

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «**Методы решения задач электроэнергетики и
электротехники**»

Направление подготовки 13.03.02 – Энергообеспечение
электротехника
Направленность (профиль) подготовки – Электропривод и автоматика
промышленных установок и технологических комплексов

Невинномысск, 2023

Содержание

Введение	3
Практическая работа № 1. Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме	4
Практическая работа № 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Показательная функция комплексного переменного	19
Практическая работа № 3. Символический метод расчета цепей синусоидального тока	31
Практическая работа № 4. Разложение периодической функции в ряд Фурье	33
Практическая работа № 5. Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока	41
Практическая работа № 6. Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений и систем	47
Практическая работа № 7. Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации	53
Практическая работа № 8. Численные методы решения дифференциальных уравнений	56
Список рекомендуемой литературы	60

Введение

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» изучается студентами направления подготовки 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника (профиль подготовки – «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов») на 1-м курсе, когда закладываются базовые знания. Так как, кроме освоения теоретического материала, требуется закрепление полученных знаний, поэтому в учебном процессе высших учебных заведений наряду с теоретическим обучением значительное место отводится выполнению практических работ. Правильное сочетание теоретических знаний с практическими работами обеспечивает высокое качество подготовки выпускников.

Основной целью дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» является формирование у студентов практических навыков по планированию, проведению, анализу и оптимизации результатов исследования сложных процессов профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

Задачами курса являются: изучение методов теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, применение математического аппарата численных методов при решении задач электроэнергетики и электротехники.

Практическое занятие №1

Определение, изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Комплексным числом Z называется выражение вида

$Z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x . Число x называется действительной частью комплексного числа Z и обозначается $x = \operatorname{Re}Z$, а y – мнимой частью Z и обозначается $y = \operatorname{Im} Z$. Запись числа Z в виде $Z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

2. Два комплексных числа $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными ($Z_1 = Z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $Z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняются равенства:

а) $x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i$;

б) $ix^2 + (3 - i)x - (1 - 2i)y = 2 + 2i$?

Решение: а) преобразуем левую часть выражения, а именно, выделим действительную и мнимую части комплексного числа:

$$2x - y - x \circ \circ i + 2y \circ \circ i = 4 - 5i$$

$$(2x - y) + (-x + 2y)i = 4 + (-5)i$$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} + \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \begin{cases} 3x = 3 \\ y = \frac{x - 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 \end{cases}$$

б) аналогично преобразуем левую часть:

$$3x - y + ix^2 - xi + 2yi = 2 + 2i,$$

$$(3x - y) + (x^2 - x + 2y)i = 2 + 2i, \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - x + 2y = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 - x + 2(3x - 2) = 2 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3x - 2, \\ x_1 = -6; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -20, y_2 = 1, \\ x_1 = -6, x_2 = 1. \end{cases}$$

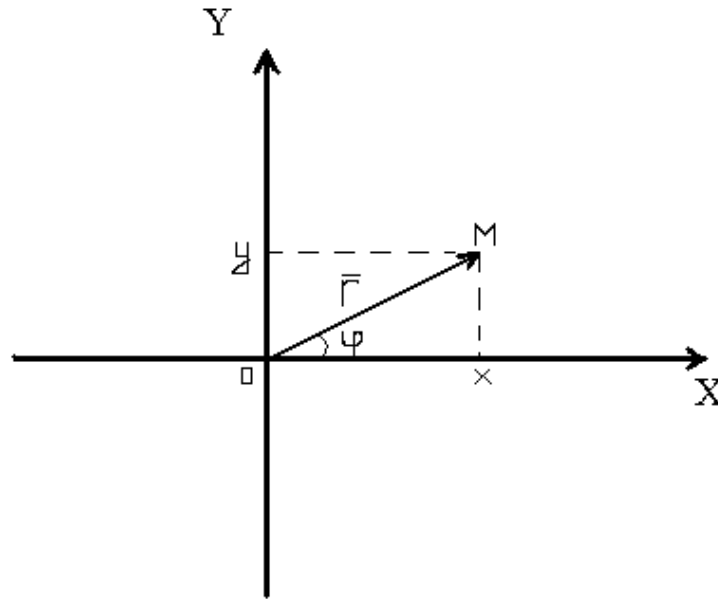
3. Два комплексных числа $Z = x + iy$ и $\bar{Z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Например: $1 + i$ и $1 - i$; $2i$ и $-2i$.

Комплексные числа, отличающиеся знаком действительной и мнимой частей, называются **противоположными**.

3. Всякое комплексное число $Z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re}Z$, $y = \operatorname{Im}Z$. Ось Ox называется действительной, ось Oy -мнимой. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как об-

раз комплексного числа $Z = x + iy$. Комплексное число Z можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$.



Пример 2. Изобразите геометрически следующие комплексные числа и им сопряженные: а) 3; б) $2i$; в) $-2-3i$; г) $1 + 2i$.

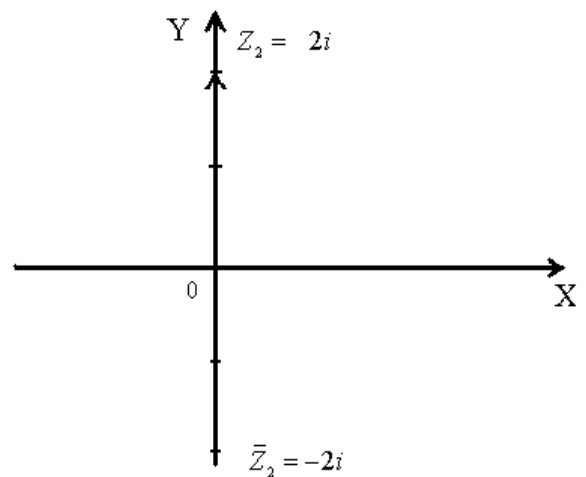
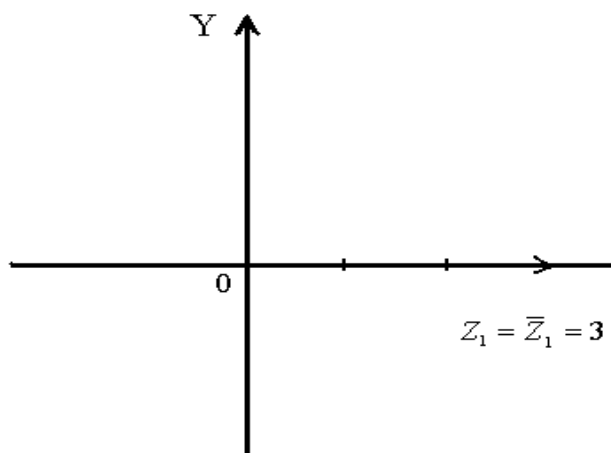
Решение:

а) $Z_1 = 3 = 3 + 0i$

$$\overline{Z}_1 = 3 - 0i = 3, \text{ т.е. } Z_1 = \overline{Z}_1.$$

б) $Z_2 = 2i = 0 + 2i$

$$\overline{Z}_2 = 0 - 2i = -2i.$$

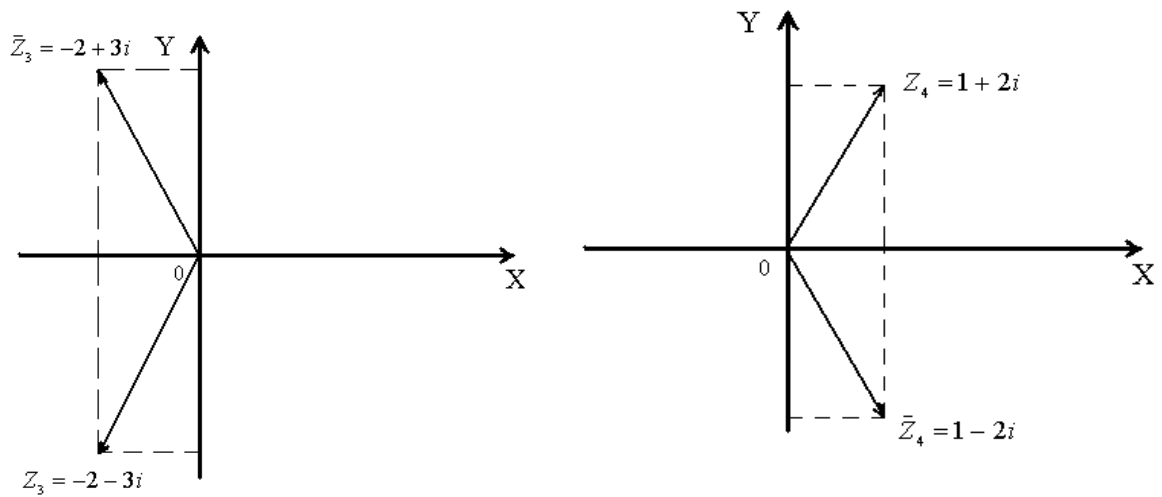


в) $Z_3 = -2 - 3i$

$$\overline{Z}_3 = -2 + 3i$$

г) $Z_4 = 1 + 2i$

$$\overline{Z}_4 = 1 - 2i$$



5. Длина вектора \vec{r} называется модулем комплексного числа и обозначается $|Z|$ или r : $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , изображающим комплексное число, называется аргументом этого комплексного числа, обозначается $\text{Arg } Z$ или φ . $\text{Arg } Z = \arg Z + 2\pi k$, k – любое целое число; $\arg Z$ – главное значение аргумента, $-\pi < \arg Z \leq \pi$. Аргумент φ определяется из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$.

Так как $-\pi < \arg Z \leq \pi$, то из формулы: $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} \text{arctg} \frac{y}{x} & \text{Для внутренних точек} \\ \text{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{I, IV четвертей} \\ \text{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{II четверти} \\ & \text{Для внутренних точек} \\ & \text{III четверти} \end{cases}$$

Если точка Z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg Z$ можно найти непосредственно.

Пример 3. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: а) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; б) $-3i$.

Решение:

$$\text{а) } Z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad |Z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4} \text{ - главное значение}$$

аргумента, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{4} < \pi$.

$$\text{б) } Z_2 = -3i = 0 - 3i$$

$$|Z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Из изображения числа Z_2 следует, что $\arg Z_2 = -\frac{\pi}{2}$ - главное зна-

чение, т.к. $-\pi < -\frac{\pi}{2} < \pi$.

6. Суммой двух комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и

$Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z = Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Свойства сложения комплексных чисел:

$$\text{а) } Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$$

$$\text{б) } (Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3).$$

7. Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Если $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$Z = Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

8. Произведением комплексных чисел $Z_1 = x_1 + iy_1$ и $Z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равен-

ством: $Z = Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Заметим, что $Z \cdot \bar{Z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$ - действительное число.

Свойства умножения комплексных чисел:

- a) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$.
- b) $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1(Z_2 \cdot Z_3)$
- c) $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot Z_3$.

Например:

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

9. Деление определяется как действие, обратное умножению. Если

$$Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2, \text{ то } Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 4. Выполните деление $\frac{1 + 3i}{2 + i}$.

$$\text{Решение: } \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 6i + 3}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i.$$

Пример 5. Выполните указанные действия:

a) $(2 - 3i) - (i - 2)$;

б) $(2 - i)(i + 1) - (1,5i + 1)4i$;

в) $\frac{1}{1 + 2i} + \frac{i}{2 - i}$;

г) $\frac{2}{1 + i} - \frac{1 - i}{1 + 2i}(2 - i)$;

д) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$.

Решение:

$$a) (2 - 3i) - (i - 2) = 2 - 3i - i + 2 = 4 - 4i;$$

$$б) (2 - i) \cdot (i + 1) - (1,5i + 1) \cdot 4i = 2i - i^2 + 2 - i - 6i^2 - 4i = \\ = 2i + 1 + 2 - i + 6 - 4i = 9 - 3i;$$

$$в) \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i} = \frac{2-i+i(1+2i)}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i+2i^2}{(1+2i)(2-i)} = \frac{2-i+i-2}{(1+2i)(2-i)} = \\ = \frac{0}{(1+2i)(2-i)} = 0;$$

$$г) \frac{2}{1+i} - \frac{1-i}{1+2i} \cdot (2-i) = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i+i^2}{1+2i} = \frac{2}{1+i} - \frac{2-2i-i-1}{1+2i} = \\ = \frac{2}{1+i} - \frac{1-3i}{1+2i} = \frac{2(1+2i) - (1-3i)(1+i)}{(1+i)(1+2i)} = \frac{2+4i - (1-3i+i-3i^2)}{1+i+2i+2i^2} = \\ = \frac{2+4i-1+3i-i-3}{1+i+2i-2} = \frac{-2+6i}{-1+3i} = \frac{2(-1+3i)}{(-1+3i)} = 2;$$

$$д) (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} + (i\sqrt{2})^2 = 2 + 2 \cdot 2i + i^2 \cdot 2 = 2 + 4i - 2 = 4i$$

Пример 6. Определите полное сопротивление цепи $Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$,

если известно $Z_1 = (6 + 8i) \text{ Ом}$; $Z_2 = 8i \text{ Ом}$.

Решение:

$$Z = \frac{(6 + 8i) \cdot 8i}{6 + 8i + 8i} = \frac{48i + 64i^2}{6 + 16i} = \frac{-64 + 48i}{6 + 16i} = \frac{-32 + 24i}{3 + 8i} = \\ = \frac{(-32 + 24i)(3 - 8i)}{(3 + 8i)(3 - 8i)} = \frac{-96 + 72i + 256i - 192i^2}{9 + 64} = \\ = \frac{-96 + 328i + 192}{73} = \frac{96 + 328i}{73} \approx (1,32 + 4,5i) \text{ Ом} .$$

Пример 7. Постройте на плоскости комплексного переменного линии, заданные уравнениями:

$$a) |Z - 2i| = 3;$$

$$б) \text{Re}(Z^2) = 1;$$

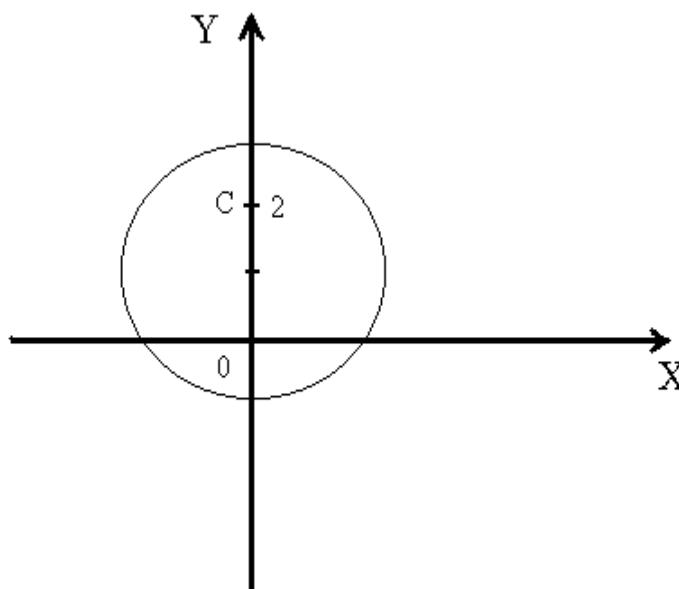
$$в) \arg Z = \frac{\pi}{4};$$

$$г) 2 \operatorname{Re} Z - (\operatorname{Im} Z)^2 = 1.$$

Решение: а) $|Z - 2i| = 3$.

