МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

Кафедра Химической технологии машин и аппаратов химических производств

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольной работы
для студентов специальности 15.03.02
«Технологические машины и оборудование»

Невинномысск
2020

1. Общие положения

Контрольная работа по дисциплине «Теоретическая механика» относится к дисциплинам общетехнической подготовки инженеров механических специальностей. Для выполнения курсовой работы необходима предварительная подготовка студентов по таким дисциплинам, как «Физика», «Высшая математика», «Вычислительная математика и информатика».

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания дисциплины «Теоретическая механика» студентам, обучающимся по специальности 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»: изучение общих законов, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами.

Основные задачи дисциплины:

- усвоение основных понятий, общих законов, принципов, теорем теоретической механики;
- формирование навыков их применение к решению конкретных инженерных задач по статике, кинематике и динамике

1.2. Формулировка задания и его объем

Задание на контрольную работу по теоретической механике выдается индивидуально каждому студенту на специальном бланке, подписанном преподавателем, с указанием даты выдачи.

1.3. Общие требования, предъявляемые к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Каждая контрольная работа выполняется на сброшюрованных листах формата А4, строго по варианту, назначенному преподавателем. Первый лист является титульным (Приложение 1), второй лист – содержание (Приложение 3), последний лист – литература (Приложение 3).
2. Все страницы должны иметь поля: слева - 20 мм, справа -5 мм, сверху - 5 мм, снизу- 5 мм.

3. Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные исходные данные и в соответствии с ними изобразить расчетную схему.
4. Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. Требуемые величины находятся сначала в алгебраической форме и записываются в виде формулы. Затем в эту формулу подставляются известные числовые величины, в соответствии с их позицией в формуле и после знака равенства записывается результат и его размерность. Промежуточные вычисления при этом опускаются. Вычисления проводятся с точностью до третьей либо четвертой значащей цифры.
5. Расчетные схемы рисуются крупно на отдельной странице с помощью чертежных инструментов, строго в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей. Углы должны вычерчиваться точно с использованием транспортира. Многие величины, определяемые в ходе решения задач, являются векторными, поэтому следует определить не только их модули, но и построить (изобразить) эти векторы на рисунках.
6. Пометки, сделанные преподавателем при проверке, не убираются. Следует иметь в виду, что преподаватель при проверке работы отмечает, как правило, лишь место появления ошибки и ее характер.
7. Разобравшись по учебнику с теоретическим материалом, студент должен исправить допущенную ошибку, а затем внести исправления во все расчеты, оказавшиеся ошибочными, начиная с места появления ошибки и до конца решения задачи.
8. К работе, которая сдается на повторную проверку, в обязательном порядке, должен прилагаться ее первоначальный (не зачтённый) вариант.
9. Работа считается зачтенной только после ее *защиты* преподавателю, проводимой в форме собеседования.
10. Работа, не соответствующая своему варианту, или выполненная с нарушением изложенных требований, не засчитывается и возвращается для исправления.

Требования к оформлению графиков и схем

1. Графики и схемы вычерчиваются на листах формата А4 и должны иметь рамку и основную надпись по ГОСТ 2.104-68.

2. Оси графиков и схем проводятся толщиной 0,8-1,2 мм. Масштабные коэффициенты должны быть расположены по осям координат.

3. Каждое изображение на листе должно иметь наименование и масштабный коэффициент построения. Надпись делается над построением.

4. Шрифт надписи - на номер больше принятой для обозначений в схеме или графике.

2. Методические указания к выполнению контрольной работы

2.1. Методические указания к выполнению заданий
Часть 1 «Статика»
2.1.1. Методические указания по усвоению некоторых понятий статики

Плоская произвольная система сил - система сил, как угодно расположенных, в одной плоскости.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{\mathbf{F}}$ этой системы сил и ее главный момент $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{0}}$ относительно любого центра **О** были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{0}} = \sum \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{0}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0} \qquad (1.1)$$

Из (1.1) вытекают три аналитических условия (уравнения) равновесия плоской произвольной системы сил, которые можно записать в трех различных формах.

