МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине

Математические методы в решении профессиональных задач

для направления подготовки 18.03.01 Химическая технология
направленность (профиль) Химическая технология неорганических веществ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью освоения дисциплины является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 **Электроэнергетика и электротехника**, путем освоения возможностей:

- демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовностью применять аналитические и численные методы решения поставленных задач, использовать современные информационные технологии, проводить обработку информации с использованием прикладных программных средств сферы профессиональной деятельности;
- выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат;
- планировать и проводить физические и химические эксперименты, проводить обработку результатов и оценивать погрешности.

Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам, необходимым для глубокого изучения общенаучных, общеинженерных, технических и специальных дисциплин;
- развитие логического и алгоритмического мышления, общего уровня математической культуры;
- выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса;
- обучение навыкам выдвигать гипотезы и устанавливать границы их применения, применять методы математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования;
- привитие студентам умений самоорганизации и самостоятельного изучения учебной литературы по математике и ее приложениям.

Перед выполнением заданий студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в данных указаниях. В них же даются также некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров.

В процессе самостоятельного изучения материала студент может решить предложенный в методическом указании набор заданий. Это позволит студенту судить о степени усвоения соответствующего раздела курса, укажет на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление работы, поможет сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. В результате освоения дисциплины «Математика» у студента должны быть сформированы следующие компетенции:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	**ИД-1** Применяет математический аппарат аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной	Демонстрирует знание математического аппарата аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной; Использует инструментарий и основные приемы математического аппарата аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной для решения прикладных математических задач
ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	**ИД-2** Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, интегрального исчисления функции нескольких переменных, теории рядов, теории дифференциальных уравнений	Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, интегрального исчисления функции нескольких переменных, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Использует инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, интегрального исчисления функции нескольких переменных, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения прикладных математических задач
ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	**ИД-3** Применяет математический аппарат теории вероятностей и математической статистики	Демонстрирует знание математического аппарата теории вероятностей и математической статистики; Использует инструментарий и основные приемы теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных математических задач

Практическое занятие по теме «Линейная алгебра»

Цель: Целью освоения темы «Линейная алгебра» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Линейная алгебра» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

1. Матрицей $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ называется множество чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $n\times n$ называется квадратной матрицей n –го порядка. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, . . . , a_{nn} образуют главную диагональ матрицы.

2. Определитель (детерминант) квадратной матрицы n –го порядка – это число Δ, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам. Обозначается:

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n –го порядка называется определитель $(n-1)$ –го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i –й строки и j –го столбца.
Исследование системы линейных уравнений осуществляется с помощью теоремы Кронекера-Капелли: **для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы A был равен рангу расширенной матрицы A_p**, т.е. $rang\ A = rang\ A_p = r$. При этом:

1) если $r = n$ (ранг равен числу неизвестных), то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера;

2) если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Свободные $(n - r)$ неизвестных выбираются произвольно, а главные r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные.

Для решения систем линейных уравнений с большим числом неизвестных и уравнений выгодно использовать метод Гаусса, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Существует много вариантов этого метода. Рассмотрим схему с выбором главного элемента. Пусть исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пример 1. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид (19)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$.

Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1 = 4$, определяется из системы уравнений вида (20)

$$\begin{cases} (1-4)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2-4)x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1 = 2x_2$. Полагая $x_2 = t$, получаем решение в виде $x_1 = 2t$, $x_2 = t$. Пронормируем это решение, т.е. найдем такое значение t, при котором длина собственного вектора равна единице:

$$\|X_1\| = 1 = \sqrt{(2t)^2 + (t)^2}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, первый собственный вектор есть

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем второй собственный вектор X_2:

$$\begin{cases}(1+1)x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1 + (2+1)x_2 = 0,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -3t, \\ x_2 = t.\end{cases}$$

$$\sqrt{(-3t)^2 + (t)^2} = 1, \quad t = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ и два собственных вектора.

Пример 2. Исследовать систему уравнений и найти её общее решение

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \cdot I \\ -8 \cdot I \end{matrix}$$

меньше числа неизвестных. Приведем матрицу A к трапециидальному виду путем элементарных преобразований. Умножим 1-ю строку на 4 и на 8 и вычтем, соответственно из 2-й и 3-й строки, получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :5 \\ -II \end{matrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю, а затем разделим 2-ю строку на 5:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и меньше числа неизвестных: $n = 3,\ rang\ A < n$. Примем за основные переменные x_1 и x_2; свободная переменная – x_3. Тогда данная система сводится к системе уравнений,

$$\begin{cases} x_1 - 1/4x_3 = 0, \\ x_2 + 4/5x_3 = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}x_3, \\ x_2 = -\dfrac{4}{5}x_3. \end{cases}$$

Придавая свободной переменной x3 произвольные значения x3=5t, где $t \in R$, получим общее решение системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -4t, \\ x_3 = 5t. \end{cases}$$

Вопросы и задания

Задание 1

Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера; методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

Номер вар.	Система линейных уравнений	Номер вар.	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - 5x_3 = -9 \end{cases}$	11	$\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \\ -2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$	12	$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	13	$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11 \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -13 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	17	$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12 \end{cases}$

8	$\begin{cases} -3x_1+5x_2-6x_3=-5 \\ 2x_1-3x_2+5x_3=8 \\ x_1+4x_2-x_3=1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5 \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=-4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 4x_1-x_2+5x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=9 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=-4 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=-6 \\ x_1-8x_2+5x_3=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1+7x_2-2x_3=3 \\ 3x_1+5x_2+x_3=5 \\ -2x_1+5x_2-5x_3=-4 \end{cases}$

Задание 2

Исследовать и найти общее решение системы линейных однородных уравнений.

Номер вар.	Система линейных уравнений	Номер вар.	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$	13	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0. \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$	15	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-6x_3-3x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0. \end{cases}$

7	$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Практическое занятие по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Цель: Целью освоения темы «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Векторная алгебра» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

1. Вектор-столбец

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

называется собственным вектором квадратной матрицы *A* *n*-го порядка, соответствующим собственному значению λ, если он удовлетворяет матричному уравнению:

$A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ или $(A - \lambda E)\overline{X} = 0$.

Здесь *E* – единичная матрица *n*-го порядка, а *0* – нулевой вектор-столбец. При условии, что вектор $\overline{X} \neq 0$, получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений λ: $det(A - \lambda E) = 0$ (19)

Координаты собственного вектора X_i, соответствующие собственному значению λ_i, является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \Lambda \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

2. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ называется число, определяемое равенствами:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad (21)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

Из **(21)** для скалярного квадрата имеем:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \text{или} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (22)$$

С помощью скалярного произведения можно найти:

- проекцию вектора $$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad (23)$$
- угол между двумя векторами $$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}; \qquad (24)$$
- работу силы $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ на перемещении $\vec{S} = \{S_x, S_y, S_z\}$

$$A = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\varphi = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z. \qquad (25)$$

Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов имеет вид:

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \quad \text{или} \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \qquad (26)$$

а условия их коллинеарности: 1) $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ 2) $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$ 3) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ (27)

3. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

а) имеет длину $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) направлен так, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 1).

Векторное произведение векторов в координатной форме:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = \{c_x; c_y; c_z\}. \qquad (28)$$

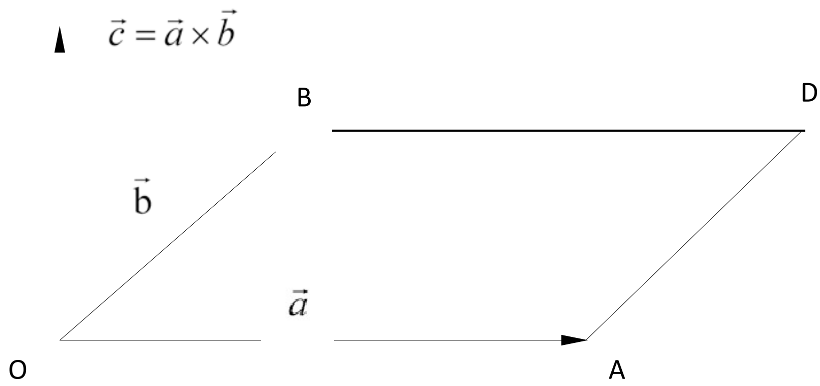


Рисунок 1

4. Смешанное произведение трех векторов $\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k$, $\vec b = b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k$, $\vec c = c_x\vec i + c_y\vec j + c_z\vec k$ есть число равное:

$$\vec a\vec b\vec c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b и c, равен модулю смешанного произведения

$$V^{пар} = \left|\vec a\vec b\vec c\right| = mod\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (31)$$

5. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (33)$$

где $\vec n = A\vec i + B\vec j$ - нормальный вектор прямой, т.е. вектор n перпендикулярен прямой, а коэффициент *C* пропорционален расстоянию *p* от начала координат до прямой: $C \sim p$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b \qquad (34)$$

Здесь угловой коэффициент $k = tg\alpha$**,** где α угол между осью *Ox* и прямой; *b* – начальная ордината, т.е. ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*.

6. а) Общее уравнение плоскости *P* имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (40)$$

где $\bar N = A\vec i + B\vec j + C\vec k$

- нормальный вектор плоскости, т.е. вектор перпендикулярный плоскости, коэффициент D пропорционален расстоянию p от начала координат до плоскости.

б) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данному вектору $\bar{N} = \{A, B, C\}$, имеет вид:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (41)$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (42)$$

г) Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\bar{N}1=\{A1,B1,C1\}$ и $\bar{N}2=\{A2,B2,C2\}$, определяется как угол между $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$; косинус этого угла находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (43)$$

д) Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (44)

7. Прямая в пространстве l определяется как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2:

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

<u>Пример 1</u>. По координатам вершин пирамиды *A(3;-2;2)*, *B(1;-3;1), C(2;0;4), D(6;-4;6)* средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер *AB* и *AC*;

2) угол между ребрами *AB* и *AC*;

3) площадь грани *ABC*;

4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$;

5) объем пирамиды ABCD;

6) уравнения прямых *AB* и *AC*;

7)уравнения плоскостей *ABC* и *ABD*;

8) угол между плоскостями *ABC* и *ABD.*

<u>Решение</u>.

1) Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 3)\vec{i} + (-3 - (-2))\vec{j} + (1 - 2)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = \{-2; -1; -1\}; \ \overrightarrow{AC} = \{-1;2;2\}.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер AB и AC, таковы:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45; \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле (21):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -2,$$

а косинус угла между ними – по формуле (24):

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt{6}} = -0.27.$$

Отсюда следует, что φ – тупой угол, равный $\pi - \arccos 0.27 = 1.85$ рад с точностью до 0.01. Это и есть искомый угол между ребрами AB и AC.

3) Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е. половина модуля векторного произведения этих векторов (см. формулу 29):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54 \text{ (кв. ед.)}$$

4) Проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле (23):

$$Пр_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{3} \approx -0{,}67.$$

5) Объем пирамиды равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Вектор $\overrightarrow{AD} = \{3; -2; 4\}$. Используя формулу (31), получим:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} mod(-30) = 5 \text{ (куб. ед.).}$$

6) Уравнения прямых AB и AC найдем как уравнения прямых проходящих через

две данные точки, по формуле (48):

$$(AB)\qquad \frac{x-3}{1-3}=\frac{y+2}{-3+2}=\frac{z-2}{1-2};\qquad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1};$$

$$(AC)\qquad \frac{x-3}{2-3}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z-2}{4-2},\qquad \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{2}.$$

7) Уравнения плоскостей *ABC* и *ABD* получим, используя формулу (42):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 2-3 & 0+2 & 4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ABC: т.е. $5(y+2) - 5(z-2) = 0, \quad 5y - 5z + 20.$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 6-3 & -4+2 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ABD: т.е. $-6(x-2) + (y+2) + 7(z-2) = 0, \; -6x + y + 7z = 0.$

По уравнениям плоскостей определим их нормальные векторы:

$$\bar{N}1 = \{0;\,5;-5\} \text{ и } \bar{N}2 = \{-6;\,1;7\}.$$

8) Угол φ между плоскостями *ABC* и *ABD* найдем по формуле (43):

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\,|\bar{N}_2|} = \frac{0 + 5 - 35}{\sqrt{25+25}\cdot\sqrt{36+1+49}} = -\frac{30}{5\sqrt{2}\sqrt{86}} \approx -0.46,$$

откуда $\varphi = \pi - \arccos 0{,}46 = 2{,}04$ рад.

Вопросы и задания

Задание 1

Номер вар.	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки C	Координаты точки Д
1	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
2	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)
3	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
4	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
5	(3;0;2)	(2;0;6)	(1;1;2)	(3;2;4)
6	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
7	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
8	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)
9	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
10	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)

11	(2;4;-6)	(1;3;5)	(0;-3;8)	(3;2;3)
12	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
13	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)

14	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
15	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
16	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
17	(4;2;-1)	(3;0;3)	(8;0;4)	(5;-1;-2)
18	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
19	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;-4;-1)
20	(2;2;0)	(-2;3;-2)	(2;-3;3)	(1;5;5)

По координатам вершин пирамиды АВСД средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер АВ и АС;
2) угол между ребрами АВ и АС;
3) площадь грани АВС;
4) проекцию вектора АВ и АС;
5) объем пирамиды.

Задание 2

Составить уравнение плоскости *P,* проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$. Написать ее общее уравнение, а также нормальное уравнение плоскости в отрезках. Составить уравнение плоскости P_1, проходящей через точки *A, B, C*. Найти угол между плоскостями P и P_1. Найти расстояние от точки *Д* до плоскости Р.

Номер вар.	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С	Координаты точки Д
1	(2;5;3)	(1;3;5)	(0;-3;7)	(3;2;3)
2	(-2;3;5)	(1;-3;4)	(7;8;-1)	(-1;2;-1)
3	(1;1;2)	(2;3;-1)	(2;-2;4)	(-1;2; 2)
4	(1;3;5)	(0;2;0)	(5;7;9)	(0;4;8)
5	(3;-5;2)	(4;5;1)	(-3;0;-4)	(-4;5;-6)
6	(4;5;2)	(3;0;1)	(-1;4;2)	(5;7;8)
7	(5;1;0)	(7;0;1)	(2;1;4)	(5;5;3)
8	(4;2;-1)	(3;0;4)	(0;0;4)	(5;-1;-3)
9	(4;-3;-2)	(2;2;3)	(-1;-2;3)	(2;-2;-3)
10	(3;1;1)	(1;4;1)	(1;1;7)	(3;4;-1)
11	(1;2;3)	(-1;3;6)	(-2;4;2)	(0;5;4)
12	(0;-1;2)	(-1;-1;6)	(-2;0;2)	(0;1;4)
13	(2;3;2)	(1;3;6)	(0;4;2)	(2;5;4)
14	(1;0;2)	(-2;0;6)	(-3;1;2)	(-1;2;4)

15	(2;0;3)	(1;0;7)	(0;1;3)	(2;2;4)
16	(0;2;-1)	(-1;2;3)	(-2;3;-1)	(0;4;1)
17	(2;2;3)	(-1;2;0)	(0;3;3)	(2;4;-5)
18	(-2;-2;3)	(1;2;5)	(0;1;0)	(2;6;4)
19	(-2;1;3)	(-1;1;3)	(2;0;2)	(2;0;4)
20	(-1;2;0)	(-2;2;4)	(-3;3;0)	(-1;4;2)

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции одной переменной».

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции нескольких переменных».

Цель: Целью освоения тем «Математический анализ. Функции одной переменной» и «Математический анализ. Функции нескольких переменных» является формирование общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Математический анализ. Функции нескольких переменных» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

<u>Пример 1</u>. Найти полярные координаты точки $M\left(\sqrt{3};\ -1\right)$ (Рисунок 1).

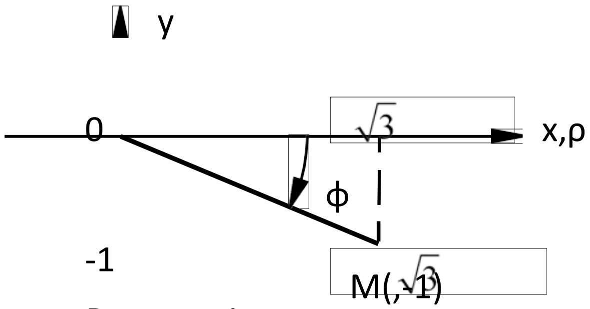


Рисунок 1

<u>Решение</u>. Используя формулы, находим полярный радиус и полярный угол точки M: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $tg\varphi = y/x = -\sqrt{3}/3$,

$\varphi = -arctg(\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, так как точка M лежит в IV четверти.

<u>Пример 2</u>. Построить по точкам график функции $\rho = 2sin\varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox – с полярной осью. Определить вид кривой.

<u>Решение</u>. Так как полярный радиус не отрицателен, т.е. $\rho \geq 0$, то $\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$; значит вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin\varphi$	0	0.38	0.71	0.92	1	0.92	0.71	0.38	0
$\rho = 2\sin\varphi$	0	0.76	1.24	1.84	2	1.84	1.42	0.76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = \rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (Рисунок 2).

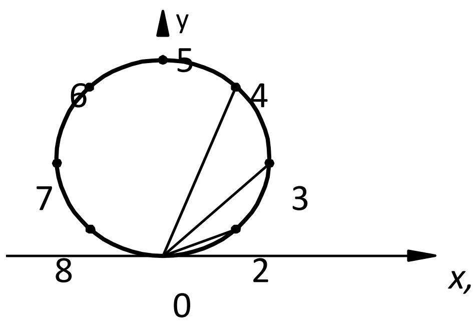


Рисунок 2

Найдем уравнение кривой $\rho = 2\sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y по формулам:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2y/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2y.$$

Окончательно имеем $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, т.е. уравнение выражает окружность с центром в точке $(0; 1)$ и единичным радиусом.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе – бесконечно малую функцию: $\lim\limits_{x\to 3} ctg(x-3) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 3} \ln(4-x) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)} = \infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^4 + 5x}{-4x^4 + 7}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида ∞/∞. Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на x^4. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^4 + 5x}{-4x^4 + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{12 + 5/x^3}{-4 + 7/x^4} = \frac{-12 + 0}{-4 + 0} = -3,$$

поскольку при $x \to \infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{\ln(1 - x^2)}$.

Решение. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида $0/0$ используем метод замены бесконечно малых эквивалентными. Так как при $x \to 0$ $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x \sim 8x^2$, $\ln(1 - x^2) \sim -x^2$, то находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{\ln(1 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{-x^2} = -8.$$

$\substack{x\to 0} - x$

<u>Пример 6.</u> Найти первую производную функции *y=f(x)* , заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(1-t) \\ y = (t-1)^2 \end{cases}.$$

<u>Решение.</u> Дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t : $x_t' = \frac{-1}{1-t}$,

$y'_t = 2(t-1)$. Искомая производная от y по x равна отношению производных $y(t)$ от и $x(t)$ по t:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(t-1)}{\left[\frac{-1}{(1-t)}\right]} = 2(t-1)^2 .$$

Пример 7. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = z\sqrt{x^3} - ye^z$.

Решение. Считая функцию u функцией только одной переменной x, а переменные y и z рассматривая как постоянные, находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3xz}{2\sqrt{x}}$. Аналогично, считая u функцией только y, а затем только z, получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{x^3} - y$.

