (необходимо соблюдать выбранный вами шаг  $\Delta t$ )

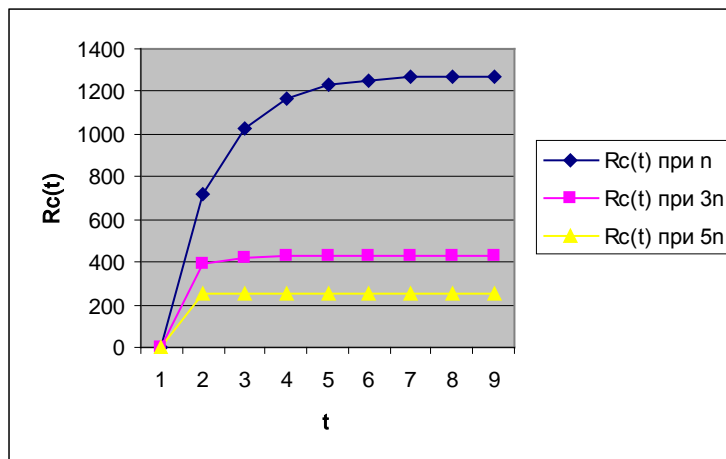


Рис2.4.3.4  $R_c(t)$  в диапазоне  $t[0; 80000]$  с шагом  $\Delta t= 10000$

Из графика видно, что с увеличением времени  $t$  работы системы техногенный риск функционирования системы увеличивается и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к постоянной величине, равной среднему значению риска.

## Определение критического времени работы системы

Так как  $R_c(t)$  возрастает с ростом  $t$ , то представляет интерес предельное время, выше которого риск будет превышать допустимое значение. Решение задачи сводится к определению корня уравнения

$$R = \frac{Q_c(\tau)}{\lambda_c} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i.$$

Так как в рассматриваемом случае

$\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i = 10506 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_c = 8,24 \cdot 10^{-5} \text{ час}^{-1}$ ,  $R = 5000$ , то, подставляя эти значения в последнее выражение, получим:

$$5000 = 1275(1 - e^{-8,24 \cdot 10^{-5} \tau})$$

Решая это уравнение получим критическое значение  $\tau$ .

В ячейке C16 введем:  $=-LN(1-B4*C8/C10)/C8$

В нашем примере вещественного корня нет. Это значит, что при любом  $t$  риск системы не превосходит допустимого значения.

## Исследование зависимости $G_R(t, n)$

Для анализа зависимости  $G_R(t, n)$  представим эту функцию в виде графиков и таблиц. Графики позволят сделать качественный анализ, а таблицы — количественный. Далее описываются процедуры представления функций в виде графиков и таблиц с помощью Excel.

Предположим, что система состоит из  $n$  равнонадежных элементов, каждый из которых имеет интенсивность отказов  $\lambda$ . Тогда функция  $G_R(t, n)$  будет выражаться формулой

$$G_R(t, n) = \frac{R_c(t)}{R_c^*(t)} = \frac{1 - e^{-n\lambda t}}{n(1 - e^{-\lambda t})}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
43														
44	исследование зависимости Gr(t,n)													
45														

Сначала введем временной диапазон  $t$  (см. рис 2.4.4.1)

Рис 2.4.4.1

Далее введем в ячейку D48 формулу нахождения  $G_R(t, n)$  при  $n$ :



$$=(1-EXP(-\$B\$2*\$F\$14*D47))/\$B\$2/(1-EXP(-\$F\$14*D47))$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени t (ячейки D48:M48). см. рис 2.4.4.2

Введем в ячейку D49 формулу нахождения  $G_R(t, n)$  при  $3n$ :

$$=(1-EXP(-3*\$B\$2*\$F\$14*D47))/3/\$B\$2/(1-EXP(-\$F\$14*D47))$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени t (ячейки D49:M49). см. рис 2.4.4.2

Введем в ячейку D50 формулу нахождения  $G_R(t, n)$  при  $5n$ :

$$=(1-EXP(-5*\$B\$2*\$F\$14*D47))/5/\$B\$2/(1-EXP(-\$F\$14*D47))$$

”растянем” эту формулу по всему диапазону времени t (ячейки D50:M50). см. рис 2.4.4.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
43													
44			исследование зависимости $G_R(t, n)$										
45													
46			№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
47			время t	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
48			$G_R(t, n)$ при n	0,96387	0,9295637	0,896981	0,866024	0,836601	0,808627	0,78202	0,756706	0,732613	0,709673
49			$G_R(t, n)$ при $3n$	0,88964	0,79548178	0,71487	0,645614	0,585899	0,534222	0,489334	0,450197	0,415944	0,385851
50			$G_R(t, n)$ при $5n$	0,82298	0,68685023	0,581117	0,498148	0,432351	0,379613	0,336886	0,301898	0,272948	0,248748

рис 2.4.4.2

Из таблицы(рис 2.4.4.2) видно, что функция  $G_R(t, n)$  является убывающей. Это означает, что с увеличением времени и увеличением числа элементов погрешность приближенной формулы возрастает.

Построим графики для значений  $n$ : для  $n, 3n, 5n$ , где  $n$  - число элементов системы.

1) пункт меню: вставка \ диаграмма

2)выбираем вид графика

3)выбираем диапазон: =Лист1!\$C\$48:\$M\$50

4) ось x:  $t$  ось y:  $G_R(t, n)$

5) готово

В итоге получим семейство кривых из которых можно сделать два важных вывода(рис 2.4.4.3):

1. Чем больше элементов  $n$  и чем больше время работы системы, тем больше погрешность приближенной формулы.
2. Приближенной формулой можно пользоваться в том случае, когда время работы системы мало и риск, вычисленный по приближенной формуле, не превышает допустимого значения.

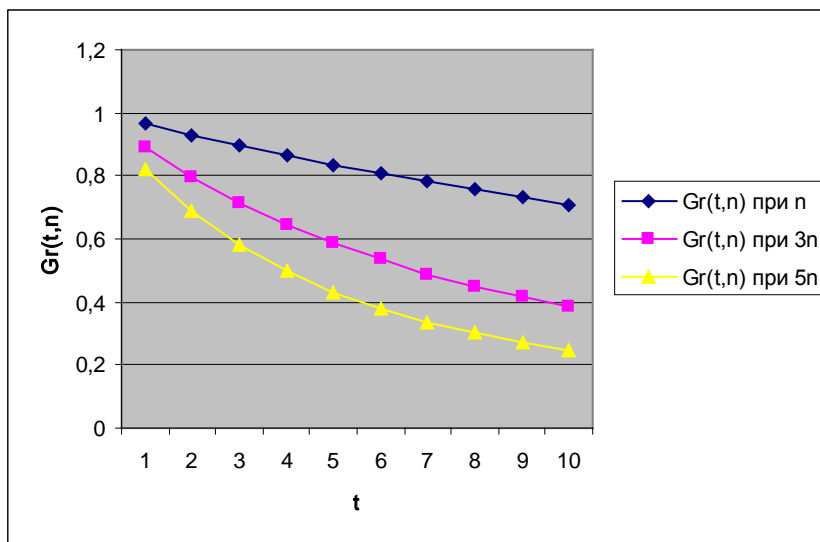


Рис. 2.4.4.3 График функции  $G_R(t, n)$

### Варианты заданий к лабораторной работе

В заданиях приняты следующие обозначения:

$T$  — суммарное время работы системы, час.