Т.к. $Z = x + iy$, то $Z - 2i = x + iy - 2i = x + i(y - 2)$.

Найдем $|Z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$. По условию $|Z - 2i| = 3$, т.е. $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3$, $x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Это уравнение задает окружность с центром в т. С (0;2), радиуса 3.



$$б) \operatorname{Re}(Z^2) = 1.$$

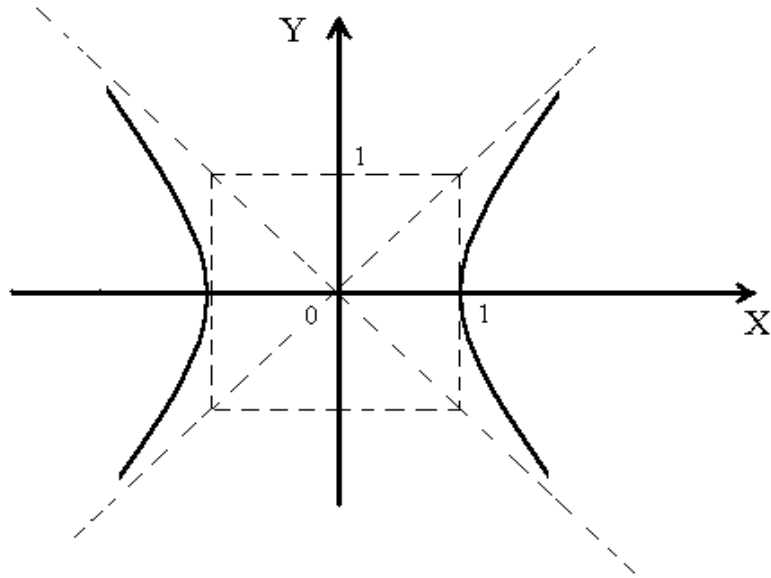
Т.к. $Z = x + iy$, то

$$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

$$\operatorname{Re}(Z^2) = x^2 - y^2.$$

По условию $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение равнобочной гиперболы.

Вершина находится в начале координат, полуоси: $a = b = 1$.

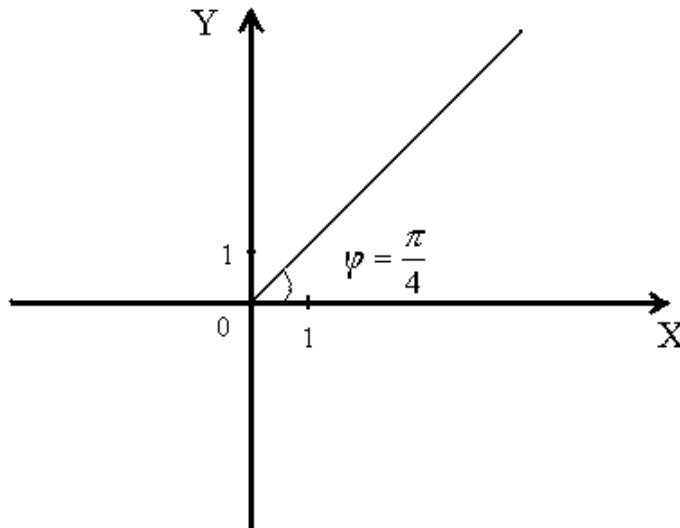


в) $\arg Z = \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = \arctg \frac{y}{x}$, то $\arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}$; $\frac{y}{x} = 1, y = x$. Это уравнение прямой (биссектриса I и III координатных четвертей).

Рассматриваем точки прямой $y = x$ лежащие только в I четверти.

г)



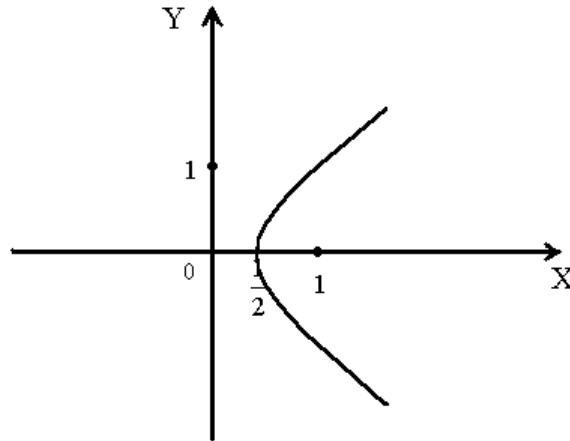
ваем $y = x$, в I чет-

$$2\operatorname{Re}Z - (\operatorname{Im}Z)^2 = 1.$$

Т.к. $Z = x + iy$, то $\operatorname{Re}Z = x$, $\operatorname{Im}Z = y$, тогда

$$2x - y^2 = 1, \quad 2x = y^2 + 1, \quad x = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

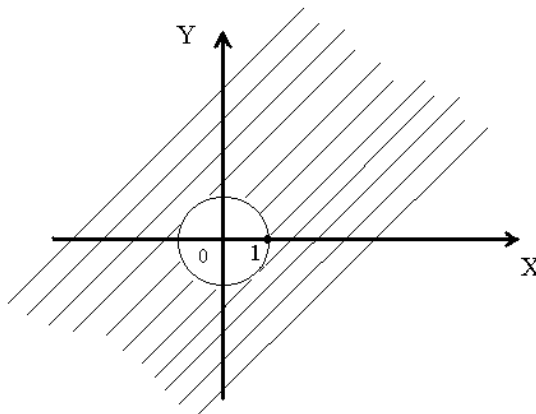
Это уравнение параболы, вершина в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, ось OX – ось симметрии.



Пример 8. Изобразите области, заданные условиями: а) $|Z| \geq 1$; б)

$|Z + 2 - i| < 3$; в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$; г) $1 \leq |z - 1 + i|^2 \leq 4$; д) $\begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2, \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ Решение:

а) $|Z| \geq 1$. Т.к. $Z = x + iy$, $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то



$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1.$$

б) $|Z + 2 - i| < 3$;

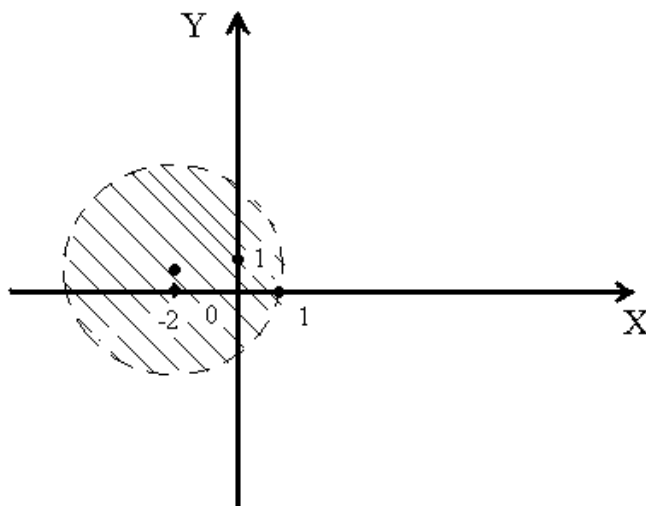
Т.к. $Z = x + iy$, то $Z + 2 - i = x + iy + 2 - i = (x + 2) + (y - 1)i$

Найдем $|Z + 2 - i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$.

По условию $|Z + 2 - i| < 3$, т.е.

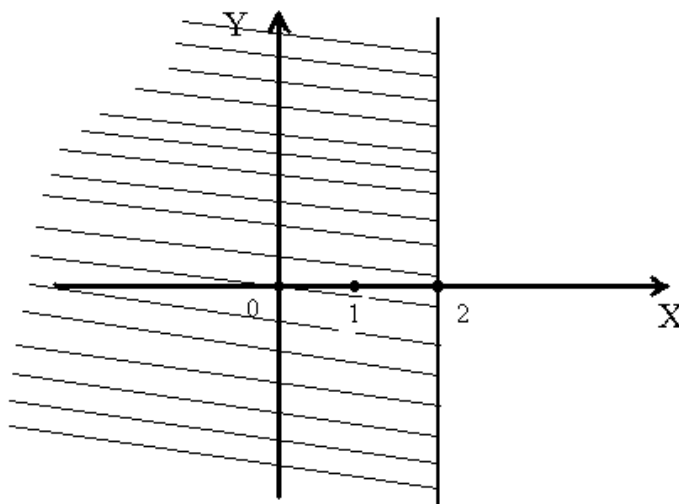
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} < 3$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 < 9.$$



в) $\operatorname{Re} Z \leq 2$.

Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Re} Z = x$, то $x \leq 2$.

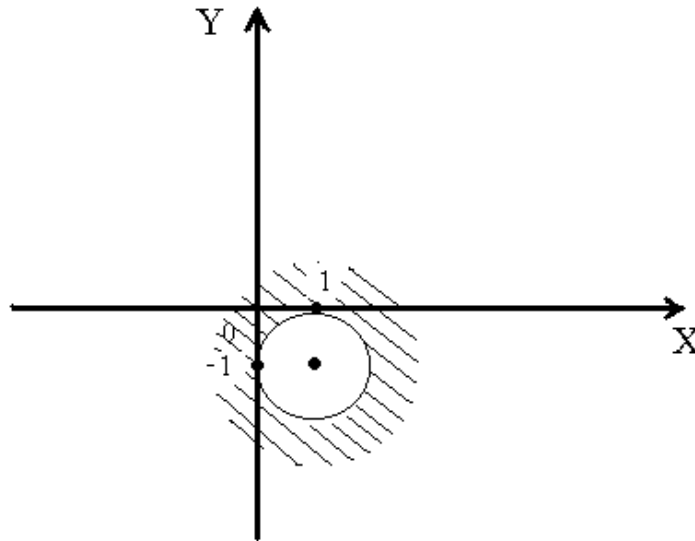


г) $1 \leq |Z - 1 + i|^2 \leq 4$.

Т.к. $Z = x + iy$, $Z - 1 + i = x + iy - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)i$,

$$|Z - 1 + i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}, |Z - 1 + i|^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2, \quad \text{TO}$$

$$1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4.$$



$$\text{д) } \begin{cases} \operatorname{Im} Z \leq 2 \\ 0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

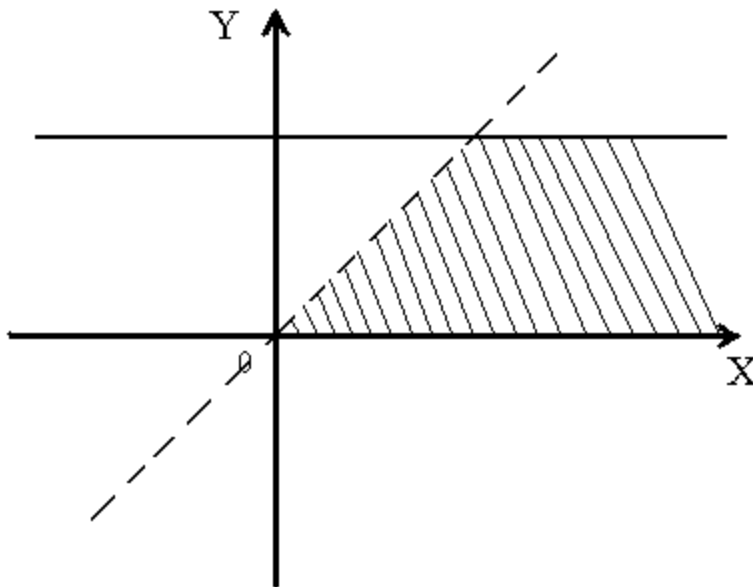
$$\operatorname{Im} Z \leq 2.$$

Т.к. $Z = x + iy$, $\operatorname{Im} Z = y$, то $y \leq 2$, $0 \leq \arg Z < \frac{\pi}{4}$.

Т.к. $\arg Z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, то $0 \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} 0 \leq \frac{y}{x} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$

$$0 \leq \frac{y}{x} < 1; \quad 0 \leq y < x.$$

$$\text{Т.о., } \begin{cases} y \leq 2 \\ 0 \leq y < x \end{cases}$$



Решите задачи

1.1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; $-i$; -2 ; $3 - 2i$; $1 + 2i$; $-1 - i$.

1.2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2 , если:

1) $Z_1 = 4 + 5i$; $Z_2 = 3 - 2i$.

2) $Z_1 = 0,5 - 3,2i$; $Z_2 = 1,5 - 0,8i$.

3) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$; $Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2 ,

если:

1) $Z_1 = 3 + 4i$; $Z_2 = 0,4 - 0,2i$.

2) $Z_1 = 1 - 2i$; $Z_2 = 0,6$.

3) $Z_1 = \sqrt{5} - i$; $Z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

1.3. Найдите мнимую часть Z , если:

$$1) \quad Z = (2 - i)^3 \cdot (2 + 11i).$$

$$2) \quad Z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$$

$$3) \quad Z = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} - \frac{3 - 4i}{4 + 3i} - \frac{1}{i}.$$

1.4. Выполните действия:

$$1) \quad i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$$

$$2) \quad 2i \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

$$3) \quad \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$$

$$4) \quad \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}.$$

$$5) \quad \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

$$6) \quad (7+i) \cdot (2-i) - (3+5i) \cdot (-i).$$

$$7) \quad i(3-i) - (2+3i) \cdot (1-i).$$

$$8) \quad \frac{3}{i} + \frac{5-i}{2} - \frac{10+i}{1+i}.$$

1.6. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа:

$$а) \quad Z_1 = 2i(x + 2yi) + 3x \quad \text{и} \quad Z_2 = 1 - 2i;$$

$$б) \quad Z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \text{и} \quad Z_2 = -12 + 20i + x^2i$$

равны.