Вопросы и задания

Задание 1. Построить графики функций:

Номер вар.	Функции
1	$y = -3x^2 + 10x - 3,\ \ y = \ln(-x) + 1,\ \ y = \cos\frac{x}{2} - 1,\ \ y = x^2 + \lvert x \rvert$.
2	$y = -2x^2 + 5x - 1,\ \ y = \ln(x - 2),\ \ y = \cos 2x + 2,\ \ y = x \cdot \lvert x - 1 \rvert$.
3	$y = -4x^2 + 17x - 4,\ \ y = \ln(x + 2),\ \ y = \sin 2x + 1,\ \ y = x^2 - \lvert x \rvert$.
4	$y = -5x^2 + 26x - 5,\ \ y = \ln 3x + 2,\ \ y = \sin 2x - 2,\ \ y = x \cdot \lvert x \rvert$.
5	$y = 2x^2 + 3x - 2,\ \ y = \ln(2 - 2x),\ \ y = -\cos 2x,\ \ y = x \cdot \lvert x + 1 \rvert$.
6	$y = 3x^2 + 8x - 3,\ \ y = \ln 2x + 3,\ \ y = -\sin 2x,\ \ y = x + 2\lvert x \rvert + 1$.
7	$y = 4x^2 + 15x - 4,\ \ y = \ln x + 3,\ \ y = \cos\frac{x}{2} + 1,\ \ y = \frac{\lvert x \rvert}{x^2}$.
8	$y = 5x^2 + 24x - 5,\ \ y = \ln(-3x) + 1,\ \ y = \sin\frac{x}{2} - 2,\ \ y = e^{\lvert x \rvert}$.
9	$y = -2x^2 + 3x + 2,\ \ y = \ln(x - 4),\ \ y = \sin\frac{x}{2} + 1,\ \ y = \ln\lvert x \rvert$.
10	$y = -3x^2 + 8x + 3,\ \ y = \ln(-x) + 2,\ \ y = \cos\frac{x}{2} - 2,\ \ y = \sin\lvert x \rvert$.
11	$y = 6x^2 - 5x + 1,\ \ y = -\ln x + 2,\ \ y = -\sin\frac{x}{2},\ \ y = e^{\lvert x+2 \rvert}$.

12	$y = -2x^2 + 7x - 3,\quad y = -\ln x + 1,\quad y = -\cos\frac{x}{2},\quad y = \ln x - 1.$

13	$y=-2x^2+11x-5,\;\; y=-\ln(x-1),\;\; y=\sin(2x-\frac{\pi}{4}),\;\; y=\lvert x^2-\lvert x\rvert\rvert.$
14	$y=3x^2-7x+2,\;\; y=2\ln x+2,\;\; y=-\sin(x+\frac{\pi}{3}),\;\; y=\frac{1}{\lvert x+2\rvert}.$
15	$y=-3x^2+13x-4,\;\; y=-\ln x-2,\;\; y=-\cos(x-\frac{\pi}{3}),\;\; y=x\lvert x\rvert+4.$
16	$y=-3x^2+13x-4,\;\; y=-\ln x-2,\;\; y=\frac{-x+2}{2x-2},\;\; y=x\lvert x\rvert+4.$
17	$y=3x^2-7x+2,\;\; y=-e^{-x}+2,\;\; y=-\sin(x+\frac{\pi}{3}),\;\; y=\frac{1}{\lvert x+2\rvert}.$
18	$y=-2x^2+11x-5,\;\; y=\frac{3x-4}{x+2},\;\; y=-e^{x+2},\;\; y=-\ln(x-1).$
19	$y=-2x^2+7x-3,\;\; y=\cos\frac{x}{2},\;\; y=\frac{3x+3}{x+1},\;\; y=\ln\lvert x-1\rvert.$
20	$y=6x^2-5x+1,\;\; y=-\sin\frac{x}{2},\;\; y=-e^{x}+1,\;\; y=e^{\lvert x+2\rvert}.$

Задание 2. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики.

Вариант	Функции
1	1) $y=\frac{x^2-3x+2}{x-2}$; 2) $y=\frac{\lvert x-4\rvert}{x-4}$; 3) $y=\begin{cases} x^2 & -\infty<x\le -2 \\ -x+2 & 0<x\le 0 \\ 3x & 0<x<\infty \end{cases}$
2	1) $y=\frac{x^2-10x+9}{x-9}$; 2) $y=\frac{\lvert x+0{,}8\rvert}{x+0{,}8}$; 3) $y=\begin{cases} 2x+5 & -\infty<x\le 0 \\ 2x+3 & 0<x<2 \\ 7 & 2\le x<\infty \end{cases}$
3	1) $y=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$; 2) $y=\frac{\lvert 2x+5\rvert}{2x+5}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2+1 & -\infty<x\le 0 \\ x+1 & 0<x<2 \\ 4 & 2\le x<\infty \end{cases}$
4	1) $y=\frac{x^2+7x+6}{x+1}$; 2) $y=\frac{\lvert x-\sqrt{2}\rvert}{x-\sqrt{2}}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2 & -\infty<x\le -2 \\ 4x+4 & -2<x\le 0 \\ 5 & 0<x<\infty \end{cases}$
5	1) $y=\frac{x^2-4x+3}{x-3}$; 2) $y=\frac{\lvert x+6\rvert}{x+6}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2+2 & -\infty<x\le -1 \\ 3x+2 & -1<x\le 0 \\ 2 & 0<x<\infty \end{cases}$
6	1) $y=\frac{x^2-8x+12}{x-2}$; 2) $y=\frac{\lvert x+3\rvert}{x+3}$; 3) $y=\begin{cases} -x^2 & -\infty<x\le 0 \\ 2x+1 & 0<x\le 1 \\ 3 & 1<x<\infty \end{cases}$
7	1) $y=\frac{x^2-7x+10}{x-2}$; 2) $y=\frac{\lvert x+5\rvert}{x+5}$; 3) $y=\begin{cases} -3x+1 & -\infty<x\le 0 \\ x^2+1 & 0<x\le 1 \\ 2x & 1<x<\infty \end{cases}$
8	1) $y=\frac{x^2-4x+3}{x-1}$; 2) $y=\frac{\lvert x-6\rvert}{x-6}$; 3) $y=\begin{cases} 2x+2 & -\infty<x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<1 \\ 3 & 1\le x<\infty \end{cases}$
9	1) $y=\frac{x^2-6x+8}{x-4}$; 2) $y=\frac{\lvert x-7\rvert}{x-7}$; 3) $y=\begin{cases} 4x+1 & -\infty<x<0 \\ (x+1)^2 & 0\le x<1 \\ 4 & 1\le x<\infty \end{cases}$
10	1) $y=\frac{x^2-5x-6}{x-6}$; 2) $y=\frac{\lvert x-8\rvert}{x-8}$; 3) $y=\begin{cases} x^2+1 & -\infty<x\le 0 \\ x & 0<x\le 1 \\ x+1 & 1<x<\infty \end{cases}$

11	1) $y=\dfrac{x^2+6x+8}{x+4}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-9\rvert}{x-9}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2+2 & -\infty<x\le 0\\ x+2 & 0<x\le 2\\ 5 & 2<x<\infty\end{cases}$
12	1) $y=\dfrac{x^2+8x+12}{x+6}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-10\rvert}{x-10}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2 & -\infty<x<0\\ x & 0\le x\le 3\\ 2x+1 & 3<x<\infty\end{cases}$
13	1) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{x-6}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 2x-1.\rvert}{2x-1}$; 3) $y=\begin{cases}-x^2 & -\infty<x<0\\ x & 0\le x<3\\ 2x+1 & 3\le x<\infty\end{cases}$
14	1) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 3x-1.\rvert}{3x-1}$; 3) $y=\begin{cases}3x+5 & -\infty<x\le 0\\ (x-5)^2 & 0<x\le 5\\ 1 & 5<x<\infty\end{cases}$
15	1) $y=\dfrac{x^2-10x+16}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-3\rvert}{x-3}$; 3) $y=\begin{cases}2x+1 & -\infty<x\le 0\\ (x-1)^2 & 0<x\le 1\\ 2 & 1<x<\infty\end{cases}$
16	1) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert x-\sqrt{3}\rvert}{x-\sqrt{3}}$; 3) $y=\begin{cases}4x+5 & -\infty<x\le 0\\ 5 & 0<x<2\\ x+1 & 2\le x<\infty\end{cases}$
17	1) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 4x+1\rvert}{4x+1}$; 3) $y=\begin{cases}4x-1 & -\infty<x<0\\ x^2-1 & 0<x\le 1\\ 0 & 1<x<\infty\end{cases}$
18	1) $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 5x-1\rvert}{5x-1}$; 3) $y=\begin{cases}2x+3 & -\infty<x<0\\ (x-3)^2 & 0\le x<1\\ 4 & 1\le x<\infty\end{cases}$
19	1) $y=\dfrac{x^2-8x+15}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 6x+1\rvert}{6x+1}$; 3) $y=\begin{cases}2x+2 & -\infty<x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<1\\ 4 & 1\le x<\infty\end{cases}$
20	1) $y=\dfrac{x^2+8x+15}{x+5}$; 2) $y=\dfrac{\lvert 2x+3\rvert}{2x+3}$; 3) $y=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ 2x^2 & 0\le x<3\\ 5x+1 & 3\le x<\infty\end{cases}$