<u>Первая</u> (основная) форма условий равновесия:

для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки **О**, лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю, то есть

$$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{kx}} = \mathbf{0}, \qquad \sum \mathbf{F}_{\mathbf{ky}} = \mathbf{0}, \qquad \sum \mathbf{M}_{\mathbf{0}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0} \qquad (1.2)$$

<u>Вторая</u> форма условий равновесия:

$$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{kx}} = \mathbf{0}, \qquad \sum \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0}, \qquad \sum \mathbf{M}_{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0} \qquad (1.3)$$

Прямая **АВ** не должна быть перпендикулярна оси $\mathbf{X}$.

<u>Третья</u> форма условий равновесия:

$$\sum \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0}, \quad \sum \mathbf{M}_{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0}, \quad \sum \mathbf{M}_{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}\right) = \mathbf{0} \qquad (1.4)$$

Точки **А**, **В**, **С** не должны лежать на одной прямой.

Проекцией силы $\left(\overline{\mathbf{F}}\right)$ на ось $(\mathbf{X})$ называют отрезок $\left(\mathbf{ab} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}\right)$, заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала $(\mathbf{A})$ и конца $(\mathbf{B})$ вектора силы на эту ось.

a) $\mathbf{F_x = ab > 0}$ b) $\mathbf{F_x = -ab < 0}$

Рис. 1.1

Проекция силы на ось $(\mathbf{F_x})$ равна произведению модуля силы $(\mathbf{F})$ на косинус угла между силой $(\overline{\mathbf{F}})$ и положительным направлением оси $(\mathbf{X})$.

Из рис. 1.1 следует:

a) если этот угол (α) острый - проекция положительна и

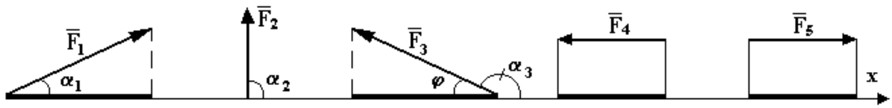
$$\mathbf{F_x = F \cdot \cos\alpha = ab};$$

b) если угол (α_1) тупой - проекция отрицательна и

$$\mathbf{F_x = F \cdot \cos\alpha_1 = -F \cdot \cos\varphi = -ab}.$$

Практика показывает, что угол α может быть (рис. 1.2):

1) $\boldsymbol{\alpha_1^0 < 90^0}$ 2) $\boldsymbol{\alpha_2^0 = 90^0}$ 3) $\boldsymbol{\alpha_3^0 > 90^0}$ 4) $\boldsymbol{\alpha_4^0 = 180^0}$



$\mathbf{F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1}$ $\mathbf{F_{2x} = 0}$ $\mathbf{F_{3x} = -F_3 \cdot \cos\varphi}$ $\mathbf{F_{4x} = -F_4}$

$$F_{5x} = F_5$$

Рис. 1.2

Моментом силы $\overline{\mathbf{F}}$ относительно любой точки **О** называется произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

$$\mathbf{M_0(F) = \pm F \cdot h}$$

Плюс берется, если сила стремится повернуть тело вокруг точки **О** против хода часовой стрелки, минус, - если, - по ходу часовой стрелки.

Плечо $\mathbf{h}$ - кратчайшее расстояние от точки поворота **О** до линии действия силы.

Если линия действия силы пересекает точку О, то ее момент относительно этой точки равен нулю, так как $\mathbf{h = 0}$.

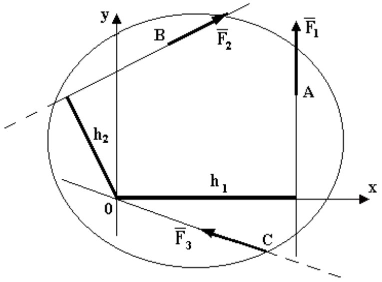


Рис. 1.3

Из рис. 1.3:

$\mathbf{M_0\left(\overline{F}_1\right) = +F_1 \cdot h_1}$, $\mathbf{M_0\left(\overline{F}_2\right) = -F_2 \cdot h_2}$, $\mathbf{M_0\left(\overline{F}_3\right) = 0}$, так как $\mathbf{h_3 = 0}$.