1.7. Найдите модуль комплексного числа Z :

$$1) \quad Z = -4;$$

$$2) \quad Z = -i;$$

$$3) Z = -5 - 2\sqrt{6}i;$$

$$4) Z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$

$$5) Z = \frac{2-i}{1+i}.$$

1.8. В плоскости комплексного переменного начертите линии, заданные уравнениями:

$$1) |Z + 1| = 1;$$

$$5) |2i - Z|^2 = 1;$$

$$2) |Z - 2| + |Z + 2| = 26;$$

$$6) \operatorname{Im} Z^2 = 4;$$

$$3) |Z - 2|^2 + |Z + 2|^2 = 26;$$

$$7) \arg Z = \frac{3\pi}{4};$$

$$4) |Z|^2 + 3Z + 3\bar{Z} = 0;$$

$$8) (\operatorname{Im} Z)^2 = 4 - \operatorname{Re} Z.$$

1.9. Изобразите области, заданные условиями:

$$1) |Z + 2i - 1| \leq 2;$$

$$5) |Z + i| \leq 1;$$

$$2) |Z - i| < |Z + i|;$$

$$6) \frac{\pi}{6} < \arg Z < \frac{\pi}{4};$$

$$3) \lg |Z - 10i| < 2;$$

$$7) -\frac{\pi}{4} \leq \arg Z \leq \frac{\pi}{2};$$

$$4) 1 \leq \operatorname{Re} Z \leq 4;$$

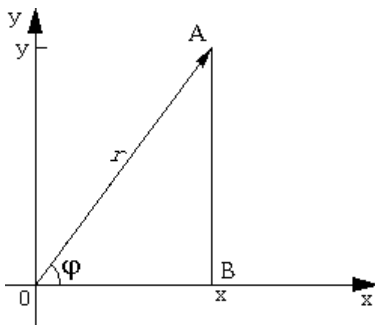
$$8) \begin{cases} 1 < \operatorname{Re} Z < 2 \\ -\frac{\pi}{4} < \arg Z < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Практическое занятие № 2

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Показательная функция комплексного переменного

1. Рассмотрим комплексное число Z в алгебраической форме:



$z = x + iy$. Изобразим это число на комплексной плоскости в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$. Рассмотрим $\triangle AOB$, где $B(x, 0)$.

Пусть r - модуль комплексного числа z ; φ - один из его аргументов (любой). Тогда из $\triangle AOB$ следует, что $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$. Откуда число z запишется в виде: $z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$. Представление числа z в виде: $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ называется **тригонометрической формой** комплексного числа z .

Пример 1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -3 + 4i$.

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, а

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{-1} - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{то}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

Так как $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, а $\varphi_2 = \pi$ (по изображению числа на плоскости), то $z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$. Учитывая, что $|z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, а $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ - один из аргументов z_3 , получаем $|z_3| = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

В связи с тем что $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, а

$$\varphi_4 = \arctg \frac{y}{x} + \pi = \arctg \frac{4}{-3} + \pi \approx 2,21424 \text{ рад} \approx 126^\circ 52',$$

$$\text{получаем } z_4 = 5(\cos(\pi - \arctg \frac{4}{3}) + i \sin(\pi - \arctg \frac{4}{3}))$$

$$\text{или } z_4 = 5(\cos 126^\circ 52' + i \sin 126^\circ 52').$$

Пример 2. Записать числа в тригонометрической форме

$$z_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{4} - 2i \sin \frac{\pi}{4}, z_2 = -\cos \frac{\pi}{17} - i \sin \frac{\pi}{17}$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4})$, а

$-\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$, тогда получим тригонометрическую форму для

$$z_1: z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}). \quad \text{Аналогично учитывая, что}$$

$$-\cos \frac{\pi}{17} = \cos(\pi - \frac{\pi}{17}) = \cos \frac{16\pi}{17}, \sin \frac{\pi}{17} = \sin(\pi - \frac{\pi}{17}) = \sin \frac{16\pi}{17},$$

$$\text{получаем } z_2 = \cos \frac{16\pi}{17} - i \sin \frac{16\pi}{17}.$$

2. Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$,

то-

$$\text{гда } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пример 3. Найти произведение чисел

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \text{ и } z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Решение. Так как $|z_1| = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{8}$, то $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{16} = 4$.

Аргументом произведения $z_1 \cdot z_2$ будет сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}.$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 4\cos\left(\frac{25\pi}{8} + i\sin\frac{25\pi}{8}\right)$ или

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cos\left(\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное

$$\text{число } z = \frac{(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

Решение. Число $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, и аргумент

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$; число $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль $\sqrt{2}$ и аргу-

мент $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

а аргумент $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11\pi}{12}$.

Следовательно, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

3. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, тогда $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ (**формула Муавра**), где $n \in \mathbb{N}$.

Пример 5. Вычислить. $(\sqrt{3} - i)^9$.

Решение. Пусть $z = \sqrt{3} - i$, тогда $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, откуда по формуле Муавра имеем

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9 (\cos 9(-\frac{\pi}{6}) + i \sin 9(-\frac{\pi}{6})) = 512 (\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}) = 512i.$$

4. Корнем n-ой степени из комплексного числа Z называется такое комплексное число W (обозначается $\sqrt[n]{Z}$), если $W^n = Z$.

Все значения корня n-ой степени из $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ содержатся в формуле $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + \pi k}{n} \right)$ (1), где

$k=0,1,2,\dots,n-1$.

Пример 6. Найти все значения:

а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt{\sqrt{3} - i}$.

Решение: а) запишем число $Z=-16$ в тригонометрической форме $Z = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Согласно формуле (1) получаем

$$W_k = 2 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} k \right) \right), \text{ где } k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$W_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$W_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$W_3 = 2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

б) Модуль числа i равен единице, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$W_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \text{ где } k=0,1,2.$$

Получаем

$$W_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$W_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i.$$

в) Пусть $Z = \sqrt{3} - i$, тогда $|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

По формуле (1) имеем

$$W_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{2} \right) \right), \text{ где } k=0,1.$$

$$W_0 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i,$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi}{2} \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} + \pi \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} i.
\end{aligned}$$

Пример 7. Записать число $\frac{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$ в алгебраической

форме при условии, что действительные части корней $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа $5+12i$ положили $\sqrt{5+12i} = x + iy$, тогда $5+12i = x^2 + 2xyi - y^2$ и, следовательно, x и y удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Решив эту систему, получим два решения $(3;2)$ и $(-3;-2)$. По условию действительная часть отрицательна, поэтому $\sqrt{5+12i} = -3 - 2i$. Аналогично найдем $\sqrt{5-12i} = -3 + 2i$. Таким образом, $Z = \frac{-3 - 2i - (-3 + 2i)}{-3 - 2i + (-3 + 2i)} = \frac{2}{3}i$.

5. Пусть $z = x + iy$. Если x и y действительные переменные, то z называется **комплексной переменной**.

Если каждому значению комплексной переменной z из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины w , то w есть функция комплексной

переменной z . Функции комплексного аргумента обозначают $w=f(z)$ или $w=w(z)$

В качестве примера рассмотрим одну функцию комплексной переменной - показательную функцию $w = e^z$, или $w = e^{x+iy}$.

Комплексные значения функции w определяются так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (2)$$

Свойства показательной функции:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$2. e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

$$3. (e^z)^m = e^{mz} \text{ где } m - \text{ целое число}$$

$$4. e^{z+2\pi i} = e^z$$

Если в формуле (2) положим $x=0$, то получим $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Это есть **формула Эйлера**. С ее помощью можно от тригонометрической записи комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ перейти к показательной форме $z = r e^{i\varphi}$ где r - модуль числа z , а φ - его аргумент.

$$\text{а) Если } z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \text{ и } z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$\text{то } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (4)$$

$$\text{б) Если } z = r e^{i\varphi}, \text{ то } z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \text{ где } k=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1.$$

Пример 8. Представить в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

Решение. Находим модуль числа $|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ и один из его

$$\text{аргументов } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ откуда, } z = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Пример 9. Записать в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12})}{1 - i}.$$

Решение: каждое из чисел $-\sqrt{3} + i$, $\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$, $i - 1$ представим

в показательной форме

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = e^{-\frac{\pi}{12}i}.$$

Используя формулы (3), (4) получаем

$$z = \frac{2e^{\frac{5\pi}{6}i} e^{-\frac{\pi}{12}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Пример 10. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ в показательной форме.

$$\text{Решение: } \sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi(12K+1)i}{24}} \quad (K=0,1,2,3).$$

Решите задачи

2.1. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z = -\sqrt{3} + i$,

2) $Z = -1$,

3) $Z = -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$,

4) $Z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \frac{10\pi}{9}$,

5) $Z = \operatorname{tg} 1 - i$.

2.2. Записать комплексное число

в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z = \frac{i \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$,

2) $Z = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}}$,

3) $Z = \frac{1}{(1+i)^2}$,

4) $Z = \frac{-\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{13\pi}{12} - i \sin \frac{13\pi}{12}}$,

5) $Z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{i}$.

2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z :

$$1) Z = \frac{5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)},$$

$$2) Z = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} + i \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right)}{i - 1}.$$

2.4. Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

$$1) Z = \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12},$$

$$2) Z = (\cos 31^\circ + i \sin 31^\circ)^{-10},$$

$$3) Z = -\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6},$$

$$4) Z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

2.5. Записать комплексное число Z в тригонометрической форме:

$$1) Z = (\sqrt{3} - i)^{100},$$

$$2) Z = \left(\frac{\sqrt{3}i + 1}{i - 1}\right)^6,$$

$$3) Z = \frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n \in N,$$

$$4) Z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4,$$

$$5) Z = \left(\sin \frac{6\pi}{5} + i \left(1 + \cos \frac{6\pi}{5}\right)\right)^5.$$

2.6. Найти значения $\sqrt[n]{Z}$ если:

$$1) Z = -1, n = 3,$$

2) $Z = 8i, n = 3,$

3) $Z = 1, n = 5,$

4) $Z = 1 + i, n = 8.$

2.7 . Решить уравнения:

1) $Z^3 = 1 + i,$

2) $Z^4 + 1 = 0,$

3) $Z^5 = 1 + \sqrt{3}i,$

4) $Z^6 + 64 = 0,$

5) $Z^2 = \bar{Z}^3.$

2.8 . Представить Z в алгебраической форме:

1) $Z = e^{2-i},$

2) $Z = e^{-\frac{3}{2}\pi i + 12\pi i},$

3) $Z = e^{3i + 7 + 3\pi i - \frac{\pi i}{2}}.$

2.9 . Представить в показательной форме комплексное числа:

1) $Z = -\sqrt{12} - 2i,$

2) $Z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$

2.10 . Записать в показательной и алгебраической формах комплексное число:

1) $Z = 5e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2e^{\frac{\pi i}{6}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right),$

2) $Z = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{12}} \right)^{-3},$

3) $Z = (\sqrt{3} - i)^6,$

$$4) Z = \frac{1}{(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^5},$$

$$5) Z = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3}} (1 + \sqrt{3}i)^7}{i}.$$

2.11. Записать в показательной форме все значения $\sqrt[n]{Z}$:

1) $Z = 1, n = 3,$

2) $Z = -1, n = 5,$

3) $Z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3,$

4) $Z = -1 - \sqrt{3}i, n = 4.$

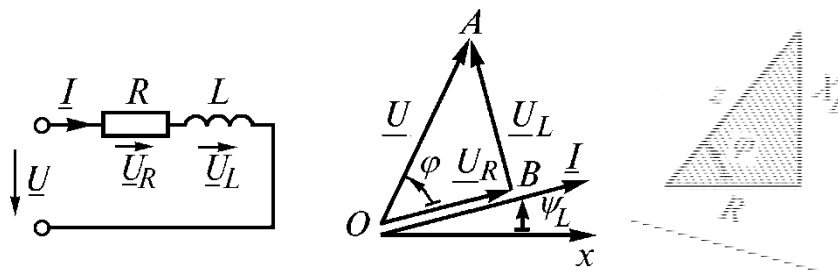
Практическое занятие №3

Символический метод расчета цепей электрических цепей синусоидального тока

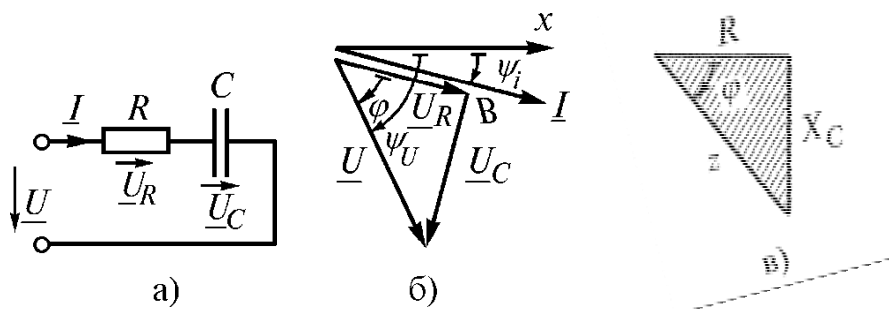
Цель занятия: объяснение символического метода расчета электрических цепей синусоидального тока; рассмотрение электрических цепей с сосредоточенными элементами (R, L, C) и представление расчета таких цепей.