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Номер вар.	Функция, отрезок
1	$f(x) = x^3 - 12x + 7, \qquad [0, 3].$
2	$f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2, \qquad [0, 2].$
3	$f(x) = \left(\sqrt{3}/2\right)x + \cos x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
4	$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2, \qquad [-3, 1].$
5	$f(x) = x^3 - 3x + 1, \qquad [1/2, 2].$
6	$f(x) = x^4 + 4x, \qquad [-2, 2].$
7	$f(x) = \left(\sqrt{3}/2\right)x - \sin x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
8	$f(x) = 81x - x^4, \qquad [-1, 4].$
9	$f(x) = 3 - 2x^2, \qquad [-1, 3].$
10	$f(x) = x - \sin x, \qquad [-\pi, \pi].$
11	$f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}, \qquad [-5, 5].$
12	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$
13	$f(x) = \frac{x-3}{x^2+16}, \qquad [-5, 5].$
14	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \qquad \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$
15	$f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}, \qquad [-3, 7].$
16	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right].$
17	$f(x) = \frac{x-5}{x^2+11}, \qquad [-3, 7].$
18	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \qquad \left[-2\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$
19	$f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}, \qquad [-4, 6].$
20	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \qquad \left[-2\pi, -\frac{3}{2}\pi\right]$

Практическое занятие по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Цель: Целью освоения тем «Интегральное исчисление функции одной переменной»

является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Интегральное исчисление функции одной переменной» студентом приобретаются следующие знания и умения:
Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

1. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

1^0. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq 1, \ u = u(x)$ - дифференцируемая функция

2^0. $\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

3^0. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$

4^0. $\int \sin u\, du = \cos u + C.$

5^0. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

6^0. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = -tg\, u + C.$

7^0. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C.$

8^0. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\, arctg \dfrac{u}{a} + C.$

9^0. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+u}{a-u} \right| + C.$

10^0. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C.$

11^0. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + b} \right| + C.$

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C;$$

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$

(1)

где a и b – некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\,d(\varphi(x)), \qquad (2)$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

3) Формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых затруднений. За u, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к её упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P(x)\cdot ln(x)$, $P(x)\cdot arcsin\, x$, $P(x)\cdot arctg\, x$, где $P(x)$ - многочлен от x.

2. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5}$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) \leq 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например, $b = \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x = b$), то по определению полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx, \tag{6}$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{7}$$

Интегралы в левых частях равенств (6) и (7) называются несобственными интегралами. Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел в правой части равенств (6) и (7).

Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

4. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Теорема 1. Если 1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Oy области S: $\{a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

Теорема 2. Если :1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Ox области $S:\{ c \le y \le d, \quad x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

Теорема 3. Пусть $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ есть дифференцируемое преобразование области P из плоскости O_1uv на область S из плоскости Oxy. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \iint\limits_P f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, dudv. \qquad (3)$$

Переход в двойном интеграле к полярным координатам

Формулы

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi \qquad (4)$$

преобразуют полярные координаты ρ, φ точки в декартовы координаты этой точки и переводят область $P_0 : \{0 \le \varphi < 2\pi\ ;\ 0 \le \rho < \infty\}$ на всю плоскость Oxy.

Обратное преобразование декартовых координат в полярные осуществляется по формулам: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arcctg} x / y + \pi \cdot \delta(y)$, $\delta(y) = \begin{cases} 0, \text{ при } y > 0, \\ 1, \text{ при } y < 0. \end{cases}$

Фиксируя в последних формулах ρ и φ, получим координатные линии из разных семейств: окружность с центром в точке $O(0;0)$ и луч, исходящий из точки $O(0;0)$.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$ то, используя формулы (1), получим:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{2(2x-3)} + C.$$

Проверка: $\left(-\frac{1}{2(2x-3)} + C\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}.$

Пример 2. Найти $\int \cos x \cdot e^{\sin x}\, dx.$.

Решение. Так как $\cos x\, dx = d(\sin x),$ то по формуле (2) находим:

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\, dx = \int e^{\sin x}\, d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x \cdot \cos 2x\, dx.$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u = x,\ \ dv = \cos 2x\, dx;$ тогда $du = dx,\ \ v = (1/2)\sin 2x.$ используя формулу (3), имеем:

$$\int x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\, dx.$.

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x} = t,$ откуда $dx = 2t\, dt.$

Найдем пределы интегрирования по переменной t: при $x = 4$ имеем $t = 2$, а при $x = 9$ имеем $t = 3.$ Переходя в сходном интеграле к новой переменной t и применяя формулу Ньютона-Лейбница (5), получаем:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1} 2t\, dt = \left(t^2 - 4t + 4\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = (9 - 12 + 4\ln 4) - (4 - 8 + 4\ln 3) = 2.15.$$

Пример 5. Вычислить плоской фигуры, ограниченной кривыми

$y_1 = \sin x + 2,\quad y_2 = -1,\quad x = 0,\quad x = \pi$ (Рисунок 1)

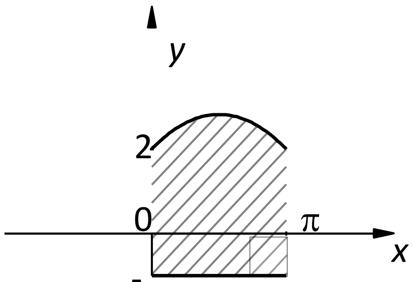


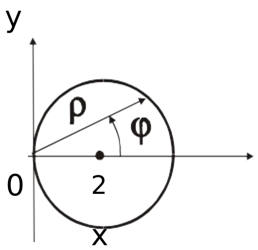
Рисунок 1

Решение. $S = \int_0^{\pi}(y_1 - y_2)dx = \int_0^{\pi}(\sin x + 2 + 1) = 2 + 3\pi\pi$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; $f(x) = 1/\sin^2 x$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0$. Согласно определению (7), получаем: $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0}(tg\, x)\Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon \to 0} tg\,\varepsilon = 1,$

т.е. этот несобственный интеграл сходится.

Пример 6. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_S (y + 2)dxdy$, S – множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \le 4x$.



∇ Границей области является линия $x^2 + y^2 = 4x$ или $(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке $C(2;0)$ (рисунок 2).

Наличие в уравнении границы комбинации $x^2 + y^2$ наводит на мысль, что для вычисления двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Уравнение границы $x^2 + y^2 - 4x = 0$ переходит в уравнение $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 4\rho\cos\varphi = 0$ или $\rho(\rho - 4\cos\varphi) = 0$. Отсюда ρ=0 (соответствует полюсу *O*) и $\rho = 4\cos\varphi$ – уравнение окружности. Так как всегда $\rho \ge 0$ (по смыслу ρ), то из $\rho = 4\cos\varphi$ следует $\cos\varphi \ge 0$, отсюда получаем $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Итак, в полярных координатах область интегрирования есть $P: \{ \pi \quad \pi \}$. Тогда по формуле (5)

$$\left\{-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi\right\}$$

$$I = \iint\limits_S (y+2)\,dxdy = \iint\limits_P (\rho\sin\varphi + 2)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} (\rho^2\sin\varphi + 2\rho)\,d\rho =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\cdot\sin\varphi + \rho^2\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{64}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi + 16\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\cos\varphi + 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = -\frac{16}{3}\cdot\cos^4\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$+8\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8\cdot \#$$

Вопросы и задания

Задание 1.

Найти неопределенные интегралы.

Номер вар.	Интегралы
1	а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[8]{1-e^x}}$; б) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3}dx$; в) $\int (5x-2)\ln x dx$; г). $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$
2	а) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$; б) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6}dx$; в) $\int x\cdot\cos^2(2x)dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x+tgx}$.
3	а) $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{x+9}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$; в) $\int x\cdot\arcsin x dx$; г). $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$
4	а) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{2x+27}{\sqrt{x^2-x-12}}dx$; в) $\int \ln(3+x^2)dx$; г). $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}$
5	а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$; б) $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12}dx$; в) $\int (2-x)\sin x dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.
6	а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$; в) $\int (1-\ln x)dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$.
7	а) $\int \frac{1-tgx}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$; в) $\int (3x+4)\cos x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$.
8	а) $\int \frac{x^2}{8+x}dx$; б) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$; в) $\int arcctg(4x)dx$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.
9	а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+3}dx$; б) $\int \frac{4x-27}{2x^2-x-6}dx$; в) $\int x\ln^2 x dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

10	а) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}dx$; б) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}dx$; в) $\int x^2 \sin 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$.
11	а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$; в) $\int \frac{x-101}{x^3+2x^2+101x}dx$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
12	а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.
13	а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int x 3^x dx$; в) $\int \frac{x^3+3x+3}{x^4+3x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.
14	а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$; б) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.
15	а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 \sin 4x dx$; в) $\int \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x^4+2x^2}dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.
16	а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin\frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)dx}{(\sqrt[4]{x}+4)^4\sqrt{x^3}}$.
17	а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg}x)dx}{1+x^2}$; б) $\int x\ln(x^2+1)dx$; в) $\int \frac{x^3-3}{x^4+3x^2}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$.
18	а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int x\sin x\cos x dx$; в) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^4+2x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$.
19	а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x^2 e^{3x}dx$; в) $\int \frac{4x^2+3x+50}{x^3+2x^2+50x}dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.
20	а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x\ln^2 x dx$; в) $\int \frac{x^3+3x^2+5}{x^4+5x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

Задание 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж области.