$R$  — допустимый риск, усл ед.

$\lambda_i$  — интенсивность отказов  $i$ -го элемента, час<sup>-1</sup>.

$r_i$  — риск системы из-за отказа  $i$ -го элемента, усл. ед.

#### Вариант 1

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
$r$ , усл.ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

$T = 1450$  час,  $R = 7500$  усл. ед.

### Вариант 2

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	2,1	1,5	3,2	2,2	3,9	2,4	1,4	1,8
$r$ , усл.ед.	6800	9200	2000	20000	6450	5200	1680	160

$$T = 1350 \text{ час}, R = 3500 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 3

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	0,1	2,5	3,1	1,2	1,6	2,3	0,4	4,6
$r$ , усл.ед.	10500	8000	6000	285	6000	5200	68000	1400

$$T = 2350 \text{ час}, R = 2500 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 4

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,6	1,3	2,3	4,1	3,2	2,7	0,4	0,8
$r$ , усл.ед.	3500	6450	3250	28500	6780	4280	2680	1800

$$T = 3500 \text{ час}, R = 7000 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 5

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,1	2,5	3,7	0,2	2,6	2,4	1,4	3,8
$r$ , усл.ед.	5200	4200	1400	2850	6460	44560	8080	3000

$$T = 4000 \text{ час}, R = 7500 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 6

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	3,1	1,5	2,9	4,7	3,2	2,9	2,4	1,8
$r$ , усл.ед.	2500	6000	3000	2850	6180	4200	680	1000

$$T = 1450 \text{ час}, R = 6500 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 7

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,2	2,8	4,3	4,1	0,6	0,1	2,5	1,7
$r$ , усл.ед.	4500	6500	3100	1850	6350	5200	380	1400

$$T = 4350 \text{ час}, R = 3500 \text{ усл. ед.}$$

### Вариант 8

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	0,8	0,7	2,7	1,9	4,6	2,2	3,4	4,2
$r$ , усл.ед.	500	600	300	285	618	420	680	100

$$T = 4450 \text{ час}, R = 6500 \text{ усл. ед.}$$

**Вариант 9**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	3,1	2,5	3,2	2,2	2,6	2,4	4,1	3,8
$r$ , усл.ед.	1500	2000	3100	3850	3180	3200	3680	3000

$T = 2050$  час,  $R = 3700$  усл. ед.

**Вариант 10**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,1	2,5	3	4,4	3,3	2,2	4,6	4,1
$r$ , усл.ед.	3500	6300	3300	3330	6380	4300	6830	1300

$T = 1290$  час,  $R = 5700$  усл. ед.

**Вариант 11**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	2	0,5	1	4	3	2	4	4
$r$ , усл.ед.	3500	4000	3400	4850	4180	4400	6480	1400

$T = 1540$  час,  $R = 5070$  усл. ед.

**Вариант 12**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1,1	0,5	3	4,2	3,6	2,1	4,4	4,8
$r$ , усл.ед.	3500	5000	3500	5850	5180	5200	5680	1500

$T = 4150$  час,  $R = 5078$  усл. ед.

**Вариант 13**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	1	0,2	2,3	2	3,3	2,4	4,6	4,1
$r$ , усл.ед.	3500	6500	5000	2550	6580	4500	6580	1050

$T = 5450$  час,  $R = 750$  усл. ед.

**Вариант 14**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	3	3,5	2	4	3	2,5	2,4	3,8
$r$ , усл.ед.	5500	6050	3050	5800	6150	4250	6850	1550

$T = 430$  час,  $R = 700$  усл. ед.

**Вариант 15**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	2,1	2,5	2,3	4,1	4,6	4,1	4,2	4,5
$r$ , усл.ед.	4500	6040	3400	4850	6480	4400	6840	1400

$T = 1290$  час,  $R = 550$  усл. ед.

**Вариант 16**

Номера элементов	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda \cdot 10^{-5}$ , час <sup>-1</sup>	3,1	1,5	3,5	4,6	1,6	2,7	3,4	4,4
$r$ , усл.ед.	2540	6400	30400	2840	6140	4240	6480	1040

$T = 3500$  час,  $R = 500$  усл. ед.

## Лабораторной работе №9

Исследование надежности и риска восстанавливаемой нерезервированной системы

**Цель работы:** исследовать надежность и риски восстанавливаемой нерезервированной системы.

**Программа работы:**

Дано:

$n$  - число элементов нерезервированной системы;

$\lambda_i, \mu_i$  - интенсивность отказа и восстановление элемента  $i$ -го типа,  
 $1, 2, \dots, n$

$T$  - общее время работы системы;

$r_i$  - риск системы из-за отказа  $i$ -го элемента,  $i=1, 2, \dots, n$ ;

$R$  - допустимый риск.

Определить:

$T$  - наработку системы на отказ;

$K(t)$ ,  $K$  - функция и коэффициент готовности системы;

$R$  - техногенный риск системы.

Необходимо также исследовать свойства восстанавливаемой нерезервированной системы.

Исходные данные индивидуальные задания приведены далее в разделе

### Краткие сведения из теории

Основными показателями надежности восстанавливаемых технических систем является наработка на отказ  $T$ , функция готовности  $K(t)$  и коэффициент надежности  $K$ .

В общем случае эти показатели зависят от интенсивности отказов и восстановлений элементов системы, времени ее непрерывной работы, вида и краткости резервирования. В случае не резервированной системы они вычисляются по следующим формулам:

$$K_r(t) = \frac{\mu_c}{\lambda_c + \mu_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \mu_c} e^{-(\lambda_c + \mu_c)t},$$

$$K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t) = \frac{\mu_c}{\lambda_c + \mu_c},$$

$$K_1 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}},$$

$$T = \frac{1}{\lambda_c},$$

Где  $\lambda_i$  - интенсивность отказа системы;

$\mu_i$  - интенсивность восстановления системы вычисляется по формуле:

$$\mu_c = \frac{\lambda_c}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

Следует иметь в виду, что формула (5.1) является приближенной погрешностью которой зависит от исходных данных.