Методика проведения занятия: Необходимы теоретические сведения

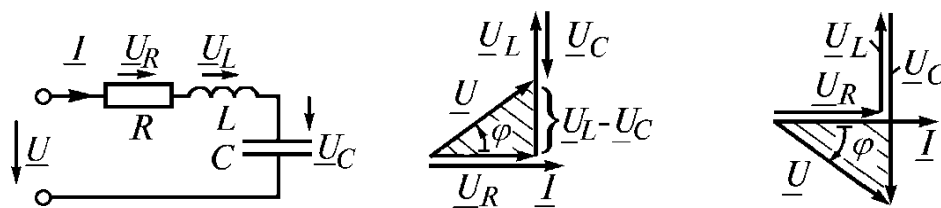
1. Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку:



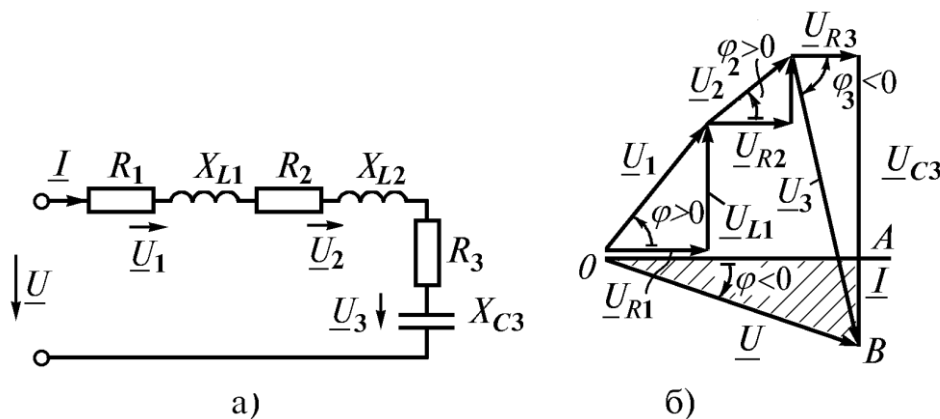
2. Цепь, содержащая резистор и конденсатор:



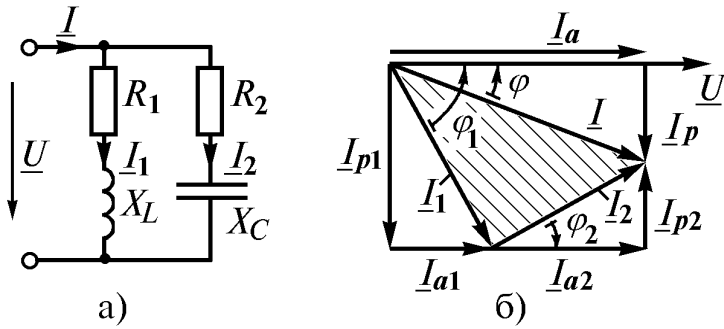
3. Цепь, содержащая последовательное соединение резистора, катушки и



конденсатора:

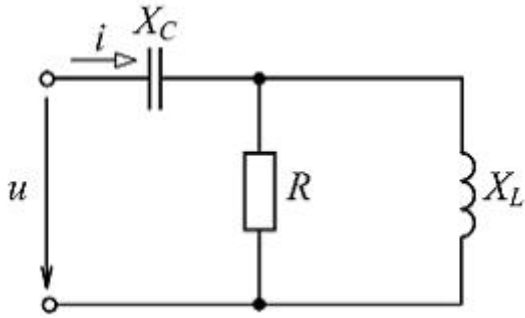


4. Цепь, содержащая параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора:



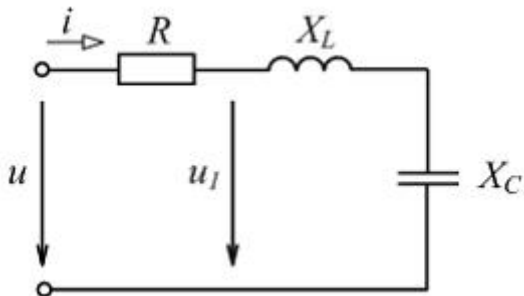
Примеры решения задач:

1. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $R = X_L = X_C = 20 \text{ Ом}$ комплексное входное сопротивление цепи (см. рис.) $Z_{вх}$ равно $\underline{\hspace{2cm}}$ Ом, напряжение u $\underline{\hspace{2cm}}$ по фазе от тока i на угол ...

2. Тема: Сопротивления и фазовые соотношения между токами и напряжениями



При $u = 282,8 \sin \omega t \text{ В}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $X_L = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 2 \text{ Ом}$ действующее значение напряжения U_1 в цепи, показанной на рисунке, равно $\underline{\hspace{2cm}}$ В. Построить векторную диаграмму.

Практическое занятие №4
Разложение аналитической функции в ряд Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , т.е. $S(x+2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

- 1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;
- 2) $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0)] + f(x_0 + 0)$, где x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;
- 3) $S(x) = \frac{1}{2} [f(\pi - 0)] + f(\pi + 0)$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ – четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (6)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π . В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ , для которой выполняются на сегменте $[-\ell, \ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right), \quad (8)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (10)$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (11)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (12)$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx, \quad (13)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx. \quad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле,

определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

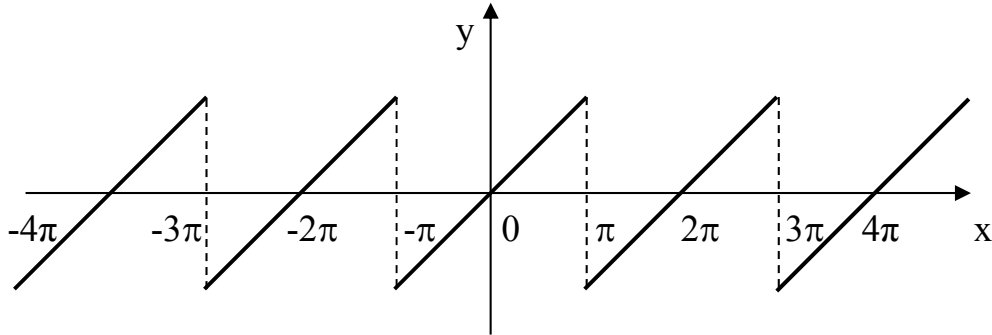


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты

Фурье $\left(\begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ \left. \begin{array}{l} x = u, \quad \sin nx \, dx = dv \\ dx = du, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} \end{array} \right):$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{\pi} \cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

$\stackrel{=0}{\text{т.к.}}$

т.к. $-\int_{-\pi}^\pi \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^\pi = 0.$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \dots \right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-\pi$ и π сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

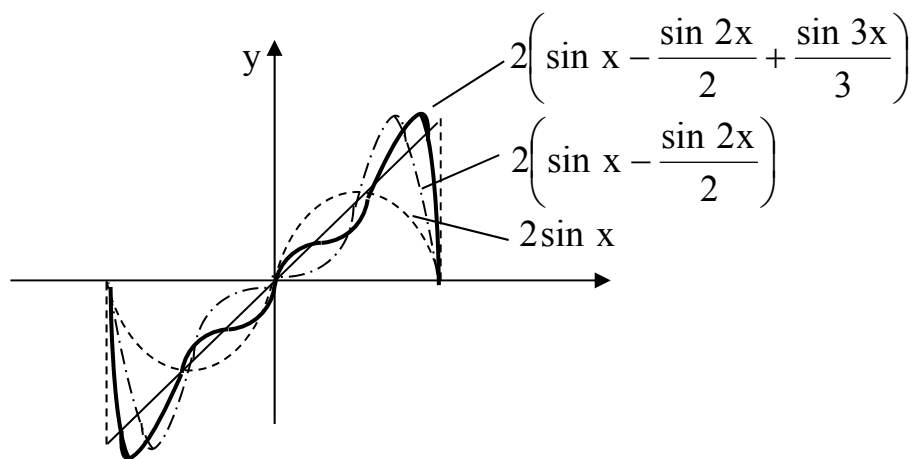


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0; \quad a < x \leq \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = a \end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

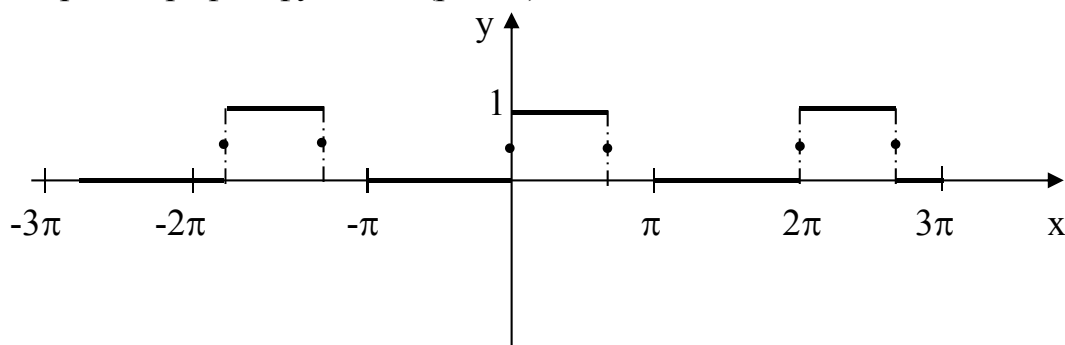


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a dx = \frac{x}{\pi} \Big|_0^a = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_0^a = \frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^a f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\cos nx \right) \Big|_0^a = \frac{\cos nx}{\pi n} \Big|_0^a = \frac{1 - \cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n\pi} \cdot \cos nx + \frac{1 - \cos na}{n\pi} \cdot \sin na.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале

$$(0; 4) \text{ формулой } f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

Построим график функции (рис. 4).

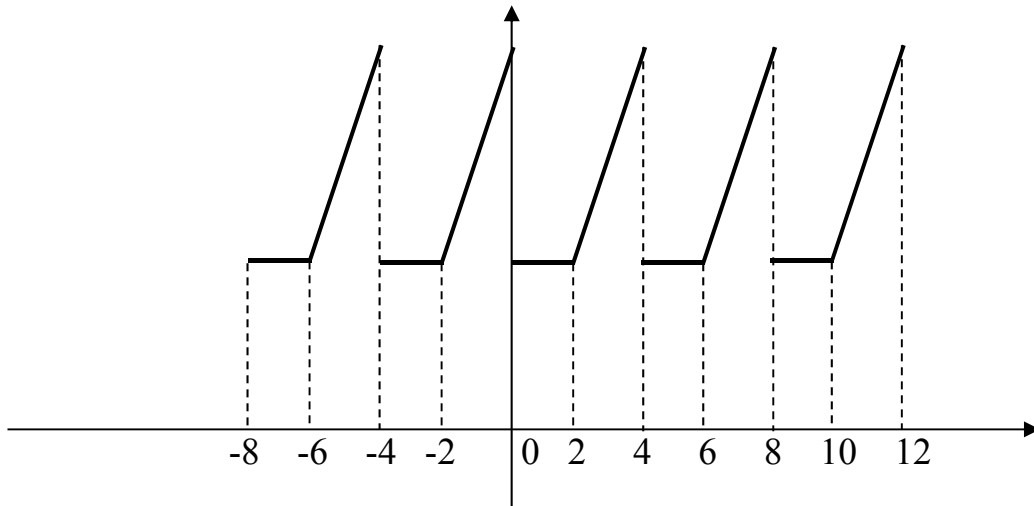


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx + \int_2^4 3x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{2\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{6}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi), \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

При n – четном $\cos n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos n\pi = -1$ и $a_n = \frac{12}{n^2 \pi^2}$.

При $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 dx + \int_2^4 3x dx \right) = \frac{1}{2} \left(6x \Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2} \Big|_2^4 \right) = 15,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 6 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{12}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \cdot 12 \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_2^0 + \frac{3}{2} \left[\frac{2x}{\pi n} \left(-\cos \frac{\pi n x}{2} \right) \Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12(1 - \cos n\pi) - 3(2 \cdot 4 \cos 2\pi n - 4 \cos \pi n)] =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [12 - 12 \cos n\pi + 24 + 12 \cos n\pi] = \frac{-12}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0, 2)$ сумма ряда $S(x) = 6$, в интервале $(2, 4)$ - $S(x) = 3x$. В точке разрыва $x = 2$,

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(2-0) + f(2+0)] = 6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x) = |x|$ (рис. 5).

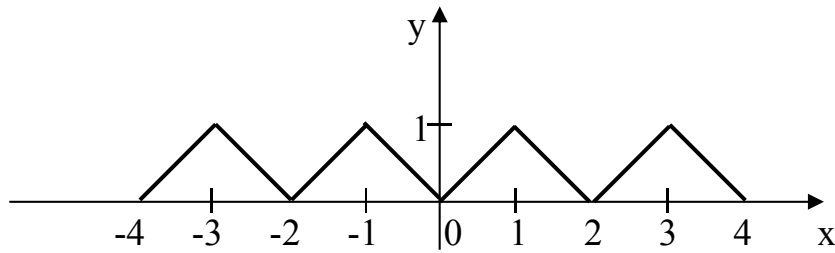


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = 2 \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные,} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 3x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \left(\frac{\cos x}{12} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) +$
 $+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $y = |\sin x|$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \dots \right].$$

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x).$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 3, \end{cases} \quad f(x+6) = f(x).$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{3} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$, $f(x+10) = f(x)$.

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}.$$

Практическое занятие №5

Использование комплексных чисел и рядов Фурье к расчету электрических цепей несинусоидального тока

Цель: закрепить навыки использования комплексных чисел и рядов Фурье для анализа электрических цепей.

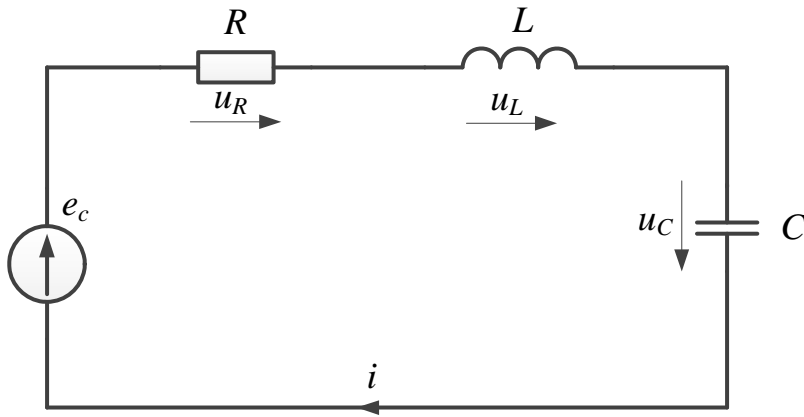
Задание: используя разложение в ряд Фурье сигналов (треугольного и однополупериодного выпрямления), рассчитать электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения источника несинусоидального напряжения, резистивного, емкостного и индуктивного элемента. При разложении в ряд Фурье ограничиться 7 первыми гармониками, построить временные зависимости тока, протекающего в электрической цепи, напряжений на резистивного, емкостного и индуктивного элементах.

Указания: параметры элементов $L = 100$ мГн; $C = 100$ мкФ; $R = 30$ Ом.