Номер вар.	Уравнения линий

1	$y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$
2	$y=x\sqrt{9-x2},\quad y=0,\ (0\le x\le 3).$
3	$y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$
4	$y=\sin x\cos 2x,\quad y=0,\ (0\le x\le \pi/2).$
5	$y=\sqrt{4-x^2},\quad y=0, x=0,\quad x=1.$
6	$y=x2\sqrt{4-x2},\quad y=0,\ (0\le x\le 2).$
7	$y=\cos x\sin 2x,\quad y=0,\ (0\le x\le \pi/2).$
8	$y=\sqrt{e^x-1},\quad y=0, x=\ln 2.$
9	$y=\arccos x,\quad y=0, x=0.$
10	$y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3.$
11	$y=x\sqrt{36-x^2},\quad y=0,\ (0\le x\le 6).$
12	$x=\arccos y,\quad x=0, y=0.$
13	$y=\operatorname{arctg} x,\quad y=0, x=\sqrt{3}.$
14	$y=x^2\sqrt{8-x^2},\quad y=0,\ \left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right).$
15	$y=x\sqrt{4-x2},\quad y=0,\ (0\le x\le 2).$
16	$x=\sqrt{e^y-1},\quad x=0, y=\ln 2.$
17	$x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$
18	$y=\cos^5 x\sin 2x,\quad y=0,\ (0\le x\le \pi/2).$
19	$y=x^2\sqrt{16-x^2},\quad y=0,\ (0\le x\le 4).$
20	$x=4-(y-1)^2,\ x=y2-4y+3.$

Практическое занятие по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель: Целью освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, содержащее независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y* и ее производные $y', y'',..., y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0 . \qquad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется уравнением в общем виде.

Определение 2. Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Определение 3. Уравнение, разрешенное относительно старшей входящей в него производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}), \qquad (1.2)$$

называется уравнением *n*-го порядка в нормальной форме.

Определение 4. Решением уравнения (1.1) (или (1.2)) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения на плоскости Оxy называется интегральной кривой.

Однородное уравнение (ЛОДУ)

Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x)\,; \tag{5.1}$$

$p_i(x)\ (i = \overline{1, n})$ называются коэффициентами ДУ, $f(x)$ – правой частью (5.1).

Определение 1. Если при всех рассматриваемых значениях x функция ,

то уравнение (5.1) называется однородным (ЛОДУ); в противном случае оно называется неоднородным (ЛНДУ).

Теорема 1. Если коэффициенты $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (a,b), то для любых начальных условий (4.1) задача Коши имеет решение и оно единственно.

Всякое решение уравнения (5.1) является частным решением, так что особых решений оно не имеет.

Однородное линейное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0 \tag{5.2}$$

(всегда) имеет нулевое решение $y \equiv 0$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $y = y' = \ldots = y^{(n-1)} = 0$ при $x = 0$ и оно единственно.

Теорема 2. Общее решение ЛОДУ есть линейная комбинация решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ его фундаментальной системы:

$$y_0 = C_1 y_2 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{5.3}$$

Определение 2. Фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (5.2) называется *n* его любых линейно-независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Замечание. Для любого ЛОДУ существует бесконечное число фундаментальных систем решений.

Определение 3. Система из n функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ называется линейно-независимой (на (a,b)) системой, если тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \overset{x}{\equiv} 0 \qquad (5.4)$$

выполняется лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Теорема 3. Чтобы система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (5.5)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b).

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Решение. Приводим уравнение к виду (3.1). Имеем: $x^2 y^2 \dfrac{dy}{dx} = y - 1;$ $x^2 y^2 dy = (y-1)dx$. Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$: $\dfrac{y^2}{y-1}dy = \dfrac{dx}{x^2}$ – приходим к уравнению с разделенными переменными. Интегрируем обе части уравнения (применяем формулу (3.3)): $\displaystyle\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2} + C;$ $\dfrac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\dfrac{1}{x} + C$. При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ – решение уравнения, а $x = 0$ – нет.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0$, зная, что соответствующее ЛОДУ имеет частное решение $y_1(x) = x$.

Решение. 1. Найдем общее решение ЛОДУ $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$. Найдем y_2:

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int\frac{xdx}{1+x^2}}}{x^2}dx = x\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -x\int\frac{\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+x^2}.$$

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o} = C_1 x + C_2\sqrt{1+x^2}$.

2. Найдем общее решение ЛНДУ. а) очевидно, что $y = 1$ есть частное решение и по формуле (5.7) общее решение ЛНДУ: $y = C_1 x + C_2\sqrt{1 + x^2} + 1$. б) найдем общее решение по методу вариации произвольных постоянных. Составляем систему (5.9), приведя исходное уравнение к виду (5.1):

$$C_1' x + C_2' \cdot \sqrt{1 + x^2} = 0; \quad C_1' + C_2' \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Решим систему алгебраически: $C_1' = -1,\ C_2' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Интегрируя, найдем: $C_1(x) = -x + C_1$,

$C_2(x) = \sqrt{1 + x^2} + C_2$ и общее решение ЛНДУ

$$y = (-x + C_1)x + (\sqrt{1 + x^2} + C_2)\sqrt{1 + x^2} = C_1 x + C_2\sqrt{1 + x^2} + 1.$$

Задание 1

1) Найти общее решение дифференциального уравнения I порядка.

2) Найти частное решение дифференциального уравнения II порядка , удовлетворяющее начальным условиям .

.№ вар-та	Задания
1	1) ; 2)
2	1) ; 2)
3	1) ; 2)
4	1) ; 2)
5	1) ; 2)
6	1) ; 2)
7	1) ; 2)
8	1) ; 2)
9	1) ; 2)
10	1) ; 2)

Практическое занятие по теме «Ряды»

Цель: Целью освоения темы «Ряды» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Ряды» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Числовым рядом называется сумма вида

[redacted] (1.1)

где [redacted], [redacted], [redacted],…, [redacted],…, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член [redacted] называется общим членом ряда.

Суммы

[redacted]

…………..

[redacted],

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм [redacted].

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда [redacted] стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

[redacted] и $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)=S$.

Эта запись равносильна записи

[redacted].

Если частичная сумма [redacted] ряда (1.1) при неограниченном возрастании *n* не имеет конечного предела (стремится к [redacted] или [redacted]), то такой ряд называется ***расходящимся***.

Если ряд ***сходящийся***, то значение [redacted] при достаточно большом ***n*** является приближенным выражением суммы ряда S.

Разность [redacted] называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е.[redacted], и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Пример 1. Ряд вида

[redacted] (1.2)

называется ***геометрическим*** $(a \neq 0)$.

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых n членов [redacted]. Очевидно: это n-ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

[redacted]: [redacted].

Ряд (1.2) принимает вид:

[redacted],

[redacted], ряд расходится;

[redacted]

Ряд (1.2) принимает вид:

[redacted],

[redacted]

[redacted] не имеет предела, ряд расходится.

[redacted],

[redacted] - конечное число, ряд сходится.

[redacted],

[redacted] - ряд расходится.

Итак, данный ряд сходится при [redacted] и расходится при [redacted].

Вопросы и задания

Задачи 21-30

В задачах № 11-0 найти область сходимости степенного ряда.

В задачах № 11-20 исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

11. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

12. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n^3}{n^3+1}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{5^{n+1}}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{2n+1}$.

13. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{2^n+1}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+1}$.

14. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\sin n}}{\sqrt{n^3+3n}}$; б) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{\pi^n}$; в) $\sum_{2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

15. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^5+3n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$.

16. а) $\sum_{2}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{n^3+3n}}$.

17. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\sin n}}{n\sqrt[3]{n+1}}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$.

18. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{2^n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n^2+1}$.

19. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n!}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{2n+1}$.

20. а) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^3 n}{n+3^n}$; б) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{(2n-1)!}$; в) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n-1}}$.

Практическое занятие по теме «Теория вероятностей и элементы математической статистики»

Цель: Целью освоения темы «Теория вероятностей и элементы математической статистики» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 13.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

-использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Теория вероятностей и элементы математической статистики» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Случайные события. Вероятность события

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Достоверным называется событие Ω, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие ∅, которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\cdot B$, $A\cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Противоположным к событию A называется такое событие $\overline{A}$, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k=1, 2, ..., n) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:

$A+\overline{A}=\Omega$; $\quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$; $\quad A+\Omega=\Omega$; $\quad A\cdot\Omega=A$; $\quad A\cdot\varnothing=\varnothing$;

$A+\varnothing=A$; $\quad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\quad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$; $\quad A+\overline{A}\cdot B=A+B$.

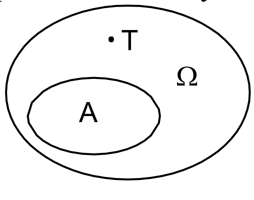
Классическое определение вероятности: вероятность события определяется по формуле

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

где n - число всех элементарных равновозможных исходов данного опыта;

m - число равновозможных исходов, благоприятствующих событию А.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую



область случайным образом бросается точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T. Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$\mathrm{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{2}$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и Ω соответственно.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Если A и B - **несовместные события**, то

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B). \tag{9}$$

Если имеется счетное множество несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{10}$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей каждого из событий минус вероятность их совместного появления:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cdot B), \tag{11}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A \cdot B)-\mathrm{P}(B \cdot C)-\mathrm{P}(A \cdot C)+\mathrm{P}(A \cdot B \cdot C). \tag{12}$$

Событие A называется ***независимым*** от события B, если возможность наступления события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

В противном случае события являются зависимыми. ***Условной вероятностью*** события B при наличии А называется величина

$$\mathrm{P}(B/A)=\mathrm{P}(A \cdot B)/\mathrm{P}(A) \tag{13}$$

(при этом полагается, что $\mathrm{P}(A)$ не равно 0).

Пример 1.1. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность p того, что следующий транзистор будет стандартным.

Решение. Всего осталось для проверки $n+m-k$ транзисторов, из которых стандартных $n-k$. По формуле классического определения вероятности

$$p = \frac{n-k}{n+m-k}.$$

Пример 1.2. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь студентов третьего курса. Из этого состава наугад выбирают пять человек. Найти вероятность того, что все первокурсники попадут в совет.