$p_i(t)$  состояний нерезервированной восстанавливаемой системы имеет вид, приведенный на рис. 5.1.

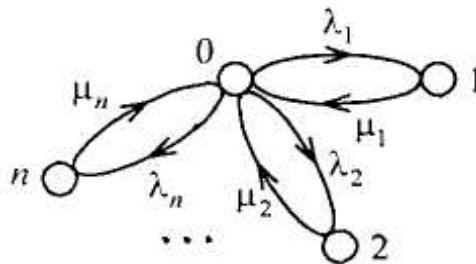


Рис 5.1.  $p_i(t)$  состояний нерезервированной восстанавливаемой системы.

Функцию готовности системы можно определить следующими двумя способами:

**Способ 1:** Обозначим через  $p_i(t)$  вероятность пребывания системы в момент времени в состоянии  $i=0,1,2,\dots,n$ . Тогда функционирование восстанавливаемой нерезервированной системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений, составленной по графику состояний (рис 5.1)

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_c p_0(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t); \\ \frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_i p_0(t) - \mu_i p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений решается численными методами при следующих начальных условиях:  $p_i = 1, p_i(0) = p_i(0) - \dots - p_n(0) = 0$ . Тогда функция готовности системы равна вероятности ее исправного состояния, т.е.  $K_{\bar{a}}(t) = p_i(t)$ .

**Способ 2:** Будем рассматривать не резервированную систему как один элемент имеющий интенсивность отказа  $\lambda_n$  и интенсивность восстановления  $\mu_n$ . Тогда функционирование системы можно описать графом, изображенным на рис. 5.2.

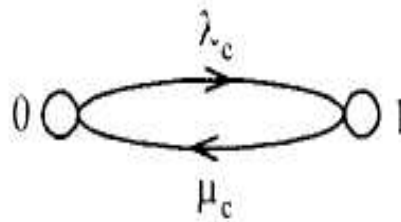


Рис 5.2 Обобщенный график состояний системы.

Из графика следует, что система может находиться в двух состояниях: исправном (0) и отказом (1). Тогда ее функционирование можно описать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_c p_0(t) + \mu_c p_1(t); \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_c p_0(t) - \mu_c p_1(t) \end{cases}$$

С начальными условиями:  $p_i = 1, p_i(0) = p_i(0) - 0$ . Решением этой системы является функция (5.1).

Восстанавливаемые системы – это системы многократного использования в течение времени «жизни» они могут отказывать и ремонтироваться. Тогда общий риск системы можно вычислить по формуле:

$$R(t) = \int_0^t K_r(\tau) d\tau \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i .$$

Расчет функции готовности  $K_A(t)$  является сложной задачей. Поэтому целесообразно пользоваться следующими двухсторонними оценками для вычисления риска системы:

$$K_1 t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i \leq R(t) \leq t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i ,$$

$K_A(t)$  - коэффициент готовности системы.

Расставляемые нерезервированные технические системы в смысле надежности имеют следующие важные свойства:

Наработка на отказ системы не зависит от восстановления и численно равна среднему времени ее безотказной работы. Это свойство присуще лишь таким системам, элементы которых имеют постоянные интенсивности отказов.

Функция готовности является убывающей функцией времени, при  $f=0$ ,  $K_r(0) = 1$  и с ростом  $f$  убывает и стремится к постоянной величине, равной коэффициенту готовности. Это свойство также справедливо для систем, элементы которых имеют постоянные интенсивности отказов.

Риск высоконадежной системы линейно возрастает со временем, определяется только надежностью техники и практически не зависит от интенсивности ее восстановления.

### **Последовательность выполнения работы.**

Лабораторную работу целесообразно выполнять в такой последовательности:

- ▣ Определить наработку на отказ системы.
- ▣ Исследовать функцию и коэффициент готовности системы.
- ▣ Выполнить анализ риска системы.

Отчет о Лабораторной работе должен содержать следующие пункты:

- Постановка задачи.
- Уравнения и расчеты формулы.
- Таблицы и графики.
- Выводы по каждому пункту и по результатам работы в целом.

### **Пример выполнения лабораторной работы.**

Пусть нерезервированная система имеет следующие исходные данные:

- Число элементов в системы  $n=10$ ;



- Время жизни (долговечность) системы T-1000 час;
- Допустимый риск системы R < 2600 усл.ед;
- Значение риска, интенсивностей отказов и восстановления элементов системы приведены в таб. 5.1.

### Практическая часть:

Лабораторную работу целесообразно выполнять в такой последовательности:

- ▣ Определить наработку на отказ системы.
- ▣ Исследовать функцию и коэффициент готовности системы.
- ▣ Выполнить анализ риска системы.

Отчет о лабораторной работе должен содержать следующие пункты:

- Постановка задачи.
- Уравнения и расчеты формулы.
- Таблицы и графики.
- Выводы по результатам работы.

В качестве примера рассмотрим следующий вариант системы

λ	0,2	0,3	0,7	0,4	0,1	0,25	0,8	0,9
μ	1	2,5	1,6	1,6	0,8	7	3,2	0,4
г	1000	780	10000	700	900	380	1000	600

n=8

T=1200

### 1. Определение наработки на отказ системы

В случае не резервированной системы наработка на отказ T вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{\lambda_c}, \text{ где } \lambda_c = \sum \lambda_i$$

Сначала производится расчет  $\lambda_c$ , а затем высчитывается T

$\lambda_c =$	3,65
НАРАБОТКА НА ОТКАЗ ( T ) =	0,273973

### 2. Исследование функции готовности системы и расчет коэффициента готовности системы

Функция готовности K(t) и коэффициент надежности K зависят от интенсивности отказов и восстановлений элементов системы, времени ее

непрерывной работы. Эти показатели вычисляются по следующим формулам:

$$K_t = \lim_{t \rightarrow \infty} K_r(t) = \frac{\mu_c}{\lambda_c + \mu_c},$$

$$K_t = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}},$$

Коэффициент готовности системы подсчитывается посредством вычисленных заранее  $\lambda_c$  и  $\mu_c$ .

$\mu_c =$	0,995035
$\lambda_c =$	3,65
<b>КОЭФИЦИЕНТ НАДЕЖНОСТИ (<math>K_r</math>) =</b>	<b>0,214215</b>

Также вычисляется функция готовности для всех  $\lambda_i$  и  $\mu_i$ .