При определении момента силы $\overline{\mathbf{F}}_2$, у студента вызывает трудность вычисление плеча $\mathbf{h_2}$. Поэтому, чтобы упростить эту задачу, надо:

а) разложить силу $\overline{\mathbf{F}}_2$ на ее составляющие $\overline{\mathbf{F}}_x$ и $\overline{\mathbf{F}}_y$ параллельно выбранным осям

$\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$;

б) применить теорему Вариньона (рис. 1.4)

$$\mathbf{M_0\left(\overline{F}\right) = M_0\left(\overline{F}_x\right) + M_0\left(\overline{F}_y\right)}. \qquad (1.5)$$

Момент равнодействующей силы $\left(\overline{\mathbf{F}}\right)$ относительно точки **О** равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил $\left(\overline{\mathbf{F}}_x, \overline{\mathbf{F}}_y\right)$ относительно той же точки **О**.

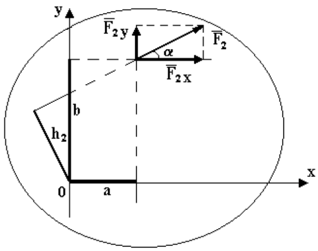


Рис. 1.4

$$M_0\left(\overline{F}_2\right) = -F_{2x} \cdot b + F_{2y} \cdot a \text{ или}$$

$$M_0\left(\overline{F}_2\right) = -F_2 \cdot \cos\alpha \cdot b + F_2 \cdot \sin\alpha \cdot a.$$

Парой сил называют две силы $\overline{F}$ и $\overline{F}'$ равные по величине, противоположно направленные и параллельные между собой (рис. 1.5).

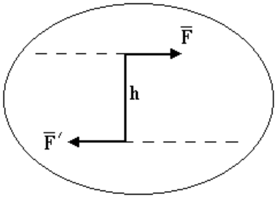


Рис. 1.5

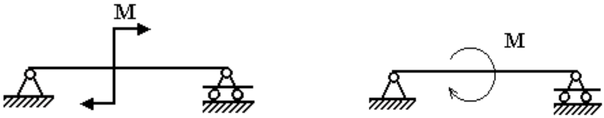
Моментом пары сил называют произведение модуля одной из сил пары на плечо, взятое со знаком плюс или минус, то есть

$$M\left(\overline{F}, \overline{F}'\right) = \pm F \cdot h.$$

Момент пары считается положительным, если пара, в плоскости ее действия, стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если, - по ходу.

Плечо пары h - кратчайшее расстояние между линиями действия пары.

Так как действие пары сил на твердое тело характеризуется (определяется) только моментом, то рис. 1.6a и рис. 1.6b считаются идентичными



(а) (б)

Рис. 1.6

Распределенные силы - система сил распределенных вдоль поверхности по тому или иному закону.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее **интенсивностью q.**

q - значение силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

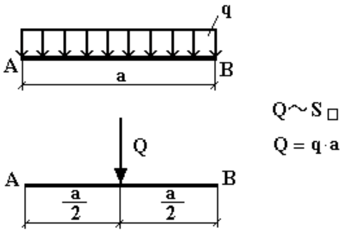
Измеряется **q** в ньютонах, деленных на метр $[\mathbf{q}] = \mathbf{н}/\mathbf{м}$.

При составлении расчетной схемы <u>**распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой**</u> **Q**:

- величина силы **Q** пропорциональна площади эпюры распределения сил;
- направлена сила **Q** параллельно заданной нагрузке в сторону ее действия;
- линия действия силы **Q** проходит через центр тяжести той же эпюры распределения сил.

Силы равномерно распределенные вдоль отрезка прямой АВ (рис. 1.7а) (например, силы тяжести, действующие на однородную балку).