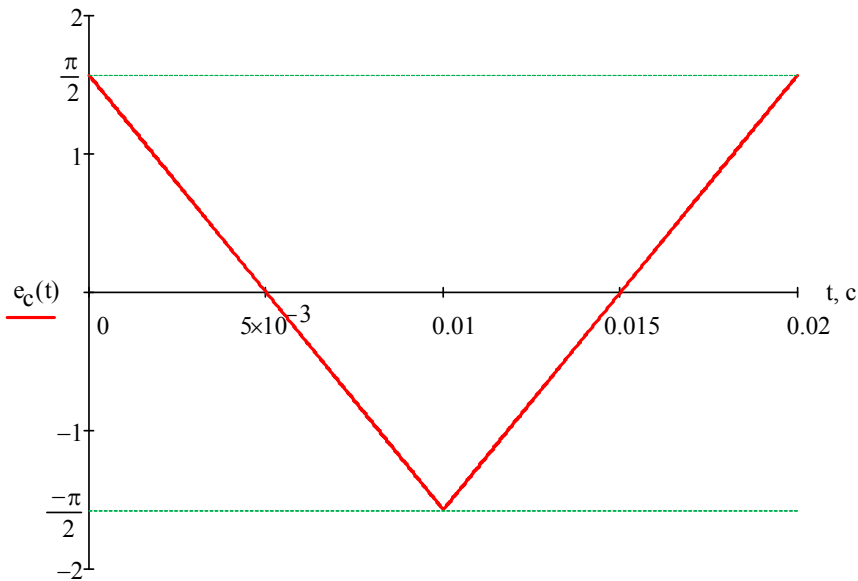
Частота основной (первой) гармоники 50 Гц.

Для расчета необходимо перейти от мгновенного значения каждой гармоники к комплексу ее действующего значения, рассчитать комплексное сопротивление элементов, произвести расчет для данной гармоники, произвести переход от комплекса действующего значения к мгновенному.

Схема цепи



Форма действующего напряжения



Частота действующего напряжения

$$f = 50 \text{ Гц} \quad \omega = 2\pi f = 314.159 \cdot \text{рад/с}$$

Разложение в ряд Фурье (пример 5 из ПЗ № 6 с заменой $\cos\varphi$ на $\sin(\varphi + \pi/2)$)

$$e_c(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin\left[(2k+1) \cdot \omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)^2}$$

Мгновенные значения первых гармоник

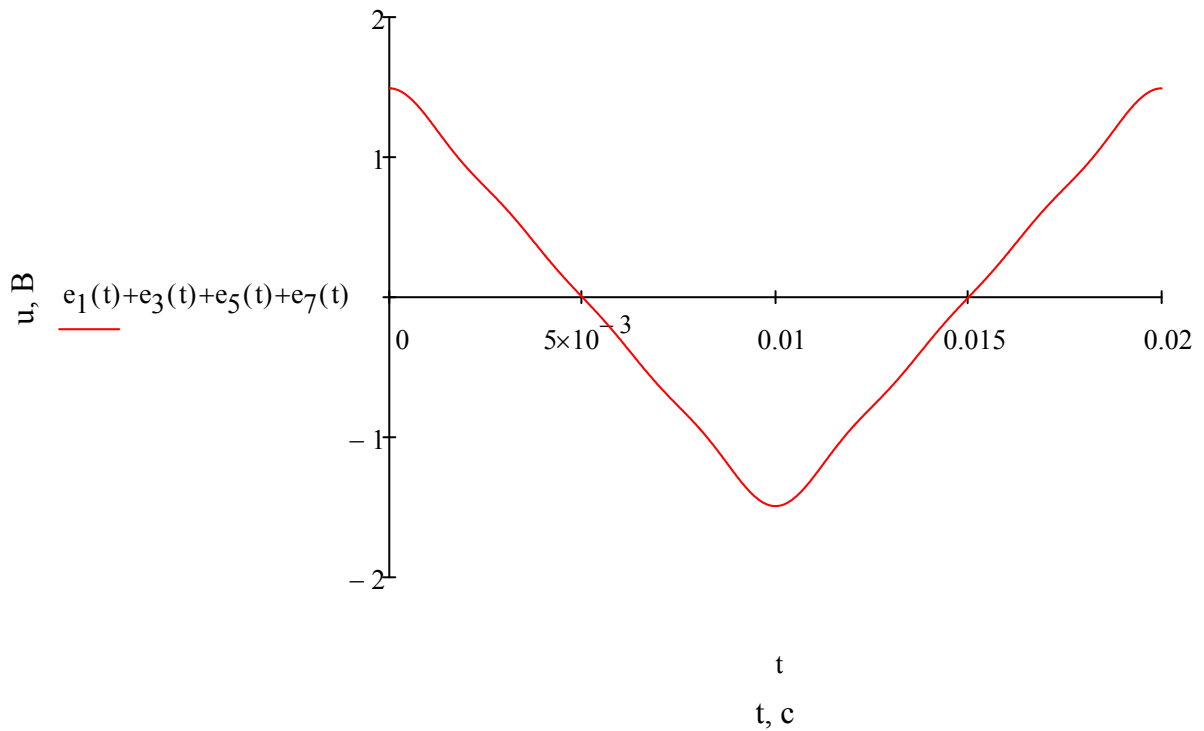
$$e_1(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_3(t) = \frac{4}{9\pi} \cdot \sin\left(300\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_5(t) = \frac{4}{25\pi} \cdot \sin\left(500\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

$$e_7(t) = \frac{4}{49\pi} \cdot \sin\left(700\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}$$

Исходный сигнал



Комплексы действующих значений первых гармоник

$$\underline{E}_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.9j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_3 = \frac{4}{9 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.1j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_5 = \frac{4}{25 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.036j \cdot \text{В}$$

$$\underline{E}_7 = \frac{4}{49 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 0.018j \cdot \text{В}$$

Параметры элементов

$$C = 100 \cdot 10^{-6} \text{Ф} \quad L = 100 \cdot 10^{-3} \text{Гн} \quad R = 30 \text{Ом}$$

Сопротивления для гармоник, нулевая (постоянная составляющая) отсутствует

$$\underline{X}_{C1} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -31.831j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L1} = j \cdot \omega \cdot L = 31.416j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_1 = R + \underline{X}_{C1} + \underline{X}_{L1} = (30 - 0.415j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C3} = \frac{\underline{X}_{C1}}{3} = -10.61j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L3} = \underline{X}_{L1} \cdot 3 = 94.248j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = R + \underline{X}_{C3} + \underline{X}_{L3} = (30 + 83.637j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C5} = \frac{\underline{X}_{C1}}{5} = -6.366j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L5} = \underline{X}_{L1} \cdot 5 = 157.08j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_5 = R + \underline{X}_{C5} + \underline{X}_{L5} = (30 + 150.713j) \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{C7} = \frac{\underline{X}_{C1}}{7} = -4.547j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{X}_{L7} = \underline{X}_{L1} \cdot 7 = 219.911j \cdot \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_7 = R + \underline{X}_{C7} + \underline{X}_{L7} = (30 + 215.364j) \cdot \text{Ом}$$

Расчет для первой гармоники

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = (-4.151 \times 10^{-4} + 0.03j) \cdot \text{А}$$

$$|\underline{I}_1| = 0.03 \cdot \text{А} \quad \psi_1 = \arg(\underline{I}_1) = 1.585 = 90.814^\circ$$

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I}_1 \cdot R = (-0.012 + 0.9j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{R1}| = 0.9 \cdot \text{В} \quad \psi_{R1} = \arg(\underline{U}_{R1}) = 1.585 = 90.814^\circ$$

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_{L1} = (-0.943 - 0.013j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{L1}| = 0.943 \cdot \text{В} \quad \psi_{L1} = \arg(\underline{U}_{L1}) = -3.128 = -179.221^\circ$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_{C1} = (0.955 + 0.013j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{C1}| = 0.955 \cdot \text{В} \quad \psi_{C1} = \arg(\underline{U}_{C1}) = 0.01383 = 0.792^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{I}_1| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_1) = 0.04244 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \text{ А}$$

$$u_{R1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{R1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{R1}) = 1.273 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 1.585) \text{ В}$$

$$u_{L1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{L1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{L1}) = 1.333 \cdot \sin(314.2 \cdot t - 3.128) \text{ В}$$

$$u_{C1}(t) = \sqrt{2} \cdot |\underline{U}_{C1}| \cdot \sin(100\pi \cdot t + \psi_{C1}) = 1.351 \cdot \sin(314.2 \cdot t + 0.01383) \text{ В}$$

Расчет для третьей гармоники

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = (1.06 \times 10^{-3} + 3.801j \times 10^{-4}) \cdot \text{А}$$

$$|\underline{I}_3| = 1.126 \times 10^{-3} \cdot \text{А} \quad \psi_3 = \arg(\underline{I}_3) = 0.3444 = 19.733^\circ$$

$$\underline{U}_{R3} = \underline{I}_3 \cdot R = (0.032 + 0.011j) \cdot \text{В}$$

$$|\underline{U}_{R3}| = 0.034 \cdot \text{В} \quad \psi_{R3} = \arg(\underline{U}_{R3}) = 0.3444 = 19.733^\circ$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_{L3} = (-0.036 + 0.1j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L3}| = 0.106 \cdot B \quad \psi_{L3} = \arg(\underline{U}_{L3}) = 1.915 = 109.721^\circ$$

$$\underline{U}_{C3} = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_{C3} = (4.033 \times 10^{-3} - 0.011j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C3}| = 0.012 \cdot B \quad \psi_{C3} = \arg(\underline{U}_{C3}) = -1.226 = -70.245^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot |I_3| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_3) = 0.001592 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.344) \text{ A}$$

$$u_{R3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{R3}) = 0.04776 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 0.3444) \text{ B}$$

$$u_{L3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{L3}) = 0.1501 \cdot \sin(942.5 \cdot t + 1.915) \text{ B}$$

$$u_{C3}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C3}| \cdot \sin(300\pi \cdot t + \psi_{C3}) = 0.01689 \cdot \sin(942.5 \cdot t - 1.226) \text{ B}$$

Расчет для пятой гармоники

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{E}_5}{\underline{Z}_5} = (2.298 \times 10^{-4} + 4.575j \times 10^{-5}) \cdot A$$

$$|\underline{I}_5| = 2.344 \times 10^{-4} \cdot A \quad \psi_5 = \arg(\underline{I}_5) = 0.1965 = 11.259^\circ$$

$$\underline{U}_{R5} = \underline{I}_5 \cdot R = (6.895 \times 10^{-3} + 1.373j \times 10^{-3}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{R5}| = 7.031 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{R5} = \arg(\underline{U}_{R5}) = 0.1965 = 11.259^\circ$$

$$\underline{U}_{L5} = \underline{I}_5 \cdot \underline{X}_{L5} = (-7.186 \times 10^{-3} + 0.036j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L5}| = 0.037 \cdot B \quad \psi_{L5} = \arg(\underline{U}_{L5}) = 1.767 = 101.242^\circ$$

$$\underline{U}_{C5} = \underline{I}_5 \cdot \underline{X}_{C5} = (2.913 \times 10^{-4} - 1.463j \times 10^{-3}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C5}| = 1.492 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{C5} = \arg(\underline{U}_{C5}) = -1.374 = -78.724^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_5(t) = \sqrt{2} \cdot |I_5| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_5) = 0.0003314 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$$

$$u_{R5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{R5}) = 0.009943 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 0.1965)$$

$$u_{L5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{L5}) = 0.05206 \cdot \sin(1571.0 \cdot t + 1.767)$$

$$u_{C5}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C5}| \cdot \sin(500\pi \cdot t + \psi_{C5}) = 0.00211 \cdot \sin(1571.0 \cdot t - 1.374)$$

Расчет для седьмой гармоники

$$\underline{I}_7 = \frac{\underline{E}_7}{\underline{Z}_7} = (8.369 \times 10^{-5} + 1.166j \times 10^{-5}) \cdot A$$

$$|\underline{I}_7| = 8.45 \times 10^{-5} \cdot A \quad \psi_7 = \arg(\underline{I}_7) = 0.1384 = 7.93^\circ$$

$$\underline{U}_{R7} = \underline{I}_7 \cdot R = (2.511 \times 10^{-3} + 3.497j \times 10^{-4}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{R7}| = 2.535 \times 10^{-3} \cdot B \quad \psi_{R7} = \arg(\underline{U}_{R7}) = 0.1384 = 7.93^\circ$$

$$\underline{U}_{L7} = I_7 \cdot \underline{X}_{L7} = (-2.564 \times 10^{-3} + 0.018j) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{L7}| = 0.019 \cdot B \quad \psi_{L7} = \arg(\underline{U}_{L7}) = 1.709 = 97.918^\circ$$

$$\underline{U}_{C7} = I_7 \cdot \underline{X}_{C7} = (5.301 \times 10^{-5} - 3.806j \times 10^{-4}) \cdot B$$

$$|\underline{U}_{C7}| = 3.842 \times 10^{-4} \cdot B \quad \psi_{C7} = \arg(\underline{U}_{C7}) = -1.432 = -82.048^\circ$$

Мгновенные значения токов и напряжений

$$i_7(t) = \sqrt{2} \cdot |I_7| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_7) = 0.0001195 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{R7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{R7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{R7}) = 0.003585 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 0.1384)$$

$$u_{L7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{L7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{L7}) = 0.02628 \cdot \sin(2199.0 \cdot t + 1.709)$$

$$u_{C7}(t) = \sqrt{2} \cdot |U_{C7}| \cdot \sin(700\pi \cdot t + \psi_{C7}) = 0.0005434 \cdot \sin(2199.0 \cdot t - 1.432)$$