<b>ФУНКЦИЯ ГОТОВНОСТИ</b>	0,833333	0,892857	0,695652	0,8	0,888889	0,965517	0,8	0,307692
-------------------------------	----------	----------	----------	-----	----------	----------	-----	----------

Строятся графики зависимостей функции готовности от интенсивности отказа и от интенсивности восстановления.

ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ ФУНКЦИИ ГОТОВНОСТИ ОТ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗА

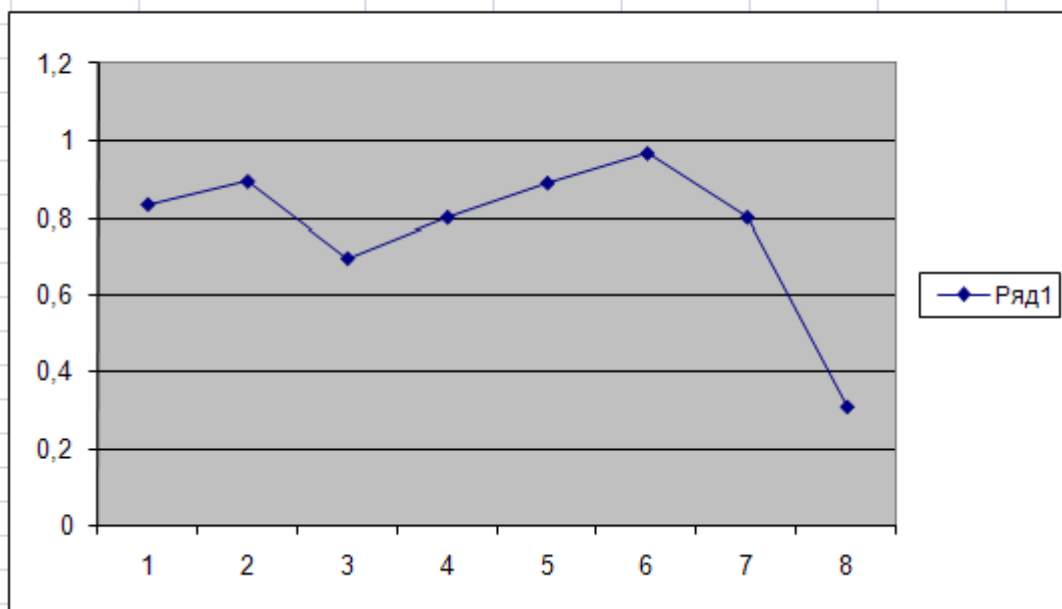
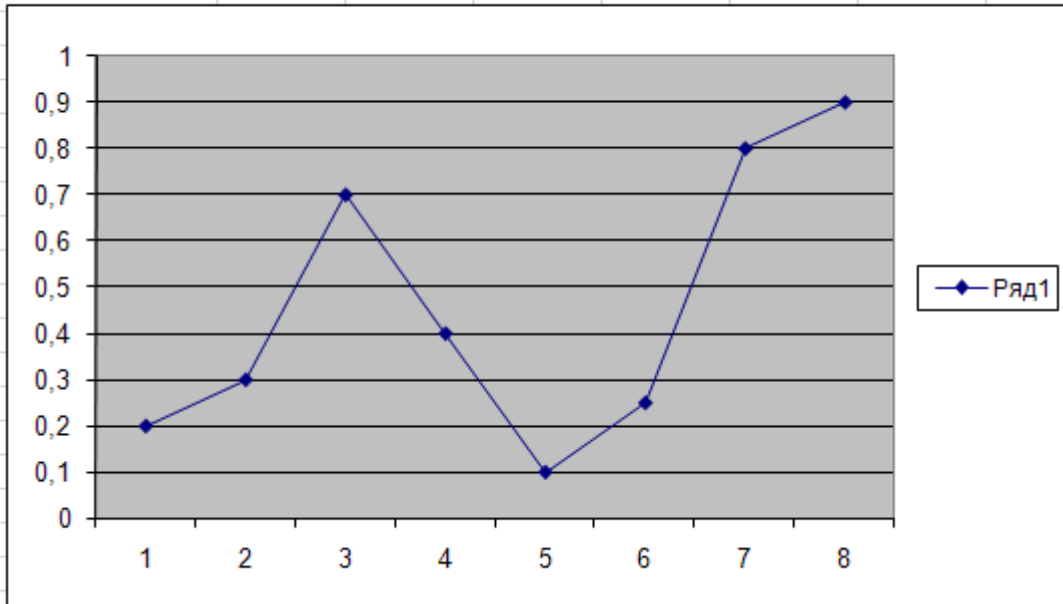


ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ Ф-ИИ ГОТ-ТИ ОТ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ



### 3. Анализ риска системы

Риск системы может быть приближенно подсчитан следующим образом.

Известно, что риск системы удовлетворяет следующему неравенству

$$K_r t \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i \cdot 10^{-4} \leq R(t) \leq t \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i \cdot 10^{-4}$$

Поэтому по - отдельности считаются левая и правая части неравенства

АНАЛИЗ РИСКА		НИЖЕ ПРИВЕДЕНЫ ГРАНИЦЫ РИСКА СИСТЕМЫ	
ЛЕВАЯ ГРАНИЦА	237,4955	ПРАВАЯ ГРАНИЦА	1108,68

Т.е.  $237,4955 \leq R(t) \leq 1108,68$

Риск системы можно считать приближенно равным среднему арифметическому из полученных оценок. Так как техногенный риск меньше допустимого, равного 2500, то такая система пригодна для эксплуатации.

### Варианты заданий к лабораторной работе.

В вариантах приняты обозначения:

T- время жизни (долговечность) системы, в часах;

R- допустимый риск, в усл.ед;

$\lambda$  - интенсивность отказа элемента i-го типа, в часах;

r- риск системы из-за отказа i-го элемента, в усл.ед;

$\mu$  - интенсивность восстановления i-го элемента системы, в часах;

### Вариант 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,2	0,25	0,05	0,06	0,1	0,7	0,34	0,08
$\mu$	0,2	0,16	0,07	0,08	0,8	1	0,85	0,6
$r$	65	38	3000	12000	800	340	640	830

$T = 1200$  час,

$R = 2600$  усл. ед.

### Вариант 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,2	0,25	0,05	0,06	0,1	0,7	0,34	0,08
$\mu$	0,2	0,16	0,07	0,08	0,8	1	0,85	0,6
$r$	65	38	3000	12000	800	340	640	830

$T = 2000$  час,

$R = 3000$  усл. ед.

### Вариант 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,2	0,3	0,7	0,4	0,1	0,25	0,8	0,9
$\mu$	1	2,5	1,6	1,6	0,8	7	3,2	0,4
$r$	1000	780	10000	700	900	380	1000	600

$T = 1200$  час,

$R = 2600$  усл. ед.