Решение. Число способов выбрать пять человек из 3+5+7=15 равно числу сочетаний из 15 по 5 (неупорядоченная выборка без повторений):

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!\cdot 10!} = 3003 .$$

Выбрать трех первокурсников из трех можно одним способом. Оставшихся двух членов совета можно выбрать C_{12}^{2} способами:

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = 66 .$$

Искомая вероятность p=66/3003=2/91.

Вопросы и задания

Задание 1.

В задачах 1.1-1.5 подбрасываются две игральные кости.

1.1. Определить вероятность того, что сумма выпавших чисел равна восьми.

1.2. Определить вероятность того, что сумма выпавших чисел делится без остатка на шесть.

1.3. Определить вероятность того, что сумма выпавших чисел превышает 10.

1.4. Определить вероятность того, что выпадут одинаковые числа.

1.5. Определить вероятность того, что выпадут разные, но четные числа.

1.6. В урне четыре белых и пять черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что один из этих шаров - белый, а другой - черный.

1.7. В урне четыре белых и пять черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут одинакового цвета.

1.8. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово “математика”.

1.9. Телефонный номер состоит из шести цифр, каждая из которых равновозможно принимает значения от 0 до 9. Найти вероятность того, что все цифры одинаковы.

1.10. Условие задачи 1.9. Вычислить вероятность того, что все цифры четные.

1.11. Условие задачи 1.9. Вычислить вероятность того, что номер не содержит цифры пять.

1.12. Условие задачи 1.9. Вычислить вероятность того, что все цифры различные и расположены в порядке возрастания (соседние цифры отличаются на 1).

В задачах 1.13-1.19 наудачу взяты два положительных числа x и y, причем $x \le 5$, $y \le 2$.

Найти вероятность того, что $y+ax-b \le 0$ и $y-cx \le 0$.

1.13. a=1, b=5, c=1.

1.14. a=1, b=5, c=0,5.

1.15. a=1, b=5, c=0,25.

1.16. a=1, b=5, c=2.

1.17. a=2, b=10, c=2.

1.18. a=2, b=10, c=1.

1.19. a=2, b=10, c=0,5.

В задачах 1.20-1.23 из колоды в 36 карт (6,7,8,9,10,В,Д,К,Т) наугад извлекаются 3 карты.

1.20. Определить вероятность того, что будут вытащены карты одной масти.

1.21. Определить вероятность того, что будут вытащены три туза.

1.22. Определить вероятность того, что будут вытащены карты разных мастей.

1.23. Определить вероятность того, что среди извлеченных карт не будет 9.

1.24. На плоскости проведены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии 8 см. Определить вероятность того, что наугад брошенный на эту плоскость круг радиусом 3 см не будет пересечен ни одной линией.

1.25. В урне пять белых и восемь черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

В задачах 1.26-1.30 номер автомобиля содержит четыре цифры, каждая из которых равновозможно принимает значения от 0 до 9 (возможен номер 0000).

1.26. Определить вероятность того, что вторая цифра номера равна четырем.

1.27. Определить вероятность того, что номер содержит хотя бы одну цифру 0.

1.28. Определить вероятность того, что первые три цифры номера равны пяти.

1.29. Определить вероятность того, что номер делится на 20 .

1.30. Определить вероятность того, что номер не содержит цифры 2.

Задание 2.

Дано распределение признака *X* (случайной величины *X*), полученной по выборке объема *n*=100 (таблица 4). Методом произведений найти: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Таблица 4

Вариант	x_i	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**
1	n_i	1	3	6	11	15	20	14	12	10	6	2
2	n_i	2	3	5	11	14	20	15	12	9	6	4
3	n_i	1	2	6	12	15	20	14	13	10	5	2
4	n_i	2	2	6	11	14	21	14	12	10	6	2
5	n_i	1	3	5	12	15	20	16	11	9	6	2

6	n_i	2	4	7	11	14	19	13	12	10	5	3
7	n_i	2	3	7	11	14	20	14	12	8	6	3
8	n_i	2	4	6	12	15	20	13	11	10	5	2
9	n_i	1	4	7	11	15	21	14	11	10	5	1
10	n_i	1	4	6	12	14	20	14	12	10	5	2
11	n_i	1	4	7	12	15	20	15	11	9	5	1
12	n_i	2	3	6	12	16	20	15	12	8	5	1
13	n_i	2	3	7	12	16	20	14	11	8	6	1
14	n_i	1	3	6	12	16	22	14	11	9	4	2
15	n_i	2	3	6	12	15	22	14	12	8	5	1
16	n_i	1	4	8	11	16	21	14	11	8	5	1
17	n_i	1	5	7	11	16	20	15	10	8	5	2
18	n_i	1	5	8	11	15	20	14	11	9	4	2
19	n_i	1	4	8	12	15	21	14	11	9	4	1
20	n_i	1	4	7	10	16	21	14	12	9	4	3
21	n_i	1	4	6	11	15	23	15	10	9	5	1
22	n_i	2	3	7	12	16	18	15	12	8	5	2
23	n_i	2	3	5	12	16	24	12	11	8	6	1
24	n_i	1	2	6	12	16	23	14	11	9	4	2
25	n_i	1	3	6	12	15	21	17	12	7	5	1
26	n_i	1	4	8	11	17	21	14	10	8	5	1
27	n_i	1	5	7	11	14	22	15	10	8	5	2
28	n_i	1	5	8	11	13	23	14	11	9	4	1
29	n_i	1	4	8	12	15	18	14	11	10	5	2
30	n_i	1	4	7	10	14	23	14	12	9	4	3

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 c. — 978- 5-8265-1412-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/63859.html
2. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебник / А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 c. — ISBN 978-5-94211-710-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71687.html
3. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное

исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 с. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71688.html
4. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 с. — ISBN 978- 5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71689.html
5. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 с. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71690.html
6. Высшая математика. Том 5. Теория вероятностей. Основы математической статистики. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление : учебник / А. П. Господариков, Е. Г. Булдакова, Л. И. Гончар [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 207 с. — ISBN 978-5-94211-715-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71691.html
7. Высшая математика. Том 6. Специальные функции. Основные задачи математической физики. Основы линейного программирования : учебник / Г А. П. осподариков, И. Б. Ерунова, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 122 с. — ISBN 978-5-94211-720-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71692.html

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитонова, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.html

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению самостоятельной работы
по дисциплине «Математические методы в решении профессиональных задач» для студентов направления подготовки 18.03.01 Химическая технология,
направленность (профиль) Химическая технология неорганических веществ

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящее пособие разработано на основе:

– Федерального закона от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

– Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (далее ФГОС ВО);

– нормативно-методических документов Минобрнауки России;

– Устава ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»;

– Приказом Минобрнауки России от 06.04.2021 N 245 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» (Зарегистрировано в Минюсте России 13.08.2021 N 64644);

– локальных нормативных актов ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет».

На современном рынке труда конкурентоспособным может стать только квалифицированный работник соответствующего уровня и профиля, компетентный, свободно владеющей своей профессией и ориентированный в смежных областях деятельности, способный к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов и готовый к постоянному профессиональному росту.

Самостоятельная работа студента направлена на достижение целей подготовки специалистов-профессионалов, активное включение обучаемых в сознательное освоение содержания образования, обеспечение мотивации, творческое овладение основными способами будущей профессиональной деятельности. Чтобы подготовить и обучить такого профессионала, высшим учебным заведениям необходимо скорректировать свой подход к планированию и организации учебно-воспитательной работы. Это в равной степени относится к изменению содержания и характера учебного процесса. В современных реалиях задача преподавателя высшей школы заключается в организации и направлении познавательной деятельности студентов, эффективность которой во многом зависит от их самостоятельной работы. В свою очередь, самостоятельная работа студентов должна представлять собой не просто самоцель, а средство достижения прочных и глубоких знаний, инструмент формирования активности и самостоятельности студентов.

В связи с введением в образовательный процесс новых образовательных стандартов, с уменьшением количества аудиторных занятий по дисциплинам возрастает роль самостоятельной работы студентов. Возникает необходимость оптимизации самостоятельной работы студентов (далее - СРС). Появляется необходимость модернизации технологий обучения, что существенно меняет подходы к учебно-методическому и организационно-техническому обеспечению учебного процесса.

Данная методическая разработка содержит рекомендации по организации, управлению и обеспечению эффективности самостоятельной работы студентов в процессе обучения в целях формирования необходимых компетенций.

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом учебного процесса для каждого студента и определяется учебным планом. Виды самостоятельной работы студентов определяются при разработке рабочих программ и учебных методических комплексов дисциплин содержанием учебной дисциплины. При определении содержания самостоятельной работы студентов следует учитывать их уровень самостоятельности и требования к уровню самостоятельности выпускников для того, чтобы за период обучения искомый уровень был достигнут. Так, удельный вес самостоятельной работы при обучении в очной форме составляет до 50% от количества аудиторных часов, отведённых на изучение дисциплины, в заочной форме - количество часов, отведенных на освоение дисциплины, увеличивается до 90%.

Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства педагога, но по его заданиям и под его контролем.

Самостоятельная работа – это познавательная учебная деятельность, когда последовательность мышления студента, его умственных и практических операций и действий зависит и определяется самим студентом. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня, что в итоге приводит к развитию навыка самостоятельного планирования и реализации деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение необходимыми компетенциями по своему направлению подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности.