Суммируем все гармоники

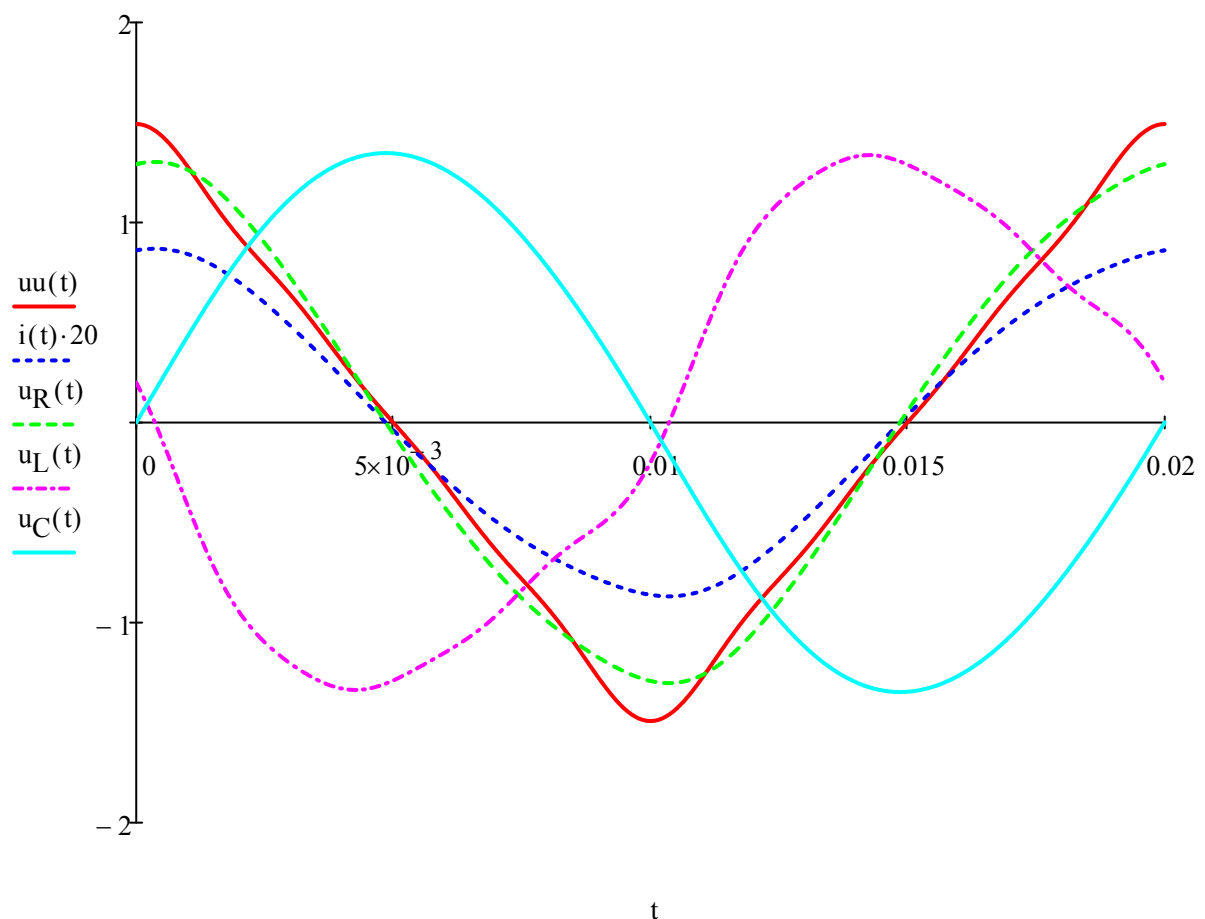
$$u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R3}(t) + u_{R5}(t) + u_{R7}(t)$$

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C3}(t) + u_{C5}(t) + u_{C7}(t)$$

$$u_L(t) = u_{L1}(t) + u_{L3}(t) + u_{L5}(t) + u_{L7}(t)$$

$$uu(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + i_7(t)$$



Практическое занятие №6

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad (11)$$

(где $f(t)$ – оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (12)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т.е. от уравнения (11) с условиями (12) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ – изображение искомого решения, $F(p)$ – изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$. Решив операторное уравнение относительно

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (11). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо операторного уравнения получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' + 4x = -e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - 1$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - p - 2.$$

Кроме того, $-e^t \doteq -\frac{1}{p-1}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид $p^2 X(p) - p - 2 + 4X(p) = -\frac{1}{p-1}$.

Отсюда находим $X(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p-1)(p^2 + 4)}$.

Разлагая эту дробь на простейшие, получим

$$X(p) = \frac{-1}{5(p-1)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6p+11}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений, находим искомое частное решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = -\frac{1}{5} e^t + \frac{6}{5} \cos 2t + \frac{11}{10} \sin 2t.$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = z - y, \\ y' = z + 2e^{-t}, & x(0) = 0, \quad y(0) = 0,5; \quad z(0) = 0. \\ z' = z - x; \end{cases}$$

Решение. Пусть $x = x(t) \doteq X(p) = X$; $y = y(t) \doteq Y(p) = Y$; $z = z(t) \doteq Z(p) = Z$.

Находим, что $x' \doteq pX$; $y' \doteq pY - 0,5$; $z' \doteq pZ$.

Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX + Y - Z = 0, \\ pY - Z = 0,5 + \frac{2}{p+1}, \\ X + (p-1)Z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$X(p) = -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)},$$

$$Y(p) = \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)},$$

$$Z(p) = \frac{p+5}{2(p^4-1)}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p+5}{2(p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{2(p^2+1)} \doteq \\ &\doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(p+5)(p^2-p+1)}{2(p^4-1)} \doteq \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{p+5}{2(p^4-1)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \\ &\doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t. \end{aligned}$$

Ответ: $x(t) \doteq -e^{-t} + \cos t - \frac{3}{2} \sin t,$

$$y(t) \doteq \frac{5}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t,$$

$$z(t) \doteq -\frac{1}{4} \cos t - \frac{5}{4} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{4} e^t.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 3. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = e^{2t} \cos^2 6t + \sin 2t \sin 4t + 3.$$

Решение. В силу свойства линейности преобразования Лапласа найдем изображение каждого слагаемого:

$$\cos^2 6t = \frac{1 + \cos 12t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12t \doteq \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 12^2}.$$

Применяя теорему смещения изображения к первому слагаемому, получим

$$e^{2t} \cos^2 6t \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 144}.$$

Изображение первого слагаемого можно было найти также по таблице оригиналов и изображений, используя формулу 9.

Второе слагаемое

$$\sin 2t \sin 4t = \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \cos 6t \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 36}.$$

Третье слагаемое $3 \doteq \frac{3}{p}$. Окончательно получаем

$$f(t) \doteq \frac{1}{2(p-2)} + \frac{p-2}{2(p-2)^2 + 144} + \frac{p}{2(p^2 + 4)} - \frac{p}{2(p^2 + 36)} + \frac{3}{p}.$$

Пример 4. Найти изображение данного оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & t \in (1, 3) \\ 0, & t \notin (1, 3) \end{cases}$$

Решение. Из рисунка 8 видно, что $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$; $f_1(t) = f_3(t - 1)$; $f_2 = f_4(t - 3)$.

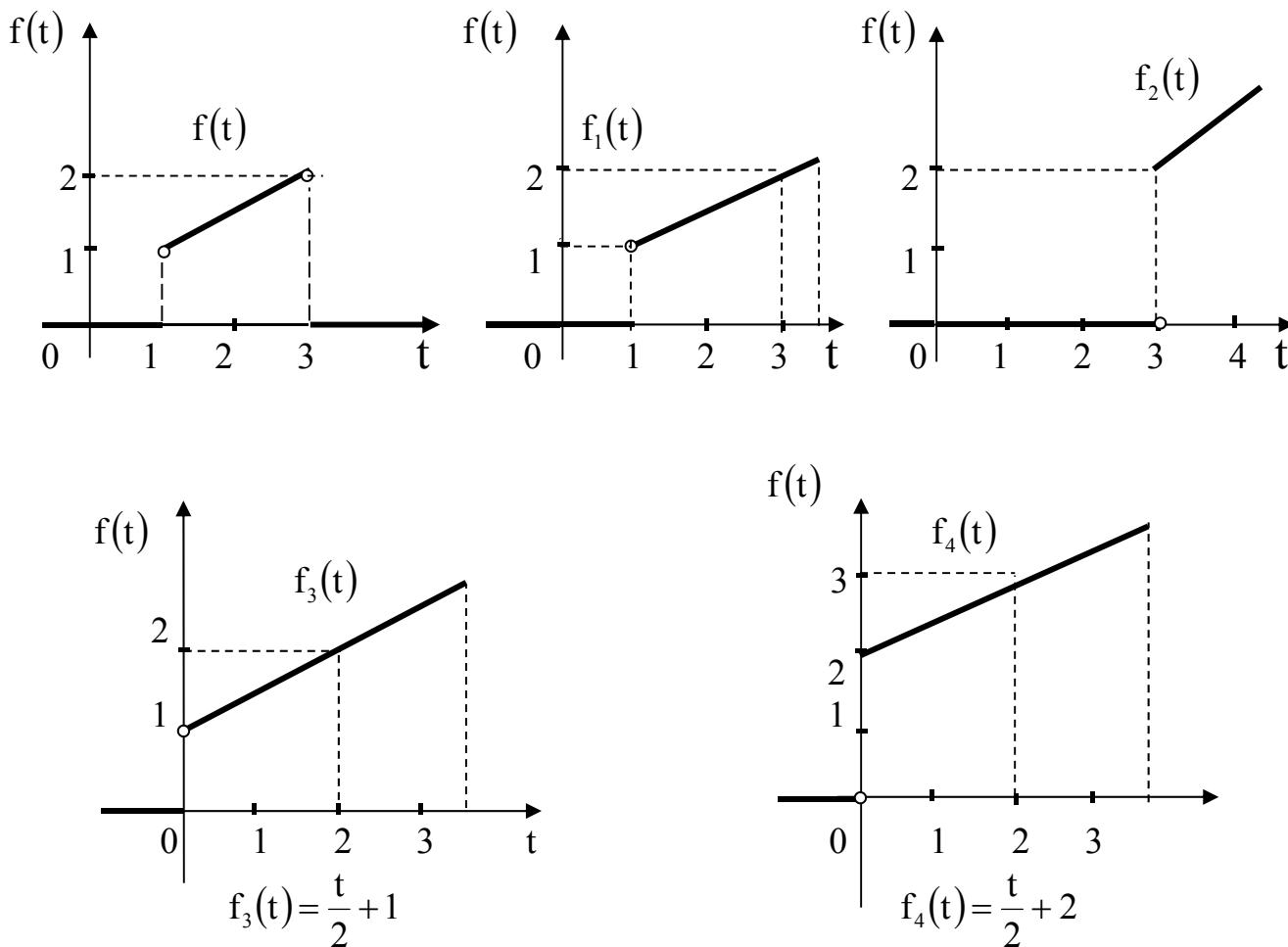


Рисунок 8

Так как $f_3(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}$; $f_4(t) \doteq \frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}$, по свойству запаздывания оригинала получаем $f(t) \doteq \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p} - \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{2}{p}\right)e^{-3p}$.

Образцы решения типовых заданий представлены примерами №№ 10 – 14.

Задания для самостоятельного решения

1 Решить данные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t},$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Данные системы дифференциальных уравнений решить операционным методом при указанных начальных условиях. В некоторых вариантах в скобках указан один из корней характеристического уравнения. \dot{x} означает $\frac{dx}{dt}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

Практическое занятие №7

Обработка опытных данных методами интерполирования и аппроксимации

$$x = 1,54$$

Прямая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \text{ где } q = \frac{x-x_0}{h}, y_i = f_i, \text{ а}$$

выражения вида $\Delta^k y_i$ — конечные разности.

Обратная интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \text{ где } q = \frac{x-x_n}{h}$$

Решение в Excel приведено на следующей странице.

Результат 21,759.

Решение в Mathcad:

linterp – линейная интерполяция, interp – сплайн интерполяция, cspline – функция подбирающая коэффициенты для кубических сплайнов.

$$x := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 2.718 \\ 3.320 \\ 4.055 \\ 4.953 \\ 6.049 \\ 7.389 \\ 9.025 \\ 11.023 \\ 13.464 \\ 16.445 \\ 20.086 \\ 24.533 \\ 29.964 \\ 36.598 \\ 44.701 \end{pmatrix}$$

$$\text{linterp}(x, y, 1.54) = 21.865$$

$$\text{interp}(\text{cspline}(x, y), x, y, 1.54) = 21.759$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
1																			
2	x	y		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
3	0,5	2,718	0,602	0,133	0,030	0,005	0,006	-0,011	0,024	-0,044	0,071	-0,099	0,112	-0,077	-0,063	0,390			
4	0,6	3,320	0,735	0,163	0,035	0,011	-0,005	0,013	-0,020	0,027	-0,028	0,013	0,035	-0,140	<u>0,327</u>				
5	0,7	4,055	0,898	0,198	0,046	0,006	0,008	-0,007	0,007	-0,001	-0,015	0,048	-0,105	<u>0,187</u>					
6	0,8	4,953	1,096	0,244	0,052	0,014	0,001	0,000	0,006	-0,016	0,033	-0,057	<u>0,082</u>						
7	0,9	6,049	1,340	0,296	0,066	0,015	0,001	0,006	-0,010	0,017	-0,024	<u>0,025</u>							
8	1	7,389	1,636	0,362	0,081	0,016	0,007	-0,004	0,007	-0,007	<u>0,001</u>								
9	1,1	9,025	1,998	0,443	0,097	0,023	0,003	0,003	0,000	-0,006									
10	1,2	11,023	2,441	0,540	0,120	0,026	0,006	0,003	-0,006										
11	1,3	13,464	2,981	0,660	0,146	0,032	0,009	-0,003											
12	1,4	16,445	3,641	0,806	0,178	0,041	<u>0,006</u>												
13	1,5	20,086	4,447	0,984	0,219	<u>0,047</u>													
14	1,6	24,533	5,431	1,203	<u>0,266</u>														
15	1,7	29,964	6,634	<u>1,469</u>															
16	1,8	36,598	<u>8,103</u>	=B17-B16															
17	1,9	<u>44,701</u>																	
18	x=	<u>1,540</u>																	
19	h=	0,10	=A4-A3																
20	t=	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	10,4	=(B18-A3)/B19
21			10,4	97,76	821,18	6076,76	38891,3	2E+05	924057	3E+06	8E+06	1E+07	4E+06	-3E+06	4E+06	-1E+07	=C21*(D20+1-D2)		
22		2,718	6,261	6,501	4,106	1,266	1,945	-3,209	4,400	-3,429	1,475	-0,288	0,012	0,000	0,000	0,000	=C3*C21/ФАКТР(C2)		
23		<u>21,75899</u>	=СУММ(B22:P22)																
24																			
25	t=	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	-3,6	=(B18-A17)/B19
26			-3,600	9,36	-14,976	8,9856	3,59424	5,032	12,0766	41,061	180,67	975,6	6243,8	46204	388117	4E+06	=C26*(D25+D2-1)		
27		<u>44,701</u>	-29,1708	6,87492	-0,6639	0,0176	0,00018	-2E-05	-1,4E-05	-6E-06	5E-07	7E-06	1E-05	2E-05	2E-05	2E-05	=C26*C16/ФАКТР(C2)		
28		<u>21,75899</u>	=СУММ(B27:P27)																
29																			

В задании в соответствии с вариантом выполнить:

а) пользуясь формулами интерполяции Ньютона (1-ой и 2-ой) . вычислить e^x или $\sin(x)$ для заданных значений аргумента x в Excel;

б) полученные решения проверить интерполированием в MathCAD;

в) выполнить в MathCAD линейную регрессию (аппроксимацию). Для первых 10 вариантов найти значение e^x , для вторых 10 – $\sin(x)$. Значение Σ равно сумме двух последних цифр шифра зачетной книжки.