### Вариант 4

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,1	0,3	0,25	0,6	0,7	0,35	0,8	0,15
$\mu$	2	3,1	1,6	1,2	2,1	1,5	1	1
$r$	600	700	580	1200	2100	820	340	160

$T = 2350$  час,

$R = 2500$  усл. ед.

### Вариант 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,7	0,3	0,1	0,65	0,2	0,1	0,12	0,4
$\mu$	1	1,2	0,9	1,8	2,6	1,8	1	1,6
$r$	650	720	1900	680	1080	608	730	2000

$T = 1850$  час,

$R = 2300$  усл. ед.

### Вариант 6

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$	0,7	0,3	0,1	0,65	0,2	0,1	0,12	0,4
$\mu$	1	1,2	0,9	1,8	2,6	1,8	1	1,6
$r$	650	720	1900	680	1080	608	730	2000

$T = 1200$  час,

$R = 2600$  усл. ед.

Далее приводятся варианты заданий с 7 по 25. в таблицах указаны номера вариантов, из которых следует взять значения.

### Вариант 7-15

Номер варианта	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lambda$	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\mu$	4	1	2	1	2	3	4	5	2
$r$	3	4	5	1	3	4	5	2	1

$T = 1000$  час,

$R = 2500$  усл. ед.

### Вариант 16-25

Номер ва- рианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\lambda$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\mu$	3	1	5	1	3	2	5	2	3	4
$r$	4	5	1	2	2	4	3	5	1	2

$T = 1500$  час,

$R = 2700$  усл. ед.

## Лабораторная работа №10

Автоматизированный логико - вероятностный расчет надежности параллельно последовательных структур технических систем

**Цель работы:** Изучить методику автоматизированного логико-вероятностного расчета (ЛВР) надежности для различных параллельно-последовательных структур (ППС). Определить результирующие показатели безотказности по заданной структурной схеме.

### Программа работы:

#### 1 Подготовительная работа

- Зарисовать структурную схему надежности ТС в соответствии с рисунком 1.5, общую для всех вариантов, произвести разбивку на элементарные ППС, выделив их пунктирной линией, и пронумеровать;

- Подобрать по рисунку 1.3 соответствующие варианты для выделенных элементарных ППС;

- Исходные данные для каждого варианта найти, используя следующие условные соотношения:  $P_i (i = 1, 2, \dots, 20) = (0,60 + i/100) + 10^{-3} \cdot N$ ;  
 $\Delta P_i (i = 1, 2, \dots, 20) = 10^{-5} \cdot i \cdot N$ ,

где  $N$  – номер варианта соответствующий двум последним цифрам номера зачетки;

$i$  - номер элемента в структурной схеме надежности ТС.

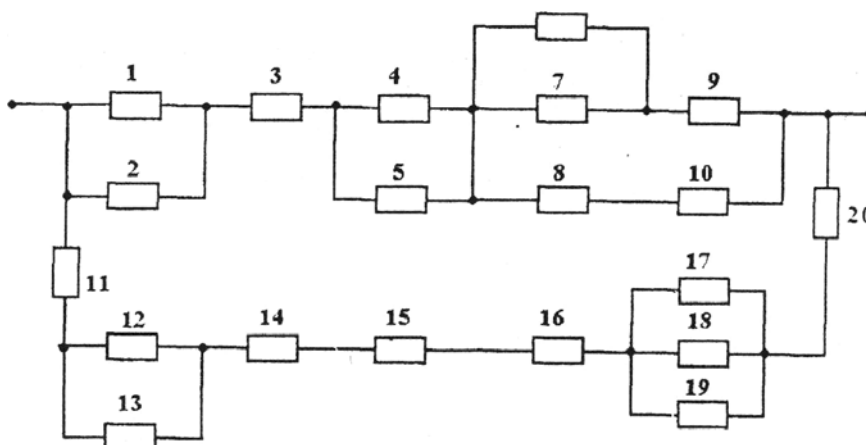


Рисунок 1.5 – Структурная схема надежности сложной СУ с ППС 1, 2,...,20 - номера элементов

## 2 Работа за компьютером

- С помощью ПК подсчитать результирующие вбр для каждой выделенной элементарной ППС,
- Построить эквивалентную структурную схему надежности на втором уровне и выделить снова элементарные ППС, для которых также подобрать соответствующие варианты;
- Если бы структурная схема расчета надежности ТС содержала большее количество элементов, то повторить пп.1 и 2 до тех пор, пока не останется один эквивалентный элемент, надежность которого соответствует надежности всей ТС;
- Используя приведенные соотношения для показателей безотказности при постоянной интенсивности отказов, вычислить за определенное время  $t = 100 \cdot N$ , остальные показатели надежности: вероятность отказов; частоту отказов; интенсивность отказов и среднюю наработку на отказ.
- Проанализировать уровень полученной результирующей надежности ТС и предложить возможные варианты ее повышения.

### **Краткие сведения из теории**

#### 1 Показатели надежности систем управления

Способность ТС сохранять свои наиболее существенные свойства (безотказность, ремонтпригодность и др.) на заданном уровне в течение фиксированного промежутка времени при определенных условиях эксплуатации называют надежностью. Под структурной надежностью ТС понимают надежность системы в целом при заданной ее структуре и известных значениях надежности всех входящих в нее элементов. Степень надежности ТС определяется показателями; связанными с явлением отказа - случайным событием, заключающимся в нарушении работоспособности системы.

Вероятностью безотказной работы (вбр)  $P(t)$  системы называется вероятность того, что при определенных условиях эксплуатации в заданном интервале времени или в пределах заданной наработки не произойдет ни одного отказа:  $P(t) = P(T > t)$ . Здесь  $t$  - время, в течение которого определяется вбр;  $T$  - время работы ТС от ее включения до первого отказа.