На основании компетентностного подхода к реализации профессиональных образовательных программ, видами заданий для самостоятельной работы являются:

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и информационно-телекоммуникационной сети Интернет и др.
- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции, обработка текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио и видеозаписей), повторная работа над учебным материалом, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответ на контрольные вопросы, заполнение рабочей тетради, аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект-анализ и др.), завершение аудиторных практических работ и оформление отчётов по ним, подготовка мультимедиа сообщений/докладов к выступлению на семинаре (конференции), материалов-презентаций, подготовка реферата, составление библиографии, тематических кроссвордов, тестирование и др.
- *для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач, выполнение чертежей, схем, выполнение расчетов (графических работ), решение ситуационных (профессиональных) задач, подготовка к деловым играм, проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Контроль результатов самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине и внеаудиторную самостоятельную работу студентов по дисциплине, может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

Самостоятельная работа проводится в виде упражнений при изучении нового материала, упражнений в процессе закрепления и повторения, упражнений проверочных и контрольных работ, а также для самоконтроля.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

1. готовность студентов к самостоятельному труду;

2. наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;

3. консультационная помощь.

Самостоятельная работа может проходить в лекционном кабинете, компьютерном зале, библиотеке, дома. Самостоятельная работа способствует формированию компетенций, тренирует волю, воспитывает работоспособность, внимание, дисциплину и ответственность.

1 Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Дисциплина «Математические методы в решении профессиональных задач» относится к дисциплине базовой части. Она направлена на формирование профессиональных компетенций обучающихся в процессе выполнения работ, определенных ФГОС ВО.

Наименование компетенций:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-1 выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает сущность и значение математических основ и законов, сущность и значение информации в развитии современного общества
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-2 осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Получает и обрабатывает информацию из различных источников для решения профессиональных задач из области технологические машины и оборудование. Использует аналитические и численные методы решения задач профессиональной деятельности, методы обработки информации с использованием прикладных программных средств
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-3 определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Интерпретирует, структурирует и оформляет информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для

		других виде. Обеспечивает применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыками самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения
ОПК-2 Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности	ИД-1 ОПК-2 знаком с математическими, физическими, физико-химическими, химическими методами решения задач профессиональной деятельности	Понимает основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности
ОПК-2 Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности	ИД-2 ОПК-2 решает стандартные профессиональные задачи с применением математических, физических, физико-химических, химических методов	Анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы. Применяет теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности
ОПК-2 Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности	ИД-3 ОПК-2 применяет методы теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности математическими, физическими, физико-химическими и химическими методами	Овладел навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом. Использует навыки решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

В рамках курса дисциплины «Математические методы в решении профессиональных задач» самостоятельная работа студентов находит активное применение и включает в себя различные виды деятельности:

– подготовка к практическим занятиям, в том числе работа с методическими указаниями, средствами массовой информации;
– подготовка к лекциям, в том числе самостоятельное углубленное изучение теоретического курса по рекомендованной литературе;
– подготовка к промежуточной аттестации.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к лекциям заключается в получении новых знаний, приобретенных при более глубоком изучении литературы по дисциплине.

Задачи:

– доработка и повторение конспектов лекции;

– осмысление содержания лекции, логической структуры, выводов.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к практическим занятиям заключается в углублении, расширении, детализировании знаний, полученных на лекциях в обобщенной форме.

Задачи:

– развить способность применять полученные знания на практике при решении конкретных задач;

– проверить знания студентов, полученные на лекциях и при самостоятельном изучении литературы.

2 План-график выполнения самостоятельной работы

Таблица 1 – Виды самостоятельной работы для очной формы обучения

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр					
ИД-1 УК-1 ИД-2 УК-1 ИД-3 УК-1 ИД-1 ОПК-2 ИД-2 ОПК-2 ИД-3 ОПК-2	Подготовка к лекционному занятию	Собеседование	8.31	0.92	9.23
ИД-1 УК-1 ИД-2 УК-1 ИД-3 УК-1 ИД-1 ОПК-2 ИД-2 ОПК-2 ИД-3 ОПК-2	Подготовка к практическому занятию	Собеседование	24.92	2.77	27.69
ИД-1 УК-1 ИД-2 УК-1 ИД-3 УК-1 ИД-1 ОПК-2 ИД-2 ОПК-2 ИД-3 ОПК-2	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	49.8	5.53	55.33
ИД-1 УК-1 ИД-2 УК-1 ИД-3 УК-1 ИД-1 ОПК-2 ИД-2 ОПК-2 ИД-3 ОПК-2	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	6.07	0.68	6.75
Итого за 2 семестр			89.05	9.9	98.95
Итого			89.05	9.9	98.95

3 Контрольные точки и виды отчетности по ним

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

4 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Компетенция (ии), индикатор(ы)	Уровни сформированности компетенции(ий)			
	Минимальный уровень не достигнут (Неудовлетворительно) 2 балла	Минимальный уровень (удовлетворительно) 3 балла	Средний уровень (хорошо) 4 балла	Высокий уровень (отлично) 5 баллов
КомпетенцияУК-1				
ИД-1 УК-1 Знать: принципы сбора, отбора и обобщения информации	не в достаточном объеме знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	имеет общее представление о принципах сбора, отбора и обобщения информации	понимает принципы сбора, отбора и обобщения информации	понимает и осуществляет принципы сбора, отбора и обобщения информации
ИД-2 УК-1 Уметь: соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	не в достаточном объеме умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	умеет частично соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности	соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности
ИД-3 УК-1 Владеть: практическим опытом работы с информационным и источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	не имеет практического опыта работы с информационным и источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	частично имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	овладевает практическим опытом работы с информационными источниками, опытом научного поиска, создания научных текстов.	использует и применяет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов
Компетенция ОПК-2				

ИД-1 ОПК-2 Знать: основы физики, основы вычислительной техники и программирования	не знает основы физики, основы вычислительной техники и программирования	частично знает основы физики, основы вычислительной техники и программирования	понимает и знает основы физики, основы вычислительной техники и программирования	понимает, знает, анализирует основы физики, основы вычислительной техники и программирова
ИД-2 ОПК-2 Уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний,	не умет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	частично умет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний,	умет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов	анализирует и умет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний,
ИД-3 ОПК-2 Иметь навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной	не овладел навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	частично овладел навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	овладел навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.	использует и применяет навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной

5 Тематический план ДИСЦИПЛИНЫ

№	Раздел (тема) дисциплины и краткое содержание	Формируемые компетенции, индикаторы	очная форма			
			Контактная работа обучающихся с преподавателем /из них в форме практической подготовки, часов			Самостоятельная работа, часов
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	

1	Введение в дисциплину. Место дисциплины «Математические методы в решении профессиональных задач» в развитии способностей осуществлять поиск математической информации, проводить ее критический анализ и синтез, применять базовые математические знания, методы математического анализа и моделирования в решении профессиональных задач	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)	1.50			
2	Линейная алгебра. Применение методов линейной алгебры для сбора, отбора и обобщения информации при решении практических задач	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)	1.50			
3	Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Базовые методы векторной алгебры и аналитической геометрии в теоретических и экспериментальных исследованиях	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)	1.50			
4	Математический анализ. Функции одной переменной. Методы математического анализа в моделировании, теоретическом и экспериментальном исследовании при решении профессиональных задач	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)		1.50		
5	Математический анализ. Функции нескольких переменных в критическом анализе и синтезе информации, применении системного подхода для решения прикладных задач	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)		1.50		
6	Интегральное исчисление функции одной переменной. Методы интегрального исчисления в моделировании и теоретических исследованиях в профессиональной деятельности	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)		1.50		
7	Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Методы интегрального исчисления в моделировании и теоретических исследованиях в профессиональной деятельности	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)				
8	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория дифференциальных уравнений в теоретическом описании и моделировании процессов при решении профессиональных задач.	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)				
9	Ряды. Теория рядов в анализе, моделировании, применении системного подхода при решении профессиональных задач.	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)				
10	Теория вероятностей и элементы математической статистики. Их место в теоретическом и экспериментальном исследовании при решении профессиональных задач.	ОПК-2 (ИД-1, ИД-2,ИД-3), УК-1(ИД-1, ИД-2, ИД-3)				
	ИТОГО за 2 семестр		4.50	4.50		92.25

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
2 семестр			
1	Введение в дисциплину 1. Предмет и задачи математики, история развития и место математики среди других наук. Место математики в формировании способности использовать основные закономерности, действующие в процессе изготовления продукции требуемого качества. Значение дисциплины в формировании способностей к самоорганизации и самообразованию.		
2	Линейная алгебра 1. Определители и матрицы. Определители 2, 3, n-го порядков. Матрицы, основные понятия, определения. Линейные операции с матрицами и их свойства. Операции умножения, транспонирования матриц и их свойства. Обратная матрица. Понятие о ранге матрицы.		
2	Линейная алгебра 1. Общая теория линейных систем. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Теорема Кронекера-Капелли. Методы решения: Крамера, матричный, метод Гаусса. Однородные СЛАУ.		
3	Векторная алгебра и аналитическая геометрия 1. Аналитическая геометрия. Прямая на плоскости. Основные уравнения. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. Прямая и плоскость в пространстве. Основные уравнения. Взаимное расположение прямых, плоскостей, прямой.		
3	Векторная алгебра и аналитическая геометрия 1. Кривые и поверхности второго порядка		
4	Математический анализ. Функции одной переменной. 1. Множества. Последовательность. Функция. Основные понятия. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Бесконечно малые функции и их свойства. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функций. Свойства непрерывных в точке функций. Предел и непрерывность сложной функции. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.		
4	Математический анализ. Функции одной переменной.		