Таблица 7.1 - Значения аргументов интерполяционных многочленов

Σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0,507	0,512	0,523	0,527	0,533	0,541	0,547	0,553	0,558	0,563
Σ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
x	1,151	1,218	1,345	1,421	1,538	1,609	1,732	1,849	1,929	

Таблица 7.2 - Значения функции $y = e^x$

x	e^x	x	e^x	x	e^x
0,50	1,6487	0,54	1,7160	0,58	1,7860
0,51	1,6653	0,55	1,7333	0,59	1,8040
0,52	1,6820	0,56	1,7507	0,60	1,8221
0,53	1,6989	0,57	1,7683	-	-

Таблица 7.3 - Значения функций $y = \sin(x)$

x	$\sin x$	x	$\sin x$	x	$\sin x$
1,1	0,89121	1,5	0,99749	1,9	0,94630
1,2	0,93204	1,6	0,99957	2,0	0,90930
1,3	0,96356	1,7	0,99166	-	-
1,4	0,98545	1,8	0,97385	-	-

Практическое занятие №8

Численные методы решения дифференциальных уравнений

$$R = 5 \text{ Ом}$$

$$C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$E = 100 \text{ В}$$

Подставим в уравнение $U'_C = E / (R \cdot C) - U_C / (R \cdot C)$ значения из задания, получим: $U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$

Найдем шаг Δt из условия что на графике будет отражено 20 точек и переходный процесс завершиться за $4 \cdot R \cdot C$, следовательно, $\Delta t = 4 \cdot R \cdot C / 20 = 5 \cdot 10^{-6}$.

Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$U_i = U_{i-1} + \Delta t \cdot U'_{i-1}$$

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t$$

Составим таблицу в Excel, при $t=0$ напряжение $U=0$, так как конденсатор заряжается.

U=	0	=B2+5*(10^-6)*B4
t=	0	=B3+5*(10^-6)
U' =	=4*(10^6)-4*(10^4)*B2	

Вычислим 20 значений:

№ шага	0	1	2	3	4	5	6	7
U=	0	20	36	48,8	59,04	67,232	73,7856	79,02848
t=	0	0,000005	0,00001	0,000015	0,00002	0,000025	0,00003	0,000035
U' =	4000000	3200000	2560000	2048000	1638400	1310720	1048576	838860,8

№ шага	8	9	10	11	12	13	14
U=	83,22278	86,57823	89,26258	91,41007	93,12805	94,50244	95,60195
t=	0,00004	0,000045	0,00005	0,000055	0,00006	0,000065	0,00007
U' =	671088,6	536870,9	429496,7	343597,4	274877,9	219902,3	175921,9

№ шага	15	16	17	18	19	20
U=	96,481563	97,1852502	97,7482	98,19856	98,55885	98,84708
t=	0,000075	0,00008	0,000085	0,00009	0,000095	0,0001
U' =	140737,49	112589,991	90071,99	72057,594	57646,08	

Вычислительный эксперимент:

Изменим, значение E в 5, 10 и 50 раз, получим три новых дифференциальных уравнения:

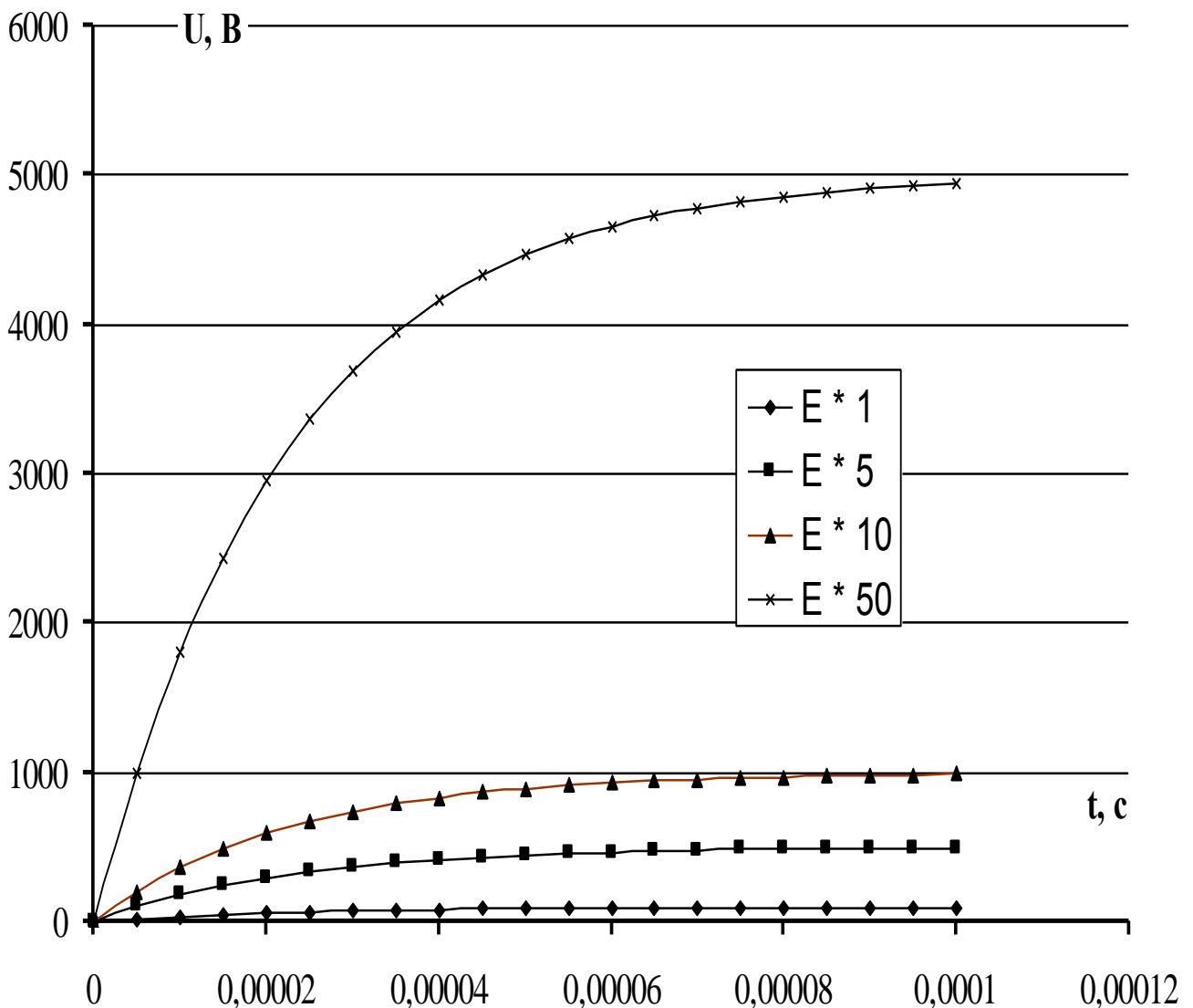
$$U'_C = 4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_C$$

$$U_{5C}' = 20 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{5C}$$

$$U_{10C}' = 40 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{10C}$$

$$U_{50C}' = 200 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4 \cdot U_{50C}$$

Аналогично предыдущему решению строятся таблицы для 20 значений для каждого из уравнений. По полученным таблицам строятся графики:



В задании в соответствии вариантом выполнить:

а) описать переходный процесс в электрической цепи в виде дифференциального уравнения;

б) решить полученное уравнение методом Эйлера в Excel, используя рекуррентное выражение;

в) исследовать динамическую модель при изменении одного из параметров в 2, 5 и 10 раз. Построить

графики зависимостей.

При включении ключа «Я» конденсатор заряжается до $U_c = E$.

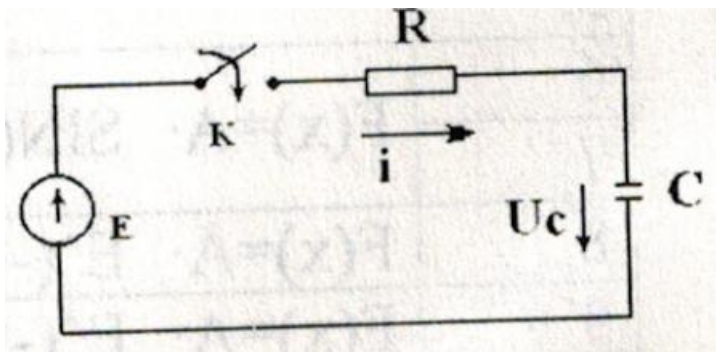
Дифференциальное уравнение заряда $RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ (*).

Моделируя уравнение (*) на ЭВМ, заменяя RC на τ , перепишем:

$$\tau \frac{dU_c}{dt} + U_c = E \text{ или } \frac{dU_c}{dt} = \frac{E}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$$

Примечание: считать, что переходный процесс завершен через $t = (3-4)\tau$, $\tau = RC$

Соответственно следует выбирать шаг интегрирования Δt для получения полной картины заряда конденсатора.



Из уравнения $RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ имеем $\tau \frac{dU_c}{dt} + U_c = E$ или $\frac{dU_c}{dt} = \frac{E}{\tau} - \frac{U_c}{\tau}$.

Для $R = 100$ Ом и $C = 1$ мкФ, получим $\tau = 10^{-4}$ с.

При моделировании дифференциального уравнения следует правильно выбирать диапазон аргумента (интервал времени) и его шаг изменения.

Так как процесс заряда конденсатора определяется постоянной времени и завершается через 3-4 τ , то Δt - шаг изменения аргумента искомой функции $U_c = f(t)$ должен быть выбран из этих соображений.

Так, например, для $R = 100$ Ом и $C = 1$ мкФ $\tau = RC = 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-4}$ с, откуда для получения 10 точек на графике при полном заряде конденсатора $\Delta t = 0.1 \cdot 3\tau = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Ниже приведен график заряда конденсатора при различном интервале моделирования ($t = 0-2$ - кривая 1 и $t = 0-100000$ - кривая 2).

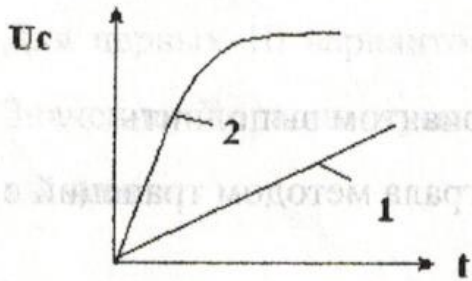


Таблица 3 - Значения параметров электрической цепи

№ варианта	R (Ом)	C (мкФ)	E (В)
1	2	3	4
*0	10	1	100
*2	5	0,5	50
3	100	1	100
*4	50	1	100
5	100	0,5	50
*6	10	10	100
7	5	5	100
*8	100	10	100
9	50	10	100
10	1	5	100
11	25	15	100
12	50	5	50
1	100	3	100
-	2	3	4
13	50	15	100
14	25	1	100
15	100	0,5	100
16	50	5	100
17	100	3	50
18	50	10	50

Список рекомендуемой литературы

1. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев, О.В. Зимина, А.И. Кириллов [и др.]; под ред. проф. А.И. Кириллова. - [2-е изд., стер.]. - М.: Физматлит, 2003. - 400 с. - (Решебник). - ISBN 5-9221-0423-3
2. Методы решения специальных задач с использованием информационных технологий Электронный ресурс: Практикум / сост. А. С. Ермаков. - Москва: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. - 133 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-0973-3
3. Порсев, Е. Г. Организация и планирование экспериментов : учебное пособие / Е.Г. Порсев ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Новосибирский государственный технический университет. - Новосибирск: НГТУ, 2010. - 155 с. - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-7782-1461-30.
4. Ашихмин, В. Н. Введение в математическое моделирование Электронный ресурс : Учебное пособие / В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер. - Введение в математическое моделирование, 2019-04-20. - Москва: Логос, 2004. - 439 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-94010-272-7
5. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - Москва: Наука, 1971. - 254 с.: ил. - (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов). - <http://biblioclub.ru/>
6. Семенов, Б. А. (д-р техн. наук). Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях:

учеб. пособие для вузов / Б.А. Семенов. - 2-е изд., доп. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. - 393 с.: ил.; 21. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Гриф: Доп. УМО. - Библиогр.: с. 388-390. - ISBN 978-5-8114-1392-8

7. Яковлев, С. В. (СКФУ). Методы и алгоритмы решения задач системного анализа: учебное пособие: практикум / С. В. Яковлев; Сев.-Кав. федер.ун-т. - Ставрополь: СКФУ, 2014. - 85 с. - Неопубликованное издание

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению самостоятельной работы по дисциплине
«Методы решения задач электроэнергетики и электротехники»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины.....	5
2 План-график выполнения самостоятельной работы.....	6
3 Контрольные точки и виды отчетности по ним	7
4 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания.....	7
5 Тематический план дисциплины	7
6 Вопросы для экзамена	9
7 Методические рекомендации по изучению теоретического материала.....	9
8 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.....	10
9 Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции.....	10
10 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	11

Введение

Настоящее пособие разработано на основе:

- Федерального закона от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (далее ФГОС ВО);
- нормативно-методических документов Минобрнауки России;
- Устава ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»;
- Приказом Минобрнауки России от 06.04.2021 N 245 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» (Зарегистрировано в Минюсте России 13.08.2021 N 64644);
- локальных нормативных актов ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет».

На современном рынке труда конкурентоспособным может стать только квалифицированный работник соответствующего уровня и профиля, компетентный, свободно владеющей своей профессией и ориентированный в смежных областях деятельности, способный к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов и готовый к постоянному профессиональному росту.