Вероятностью отказа (во)  $Q(t)$  называется вероятность того, что при определенных условиях эксплуатации в заданном интервале времени возникнет хотя бы один отказ. Отказ и безотказная работа являются событиями несовместными и противоположными. Поэтому

$$Q(t) = P(T \leq t), \quad Q(t) = 1 - P(t). \quad (1.1)$$

Частота отказов  $a(t)$  есть плотность вероятности времени работы системы до первого отказа.

$$a(t) = -P'(t) = Q'(t), Q(t) = \int_0^t a(t)dt;$$

$$P(t) = 1 - \int_0^t a(t)dt. \quad (1.2)$$

Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  - плотность вероятности отказа ТС к моменту времени  $t$  при условии, что до этого момента отказ не произошел:

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}. \quad (1.3)$$

Интенсивность отказов и вбр связаны между собой зависимостью:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \quad (1.4)$$

Средней наработкой до первого отказа называется математическое ожидание времени работы ТС до отказа:

$$T_{cp.} = \int_0^{\infty} P(t)dt \quad (1.5)$$

Особенностью показателей является то, что зная, например, вбр системы, можно найти остальные количественные показатели надежности. На этапе нормальной эксплуатации системы при экспоненциальном законе распределения  $\lambda(t) = \lambda$  и приведенные выражения упрощаются:

$$\lambda = \frac{-\ln P(t)}{t}; T_{cp.} = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.6)$$

## 2 Алгоритм ЛВР надежности ППС

Расчеты надежности занимают ведущее место в проектировании и практике использования ТС. Для определения надежности систему разделяют на отдельные части, в отношении которых имеются или определяются количественные характеристики надежности. Декомпозицию производят так, чтобы отдельные части представляли собой конструктивно самостоятельные элементы, независимые в отношении отказов от других элемен-



тов. Если отказы соседних элементов зависят друг от друга, то их объединяют в один общий блок, для которого находят расчетным путем (или экспериментально, или по справочным данным) общую количественную характеристику надежности. Части ТС, имеющие самостоятельные количественные характеристики надежности, называются элементами расчета надежности или просто элементами.

Наиболее распространенными, как показывает инженерная практика, структурными схемами различных ТС являются ППС, содержащие ветви с параллельно соединенными элементами расчета надежности, совместный отказ которых приводит к отказу всей системы и ветви с последовательно соединенными элементами, отказ каждого из которых приводит к отказу ТС. ЛВР надежности таких ТС можно провести: путем последовательного упрощения структуры в соответствии с приведенным ниже алгоритмом. Алгоритм ЛВР надежности представим в алгебраической форме в виде структурного произведения:

$$A = A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \wedge A5 \wedge A6 \wedge A7 \wedge A8 \quad (1.7)$$

и включает в себя 8 функциональных операторов, связанных между собой операцией "конъюнкция" (логическим произведением). Содержание функциональных операторов следующее:

A1 – составить по функциональной схеме ТС, с учетом приведенных выше соображений о независимости отказов структурную схему расчета надежности. Причем, в соответствии с принятым предварительно соглашением об отказе в ТС, элементы расчета надежности соединяются или последовательно, или параллельно;

A2 – сформулировать условие работоспособности данной ТС;

A3 – составить логическую функцию работоспособности ТС ( $F_{л}$ );

A4 – минимизировать  $F_{л}$  и привести ее к виду, при котором она содержит минимальное число неповторяющихся членов. При этом используются известные из алгебры логики законы и тождества,

A5 – арифметизировать логическую функцию  $F_{л}$  заменой логических операции арифметическими по следующим правилам:

$$a \vee b = a + b - a \cdot b; a \wedge b = a \cdot b; \bar{a} = 1 - a \quad (1.8)$$

A6 – заменить события их вероятностями,

A7 – вычислить вероятность безотказной работы ТС;

A8 – проанализировать полученные результаты.

Некоторые из перечисленных операций данного алгоритма в конкретной задаче могут отсутствовать в зависимости от степени полноты исходных данных.

Пример: Рассчитать надежность гибкого автоматизированного участка (ГАУ) для обработки корпусных деталей. Согласно функциональной схеме ГАУ. (рисунок 1.1) в его состав входят следующие элементы расчета надежности:

- специальный сверлильно - фрезерный станок - 2 шт.;
- промышленный робот - 1 шт.;
- кантователь - 1 шт.;
- автоматизированный склад-накопитель;
- управляющий вычислительный комплекс на базе ЭВМ.

А1: Т.к. работа на станках производится одновременно и независимо друг от друга, то данное соединение с точки зрения надежности является параллельным. Выход из строя (отказ) любого другого элемента ГАУ может быть представлена ППС следующего вида (рисунок 1.2).

А2: ГАУ отказывает только при отказе УВК и станка № 1 или станка № 2 и робота и кантователя и склада.

А3:  $F_{Д} = 1 \wedge (2 \vee 3) \wedge 4 \wedge 5 \wedge 6$ .

А4:  $F_{Д}$  не минимизируется, т.к. отсутствуют повторяющиеся члены.

А5:  $F_{ар.} = 1 \cdot (2+3 - 2 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ .

А6:  $P = P_1 \cdot (P_2 + P_3 - P_2 \cdot P_3) \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6$ .

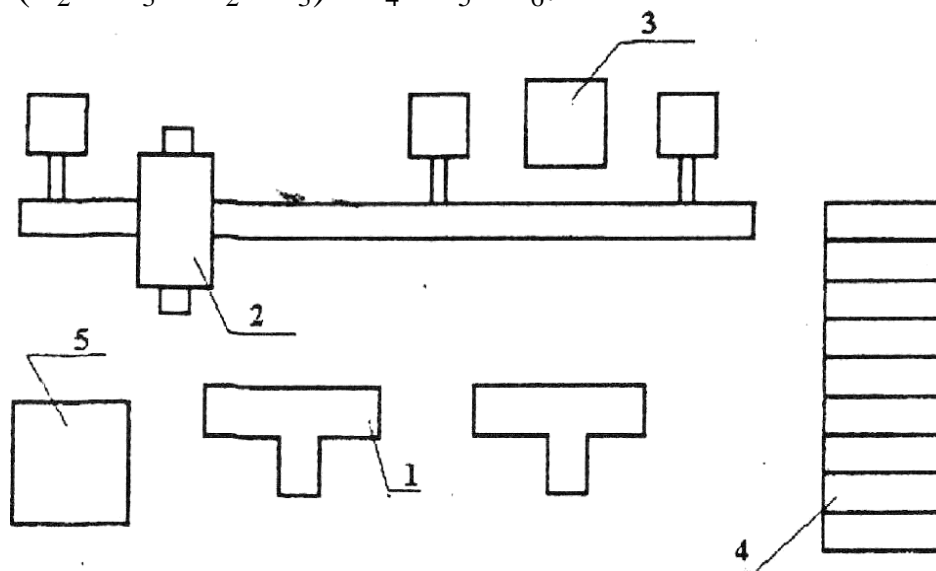


Рисунок 1.1 – Функциональная схема ГАУ

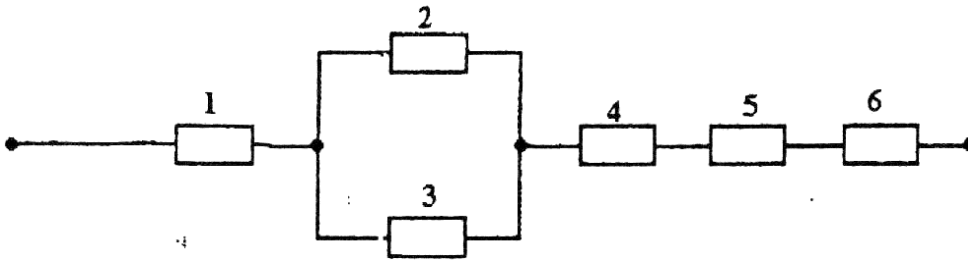


Рисунок 1.2 – Структурная схема надёжности ГАУ

А7 и А8: Вычисление вбр ГАУ осуществить с использованием ЭВМ. Для анализа полученного результата предусмотреть возможность изменения вбр составляющих элементов с определенным шагом.