	1. Производная функции. Ее геометрический и механический смысл. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Правило Лопиталя. Дифференциал функции. Дифференцируемость функций. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.		
5	Математический анализ. Функции нескольких переменных. Роль раздела в анализе и моделировании при решении профессиональных задач. 1. Предел, непрерывность, частные производные. Понятия предела, непрерывности функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближённых вычислениях. Производная по направлению и градиент. Экстремумы. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. 2.Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа в решении задач электротехники.		
6	Интегральное исчисление функции одной переменной. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Методы интегрирования.	1.5	
6	Интегральное исчисление функции одной переменной. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.		
6	Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Методы замены переменной и интегрирования по частям. Приложения определенных интегралов.		
6	Интегральное исчисление функции одной переменной. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода. Признаки сравнения в исследовании интегралов на сходимость.	1.5	
7	Интегральное исчисление функции нескольких переменных. Кратные интегралы. Замена переменных в кратных интегралах и вычисление их в цилиндрической системе координат. Приложения		

	кратных интегралов.		
8	Обыкновенные дифференциальные уравнения. ДУ первого порядка. Задача Коши. Классы уравнений, интегрируемых в квадратурах: с разделяющимися переменными, линейные неоднородные ДУ 1-го порядка, уравнение Бернулли. Однородные ДУ. ДУ в полных дифференциалах.	1.5	
9	Ряды. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд Фурье функций с произвольным периодом. Теория рядов в анализе и моделировании при решении профессиональных задач.		
10	Теория вероятностей и элементы математической статистики. Место теории вероятностей в теоретическом и экспериментальном исследовании при решении профессиональных задач.		
	Итого за 2 семестр	**4.5**	
	Итого	**4.5**	

6 Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Математическая символика разделов линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ. Основные методы анализа и моделирования, используемые в данных разделах.
2. Теория определителей и их основные свойства. Методы вычисления определителей.
3. Понятия теории матриц. Действия над матрицами. Определение обратной матрицы. Условия существования обратной матрицы.
4. Теория систем линейных алгебраических уравнений. Понятие ранга матрицы системы. Теорему Кронекера-Капелли. Матричная запись системы. Метод Гаусса решения СЛАУ. Алгоритм решения систем матричным методом и по правилу Крамера.
5. Понятие геометрического векторного пространства. Линейные операции над векторами. Понятие коллинеарности векторов. Понятие линейной зависимости и независимости векторов на плоскости и в пространстве. Понятие базиса. Разложение по базису. Понятие декартовых прямоугольных координат векторов, их геометрический смысл. Действия над векторами в координатной форме.
6. Понятие скалярного произведения векторов. Свойства скалярного произведения. Физический смысл скалярного произведения. Формула скалярного произведения в координатной форме. Понятия длины вектора, угла между векторами. Условие перпендикулярности, условие коллинеарности двух векторов.
7. Понятие векторного произведения векторов. Свойства векторного произведения векторов. Геометрический смысл векторного произведения. Формула векторного произведения в координатной форме. Вычисление площади треугольника по координатам его вершин.
8. Понятие смешанного произведения трех векторов. Выражение смешанного произведения через координаты векторов. Свойства смешанного произведения. Геометрический смысл смешанного произведения. Необходимое и достаточное условия компланарности трех векторов.
9. Уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.
10. Уравнения плоскости. Понятия угла между двумя плоскостями. Условия перпендикулярности и параллельности двух плоскостей.
11. Понятия угла между двумя прямыми в пространстве и на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве и на плоскости.

12. Понятие угла между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.
13. Определение эллипса, гиперболы, параболы. Канонические уравнения. Исследования формы.
14. Определение функции. Основные элементарные функции. Гиперболические функции. Определение предела функции в точке и на бесконечности. Определение бесконечно больших функций и их свойств.
15. Определение бесконечно малых функций и их свойств. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями. Методика сравнения бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые.
16. Теория пределов. Понятие непрерывности функции в точке. Определение непрерывной функции. Понятие односторонних пределов. Определение точек разрыва функций.
17. Понятие производной функции. Ее геометрический и физический смысл. Методика дифференцирования сложных функций. Методика дифференцирования обратных функций. Методика дифференцирования функций, заданных параметрически. Логарифмическая производная.
18. Понятие дифференциала функции. Правила нахождения. Геометрическую интерпретацию. Использование дифференциала в приближенных вычислениях.
19. Определения производных и дифференциалов высших порядков. Инвариантность первого дифференциала
20. Теория функций нескольких переменных, геометрическая интерпретация. Предел функции НП в точке. Окрестность. Понятие непрерывности ФНП. Определения частных и полных приращений ФНП, частных производных. Производная сложной функции. Полный дифференциал.
21. Понятия экстремума ФНП, необходимого и достаточного условий существования экстремумов. Методика поиска наибольшего и наименьшего значений ФНП в области.
22. Место интегрального исчисления в анализе и моделировании, теоретическом исследовании при решении профессиональных задач. Методы вычисления неопределенного интеграла (непосредственное интегрирование, подстановкой, по частям).
23. Понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла в анализе и моделировании:
24. Понятие несобственных интегралов 1-го и 2-го родов.
25. Понятие двойного интеграла. Свойства. Переход от декартовых координат к полярным и цилиндрическим координатам. Понятие тройного интеграла. Свойства. Переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам.
26. Место теории обыкновенных дифференциальных уравнений в анализе и моделировании, теоретическом исследовании при решении профессиональных задач.
27. Понятие дифференциальных уравнений 1-го порядка и задачи Коши. Определение линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Методика решений методом Бернулли и методом вариации произвольных постоянных. Определение однородных дифференциальных уравнений первого порядка.
28. Классы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка. Понятие однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, общего решения. Определение структуры общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
29. Определение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. Метод неопределенных коэффициентов. Методы решения систем дифференциальных уравнений при анализе и моделировании.
30. Место теории рядов в анализе и моделировании, теоретическом исследовании при решении профессиональных задач.

31. Определение числовых рядов и основные определения. Понятия сходимости и суммы ряда. Определение знакоположительных рядов и достаточных признаков сходимости. Определение знакопеременных рядов, абсолютной и условной сходимости.
32. Понятие степенных рядов и формулировку теоремы Абеля. Определения рядов Тейлора и Маклорена. Методика разложения функций в степенные ряды
33. Место теории вероятности в теоретическом и экспериментальном исследовании, анализе и моделировании при решении профессиональных задач. Место математической статистики в теоретическом и экспериментальном исследовании, анализе и моделировании при решении профессиональных задач.
34. Значение раздела теория вероятностей и математическая статистика в развитии способности реализовывать аналитические и численные методы решения поставленных задач с использованием информационных технологий и пакетов программ с обработкой их результатов.
35. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Числовые характеристики.
36. Законы распределения: биномиальный, Пуассона, равномерный, показательный, нормальный.
37. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения.
38. Проверка статистических гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки 1-го и 2-го рода.
39. Критерии оценки нулевой гипотезы.

7 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Самостоятельная работа студента в ходе **лекционных занятий** включает изучение вопросов теории, вынесенных на самостоятельное изучение в соответствии с рабочей программой дисциплины, проработку лекционных материалов для подготовки к контролю знаний на лекционных занятиях (опрос) и подготовку вопросов для обсуждения при консультации с преподавателем.

Работа с лекционным материалом не завершается по окончании лекции. На 2 часа лекции необходимо затратить около часа на работу с конспектом. За это временя необходимо перечитать записи, пополнить их данными, которые удалось запомнить из речи преподавателя, но не удалось записать. Работая с конспектом, нужно отметить непонятные вопросы для выяснения которые у преподавателя на консультации. Отдельно следует выделить связанные с темой лекции вопросы, которые преподаватель поручил проработать самостоятельно.

Активно проработанный в течение семестра конспект лекций в дальнейшем служит основой для подготовки к экзамену.

Вопросы для самостоятельного изучения представлены в п. 5.

Самостоятельная работа в ходе **практикума** включает выполнение заданий к практическим занятиям, в частности решение задач различного уровня сложности. Задачи приведены в методических указаниях к практическим занятиям и фондах оценочных средств.

Зная тему практического занятия, необходимо готовиться к нему заблаговременно. Для эффективной подготовки к практическому занятию необходимо иметь методическое руководство к практическому занятию.

Критерии оценивания практических занятий представлен в фонде оценочных средств.

При проверке практического задания, оцениваются: последовательность и рациональность изложения материала; полнота и достаточный объем ответа; научность в оперировании основными понятиями; использование и изучение дополнительных литературных источников

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы: вопросы для собеседования и экзамена приведены Фонде оценочных средств по дисциплине

8 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь вариативный и дифференцированный характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

9 Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на семинар. Готовясь к докладу или реферативному сообщению, обращаться за методической помощью к преподавателю. Составить план-конспект своего выступления. Продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной жизнью. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании работ.

10 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Практическое занятия – один из самых эффективных видов учебных занятий, на которых студенты учатся творчески работать, аргументировать и отстаивать свою позицию, правильно и доходчиво излагать свои мысли перед аудиторией. Основное в подготовке и проведении практических занятий – это самостоятельная работа студента над изучением темы. Студент обязан точно знать план занятия либо конкретное задание к нему. На занятии обсуждаются узловые вопросы темы, однако там могут быть и такие, которые не были предметом рассмотрения на лекции. Могут быть и специальные задания к той или иной теме.

Готовиться к практическому занятию следует заранее. Необходимо внимательно ознакомиться с планом и другими материалами, уяснить вопросы, выносимые на обсуждение. Затем нужно подобрать литературу и другой необходимый, в т.ч. рекомендованный, материал (через библиотеку, учебно-методический кабинет кафедры и др.). Но прежде всего, следует обратиться к своим конспектам лекций и соответствующему разделу учебника. Изучение всех источников должно идти под углом зрения поиска ответов на выносимые на практико-ориентированные занятия вопросы.

Завершающий этап подготовки к занятиям состоит в выполнении индивидуальных заданий.

В случае пропуска занятия студент обязан подготовить материал и отчитаться по нему перед преподавателем в обусловленное время. Может быть предложено отдельным бакалаврам, ввиду их слабой подготовки, более глубоко освоить материал и прийти на индивидуальное собеседование.

Студент не допускается к зачету, если у него есть задолженность по практическим занятиям.