Самостоятельная работа студента направлена на достижение целей подготовки специалистов-профессионалов, активное включение обучаемых в сознательное освоение содержания образования, обеспечение мотивации, творческое овладение основными способами будущей профессиональной деятельности. Чтобы подготовить и обучить такого профессионала, высшим учебным заведениям необходимо скорректировать свой подход к планированию и организации учебно-воспитательной работы. Это в равной степени относится к изменению содержания и характера учебного процесса. В современных реалиях задача преподавателя высшей школы заключается в организации и направлении познавательной деятельности студентов, эффективность которой во многом зависит от их самостоятельной работы. В свою очередь, самостоятельная работа студентов должна представлять собой не просто самоцель, а средство достижения прочных и глубоких знаний, инструмент формирования активности и самостоятельности студентов.

В связи с введением в образовательный процесс новых образовательных стандартов, с уменьшением количества аудиторных занятий по дисциплинам возрастает роль самостоятельной работы студентов. Возникает необходимость оптимизации самостоятельной работы студентов (далее - СРС). Появляется необходимость модернизации технологий обучения, что существенно меняет подходы к учебно-методическому и организационно-техническому обеспечению учебного процесса.

Данная методическая разработка содержит рекомендации по организации, управлению и обеспечению эффективности самостоятельной работы студентов в процессе обучения в целях формирования необходимых компетенций.

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом учебного процесса для каждого студента и определяется учебным планом. Виды самостоятельной работы студентов определяются при разработке рабочих программ и учебных методических комплексов дисциплин содержанием учебной дисциплины. При определении содержания самостоятельной работы студентов следует учитывать их уровень самостоятельности и требования к уровню самостоятельности выпускников для того, чтобы за период обучения искомый уровень был достигнут. Так, удельный вес самостоятельной работы при обучении в очной форме составляет до 50% от количества аудиторных часов, отведённых на изучение дисциплины, в заочной форме - количество часов, отведенных на освоение дисциплины, увеличивается до 90%.

Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства педагога, но по его заданиям и под его контролем.

Самостоятельная работа – это познавательная учебная деятельность, когда последовательность мышления студента, его умственных и практических операций и действий зависит и определяется самим студентом. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня, что в итоге приводит к развитию навыка самостоятельного планирования и реализации деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение необходимыми компетенциями по своему направлению подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности.

На основании компетентного подхода к реализации профессиональных образовательных программ, видами заданий для самостоятельной работы являются:

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и информационно-телекоммуникационной сети Интернет и др.

- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции, обработка текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио и видеозаписей), повторная работа над учебным материалом, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответ на контрольные вопросы, заполнение рабочей тетради, аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект-анализ и др.), завершение аудиторных практических работ и оформление отчетов по ним, подготовка мультимедиа сообщений/докладов к выступлению на семинаре (конференции), материалов-презентаций, подготовка реферата, составление библиографии, тематических кроссвордов, тестирование и др.

- *для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач, выполнение чертежей, схем, выполнение расчетов (графических работ), решение ситуационных (профессиональных) задач, подготовка к деловым играм, проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Контроль результатов самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине и внеаудиторную самостоятельную работу студентов по дисциплине, может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

Самостоятельная работа проводится в виде упражнений при изучении нового материала, упражнений в процессе закрепления и повторения, упражнений проверочных и контрольных работ, а также для самоконтроля.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

1. готовность студентов к самостоятельному труду;
2. наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;
3. консультационная помощь.

Самостоятельная работа может проходить в лекционном кабинете, компьютерном зале, библиотеке, дома. Самостоятельная работа способствует формированию компетенций, тренирует волю, воспитывает работоспособность, внимание, дисциплину и ответственность.

1 Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Дисциплина «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» относится к дисциплине базовой части. Она направлена на формирование профессиональных компетенций обучающихся в процессе выполнения работ, определенных ФГОС ВО.

Наименование компетенций:

Код, формулировка компетенции	Код формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	ИД-2 _{опк-3} . Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений	Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Использует инструментальный и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники
	ИД-4 _{опк-3} . Применяет математический аппарат численных методов.	Демонстрирует знание математического аппарата численных методов; Использует инструментальный и основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники

В рамках курса дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» самостоятельная работа студентов находит активное применение и включает в себя различные виды деятельности:

- подготовка к практическим занятиям, в том числе работа с методическими указаниями, средствами массовой информации;
- подготовка к лекциям, в том числе самостоятельное углубленное изучение теоретического курса по рекомендованной литературе;
- подготовка к промежуточной аттестации.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к лекциям заключается в получении новых знаний, приобретенных при более глубоком изучении литературы по дисциплине.

Задачи:

- доработка и повторение конспектов лекции;
- осмысление содержания лекции, логической структуры, выводов.

Цель самостоятельной работы студента при подготовке к практическим занятиям заключается в углублении, расширении, детализировании знаний, полученных на лекциях в обобщенной форме.

Задачи:

- развить способность применять полученные знания на практике при решении конкретных задач;
- проверить знания студентов, полученные на лекциях и при самостоятельном изучении литературы.

2 План-график выполнения самостоятельной работы

Таблица 1 – Виды самостоятельной работы

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Очная форма обучения			Заочная форма обучения		
			Объем часов, в том числе			Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего	СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр								
ИД-2 _{ОПК-3}	Подготовка к лекционному занятию	Собеседование	2,28	0,12	2,40	0,85	0,05	0,90
ИД-2 _{ОПК-3}	Подготовка к практическому занятию	Собеседование	3,42	0,18	3,60	0,85	0,05	0,90
ИД-2 _{ОПК-3}	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	74,10	3,90	78,00	113,00	5,95	118,95
ИД-2 _{ОПК-3}	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	25,5	1,5	27,0	5,25	1,5	6,75
Итого за 2 семестр			105,3	5,7	111,0	119,95	7,55	127,5
Итого			105,3	5,7	111,0	119,95	7,55	127,5

3 Контрольные точки и виды отчетности по ним

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

4 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Уровни сформированности компетенци(ий), индикатора (ов)	Дескрипторы			
	Минимальный уровень не достигнут (Неудовлетворительно) 2 балла	Минимальный уровень (удовлетворительно) 3 балла	Средний уровень (хорошо) 4 балла	Высокий уровень (отлично) 5 баллов
<i>Компетенция:</i> ОПК-3. Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач				
Результаты обучения по дисциплине (модулю): <i>Индикатор:</i> ИД-2 _{опк-3} . Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений	Отсутствуют знания математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Не способен использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	Демонстрирует частичные знания математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Частично умеет использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Умеет на базовом уровне использовать инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	Демонстрирует знание математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений; Уверенно использует инструментарий и основные приемы теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники
Результаты обучения по дисциплине (модулю): <i>Индикатор:</i> ИД-4 _{опк-3} . Применяет математический аппарат	Отсутствуют знания математического аппарата численных методов; Не способен использовать инструментарий и основные приемы	Демонстрирует частичные знания математического аппарата численных методов; Частично умеет использовать	Демонстрирует знание математического аппарата численных методов; Умеет на базовом уровне использовать инструментарий и	Демонстрирует знание математического аппарата численных методов; Уверенно использует инструментарий и основные приемы математического

численных методов.	математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	инструментарий и основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	основные приемы математического аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники	аппарата численных методов для решения типовых задач электроэнергетики и электротехники
--------------------	---	--	---	---

5 Тематический план дисциплины

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
2 семестр			
1	Комплексные числа. Числовые ряды в комплексной плоскости 1. Комплексные величины. Определения. Основные операции 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции с ними 3. Представление синусоидально изменяющихся величин в виде комплексных чисел	1.50	
1	Комплексные числа. Числовые ряды в комплексной плоскости 1. Элементы R, L и C в цепи синусоидального тока 2. Применение комплексных чисел для анализа электрических цепей синусоидального тока 3. Числовые ряды в комплексной плоскости. Основные понятия. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости	1.50	
2	Функции комплексного переменного 1. Основные элементарные функции 2. Аналитические функции. Условия Коши-Римана	1.50	
3	Ряды Фурье. Интеграл Фурье 1. Основные понятия. Свойства. Спектр. 2. Применение к расчету цепей несинусоидального тока 3. Интеграл Фурье	1.50	
4	Основы операционного исчисления 1. Преобразование Лапласа 2. Преобразование некоторых функций 3. Свойства оригиналов и изображений	1.50	
4	Основы операционного исчисления 1. Решение дифференциальных уравнений и систем 2. Приложения операционного исчисления к задачам электротехники	1.50	
5	Численные методы 1. Методы решения нелинейных уравнений 2. Интерполирование функций	1.50	

5	Численные методы 1. Численное интегрирование 2. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем	1.50	
	Итого за 2 семестр	12.00	
	Итого	12.00	

6 Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Операции с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. Примеры.
2. Комплексные числа: формы представления, перевод из различных форм. Примеры.
3. Геометрический смысл модуля разности.
4. Операции с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и деление. Примеры.
5. Формулы Эйлера и Муавра. Примеры применения.
6. Представление синусоидальной величины с помощью комплексных чисел (комплексная амплитуда, комплекс действующего значения).
7. Напряжение, ток и мощность на резистивном, индуктивном и емкостном элементах.
8. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость. Примеры.
9. Применение символического метода к расчету неразветвленной цепи синусоидального тока. Построение векторной диаграммы.
10. Числовые ряды в комплексной плоскости. Признаки сходимости.
11. Функции комплексной переменной.
12. Аналитические функции. Условия Коши-Римана.
13. Ряды Фурье. Вычисление коэффициентов ряда Фурье с выводами.
14. Ряды Фурье. Интегрирование и дифференцирование.
15. Разложение в ряд Фурье в окрестностях точек разрыва. Явление Гиббса.
16. Графическое представление ряда Фурье. Спектр.
17. Интеграл Фурье. Применение.
18. Графо-аналитический метод разложения в ряд Фурье.
19. Дискретное преобразование Фурье.
20. Вычеты. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов.
21. Определение преобразования Лапласа.
22. Изображения константы, синуса, косинуса, экспоненты.
23. Изображения первой и второй производной, изображение интеграла.
24. Свойства преобразования Лапласа. Теорема линейности с выводом.
25. Свойства преобразования Лапласа. Теорема подобия с выводом.
26. Свойства преобразования Лапласа. Теорема затухания с выводом.
27. Свойства преобразования Лапласа. Теорема запаздывания с выводом.
28. Численные методы в расчетах электроэнергетики
29. Решение нелинейных уравнений и задач оптимизации. методы решения нелинейных уравнений.
30. Интерполирование функций. Интерполяционная формула Лагранжа.
31. Численное интегрирование.
32. Метод наименьших квадратов
33. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем.
34. Задача Коши. Теорема Пикара.
35. Метод Эйлера, его геометрический смысл.
36. Метод Эйлера - Коши, его геометрический смысл.
37. Метод Рунге - Кутта, его геометрический смысл.

7 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Самостоятельная работа студента в ходе **лекционных занятий** включает изучение вопросов теории, вынесенных на самостоятельное изучение в соответствии с рабочей программой дисциплины, проработку лекционных материалов для подготовки к контролю знаний на лекционных занятиях (опрос) и подготовку вопросов для обсуждения при консультации с преподавателем.

Работа с лекционным материалом не завершается по окончании лекции. На 2 часа лекции необходимо затратить около часа на работу с конспектом. За это время необходимо перечитать записи, пополнить их данными, которые удалось запомнить из речи преподавателя, но не удалось записать. Работая с конспектом, нужно отметить непонятные вопросы для выяснения у преподавателя на консультации. Отдельно следует выделить связанные с темой лекции вопросы, которые преподаватель поручил проработать самостоятельно.

Активно проработанный в течение семестра конспект лекций в дальнейшем служит основой для подготовки к экзамену.

Вопросы для самостоятельного изучения представлены в п. 5.

Самостоятельная работа в ходе **практикума** включает выполнение заданий к практическим занятиям, в частности решение задач различного уровня сложности. Задачи приведены в методических указаниях к практическим занятиям и фондах оценочных средств.

Зная тему практического занятия, необходимо готовиться к нему заблаговременно. Для эффективной подготовки к практическому занятию необходимо иметь методическое руководство к практическому занятию.

Критерии оценивания практических занятий представлен в фонде оценочных средств.

При проверке практического задания, оцениваются: последовательность и рациональность изложения материала; полнота и достаточный объем ответа; научность в оперировании основными понятиями; использование и изучение дополнительных литературных источников

Критерии оценивания результатов самостоятельной работы: вопросы для собеседования и экзамена приведены Фонде оценочных средств по дисциплине

8 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь вариативный и дифференцированный характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

9 Методические рекомендации при работе над конспектом во время проведения лекции

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к семинарам изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. Подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на семинар. Готовясь к докладу или реферативному сообщению, обращаться за методической помощью к преподавателю. Составить план-конспект своего выступления. Продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной жизнью. Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании работ.

10 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Практическое занятия – один из самых эффективных видов учебных занятий, на которых студенты учатся творчески работать, аргументировать и отстаивать свою позицию, правильно и доходчиво излагать свои мысли перед аудиторией. Основное в подготовке и проведении практических занятий – это самостоятельная работа студента над изучением темы. Студент обязан точно знать план занятия либо конкретное задание к нему. На занятии обсуждаются узловые вопросы темы, однако там могут быть и такие, которые не были предметом рассмотрения на лекции. Могут быть и специальные задания к той или иной теме.

Готовиться к практическому занятию следует заранее. Необходимо внимательно ознакомиться с планом и другими материалами, уяснить вопросы, выносимые на обсуждение. Затем нужно подобрать литературу и другой необходимый, в т.ч. рекомендованный, материал (через библиотеку, учебно-методический кабинет кафедры и др.). Но прежде всего, следует обратиться к своим конспектам лекций и соответствующему разделу учебника. Изучение всех источников должно идти под углом зрения поиска ответов на выносимые на практико-ориентированные занятия вопросы.

Завершающий этап подготовки к занятиям состоит в выполнении индивидуальных заданий.

В случае пропуска занятия студент обязан подготовить материал и отчитаться по нему перед преподавателем в обусловленное время. Может быть предложено отдельным бакалаврам, ввиду их слабой подготовки, более глубоко освоить материал и прийти на индивидуальное собеседование.

Студент не допускается к экзамену, если у него есть задолженность по практическим занятиям.