### 3 Постановка задачи автоматизированного ЛВР надёжности ППС

Дана или составлена структурная схема надёжности ГАУ, отражающая его конструктивную или техническую сторону и систему управления. Структурная схема надёжности состоит из ряда элементов с известными значениями вбр и соединенными между собой только последовательно или параллельно.

Требуется формализовать с использованием ЭВМ нахождение результирующей структурной надёжности такой ТС, т.е. обеспечить ее нахождение в автоматизированном режиме. Такой ЛВР надёжности ТС назовем автоматизированным. Для решения задачи необходимо составить алгоритм и программу автоматизированного ЛВР надёжности.

### 4 Описание алгоритма решения задачи

Составим семейство элементарных ППС, состоящее из 10 вариантов, в достаточной степени отражающие все многообразие структур. Каждое из элементарных ППС состоит не более чем из 5 элементов с известными вбр  $P_1, P_2, \dots, P_5$ . Соответствующие варианты элементарных ППС приведены на рисунке 1.3. Согласно алгоритма ЛВР надёжности найдены расчетные выражения результирующей вбр ППС для каждого варианта, которые приведены на этом же рисунке. Теперь можем сформулировать следующий алгоритм автоматизированного ЛВР надёжности ППС.

1 Разбить общую структурную схему ТС на ряд элементарных ППС и их пронумеровать.

2 Последовательно подбирать для каждой выделенной элементарной ППС соответствующий вариант, руководствуясь рисунком 1.3.

3 Ввести известные значения вбр всех 5-ти элементов  $P_i$  в ПК для каждой

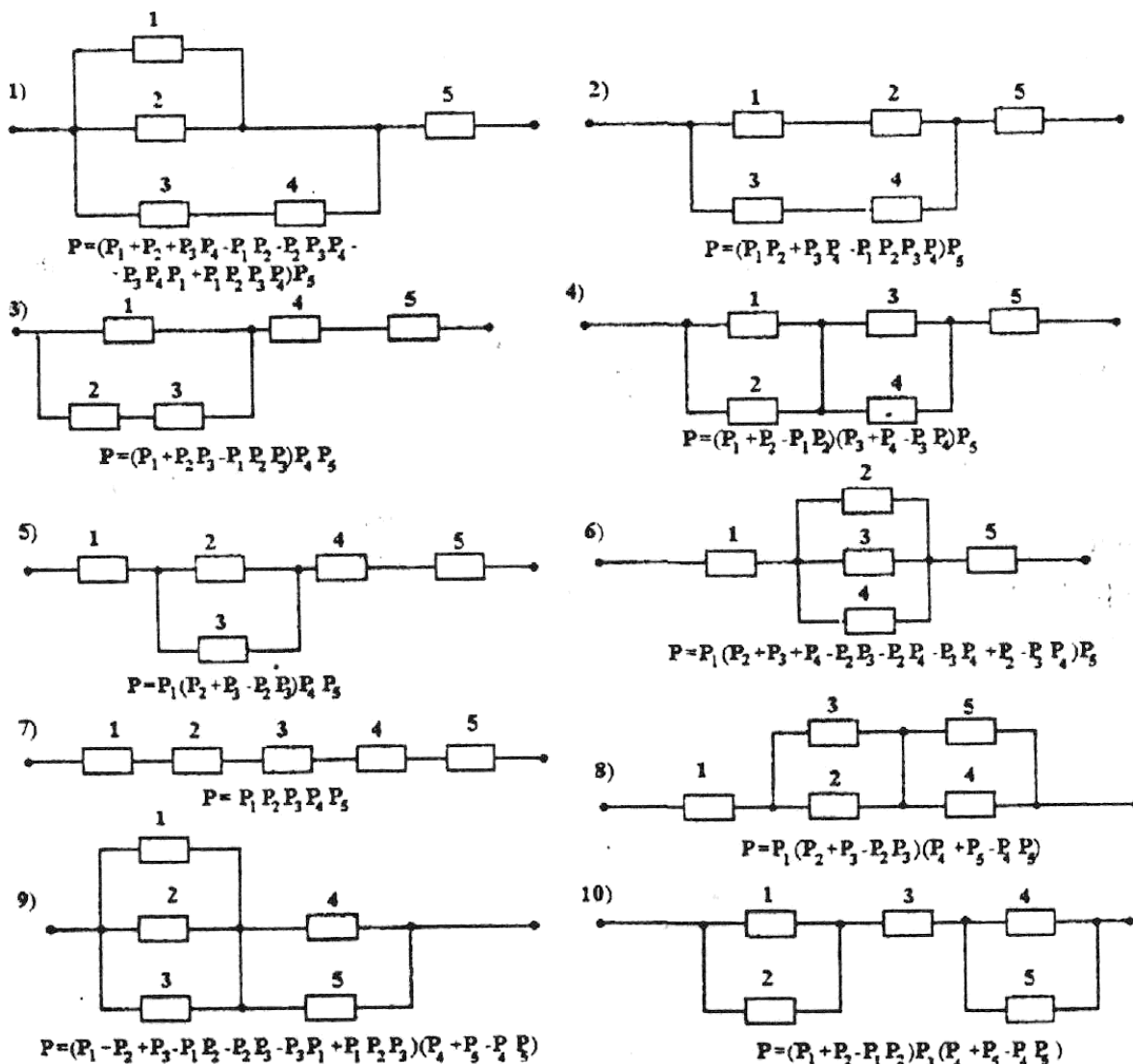


Рисунок 1.3 – Структурные схемы надёжности элементарных ППС

элементарной ППС, а также соответствующий шаг изменения вбр этих элементов  $\Delta P_i$ . Причем в случае отсутствия части элементов вводить их вбр, равные 1. Если не предполагается исследовать зависимость результирующей вбр от изменения вбр отдельных элементов, то вводить  $\Delta P_i$ , равные нулю. Затем вводится номер варианта рассматриваемой элементарной ППС.

4 Считывать с монитора ПК значения результирующей вбр для каждой элементарной ППС, например, при  $\Delta P_i \neq 0$ ,  $P_{\min}$ ,  $P_{sr}$ ,  $P_{\max}$ , а при  $\Delta P_i = 0$   $P_{\min} = P_{sr} = P_{\max} = P$ .

5 Составить эквивалентную структурную схему расчета надежности, исходные значения вбр элементов в которой взять согласно п.4 данного алгоритма.

6 Проанализировать полученные результаты общей структурной надежности ТС, если остался один эквивалентный элемент, или повторять пп.1-5 до тех пор, пока не будет найдена искомая надежность всей ТС. Для ре-

ализации описанного алгоритма автоматизированного ЛВР надежности составлено соответствующее программное обеспечение для ПК.

### 1.2.5 Характеристика программного обеспечения

Описанный алгоритм автоматизированного ЛВР надежности ППС сложных ТС реализован разработанной программой NADP. Схема алгоритма представлена на рисунке 1.4. Здесь использованы следующие обозначения:  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) - исходные значения вбр элементов элементарных ППС,  $\Delta P_i$  - требуемый шаг изменения вбр элементов;  $Var$  - целочисленная переменная, соответствующая варианту элементарной ППС;  $I(1,10)$  - индексная переменная цикла.

Инструкция по использованию NADP заключается в последовательном вводе в диалоговом режиме следующей информации: вбр каждого элемента выделенной ППС; шаг изменения вбр каждого элемента; переменная  $Var$ , изменяющаяся от 1 до 10. В программе принято изменение  $I$  от 1 до 10 с шагом по умолчанию равным 1.

Вывод информации на монитор или печать осуществляется в следующем порядке:  $N$  варианта; значение  $I$  как  $N$  шага цикла; значения вбр элементов  $P_i$  и результирующие значения надежности выделенной элементарной ППС на каждом шаге цикла.

Примечание:

1). Если анализа надежности по каким-либо причинам проводить не требуется, то принять все  $\Delta P_i = 0$ ;

2). Если в рассматриваемой ППС элементов менее пяти, то для недостающих элементов вводить  $P_i = 1$ , а  $\Delta P_i = 0$ , соответствующую абсолютно надежным элементам.

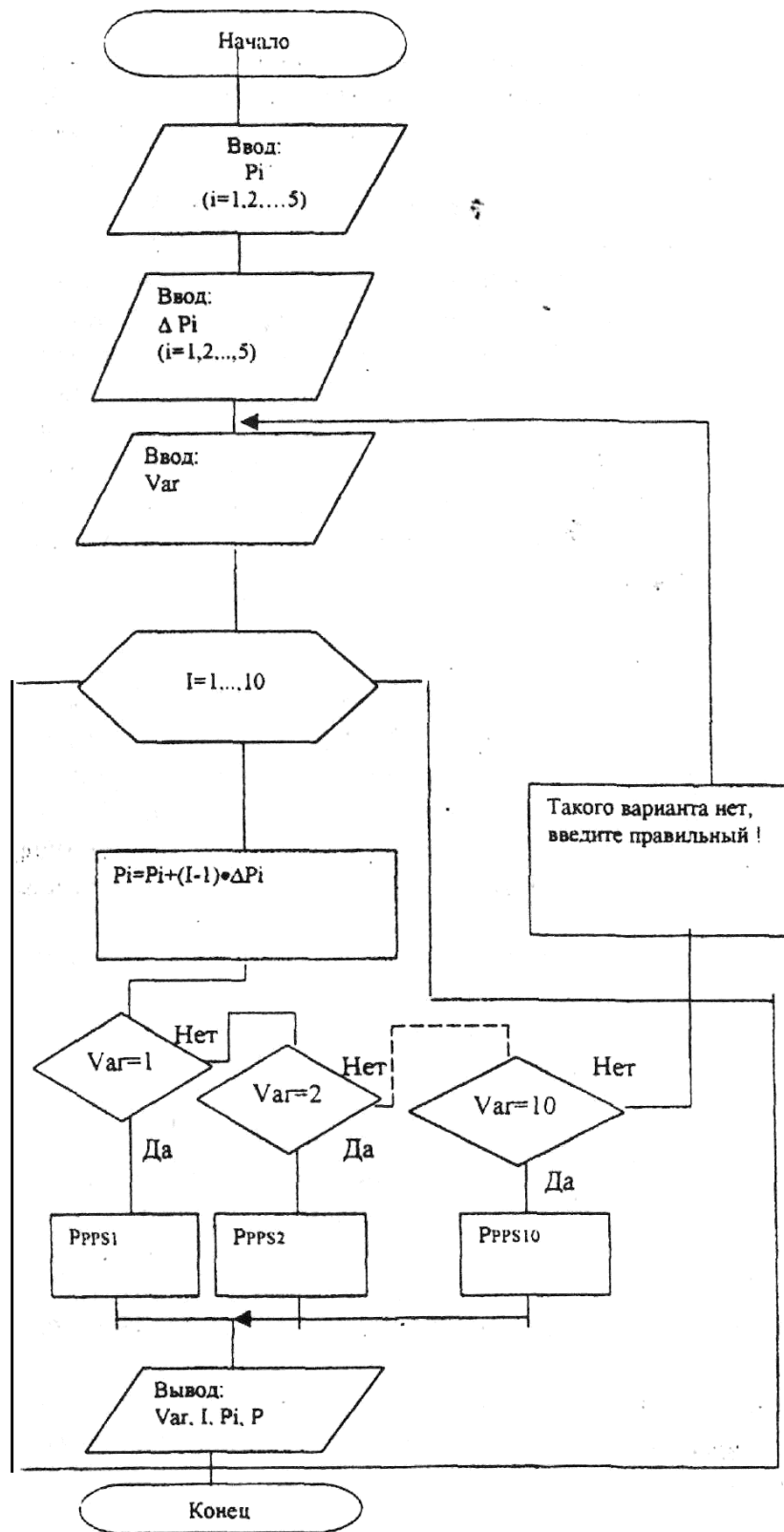


Рисунок 1.4 – Схема автоматизированного ЛВР надежности ТС с элементарными ППС

Контрольные вопросы

1. Какие показатели надежности ТС Вам известны?

2. Содержание функциональных операторов, входящих в алгоритм ЛВР надежности ТС?
3. Понятие о надежности ТС и о ППС. Что понимается под элементарной ППС?
4. Расскажите о постановке задачи автоматизированного ЛВР надежности ППС.
5. Выведите выражение для определения результирующей вбр элементарной ППС  $i$ -го варианта.
6. Содержание алгоритма автоматизированного ЛВР надежности ППС.
7. Поясните схему алгоритма программы NADP.
8. Как проверить правильность работы программы?