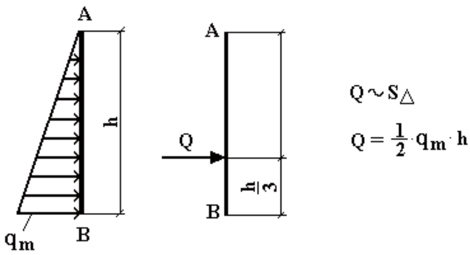
а)



б)

Рис. 1.7

Силы распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 1.8а) (например, силы давления воды на пластину).



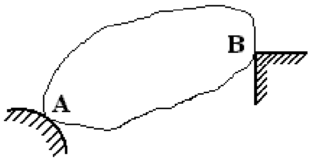
a) b)

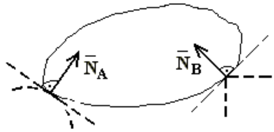
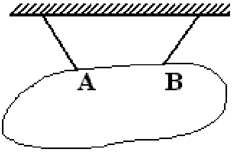
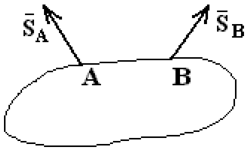
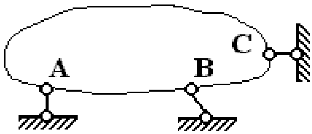
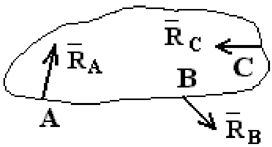
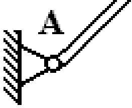
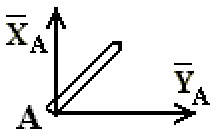
Рис. 1.8

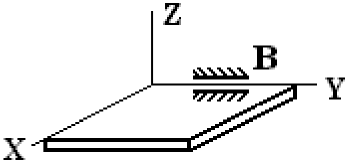
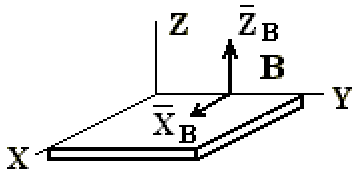
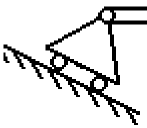
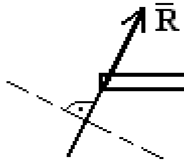
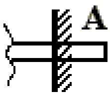
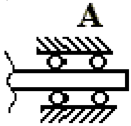
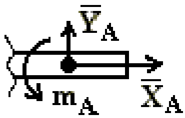
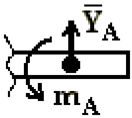
2.1.2. Методические указания к решению задач статики.

Решение задач статики, приведенных в методических указаниях, сводится к определению реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь. А это, в свою очередь, позволит, пользуясь законами сопротивления материалов, рассчитать прочность конструкции или сооружения.

Типы связей. Реакции связей

Наименование связей и их обозначение на схемах	**Реакции связей**
1. Гладкая поверхность (точка А) и уступ (точка В) 	Реакция $\overline{N}$ направлена к телу. Реакция $\overline{N_A}$ гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Реакция $\overline{N_B}$ уступа направлена по нормали к поверхности опирающегося тела.

	
2. Нить 	Реакция $\bar{S}$ направлена вдоль нити от тела (нить работает только на растяжение) 
3. Невесомый стержень с шарнирами на концах 	Реакция $\bar{R}$ направлена вдоль стержня, стержень работает либо на растяжение, либо на сжатие. 
4. Цилиндрический шарнир (подшипник) А – ось подшипника перпендикулярна чертежу 	Составляющие реакции лежат в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. 

 В – ось подшипника совпадает с осью Y	
5. Подвижная шарнирная опора (на катках) 	Реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости 
6. Заделка а) жесткая  б) скользящая 	Реакции при действии на тело плоской системы сил а) жесткая  в)скользяща я 

2.1.3. Порядок (план) решения задач.

Приступая к решению задания, необходимо разобраться в условии задачи и рисунке, а затем:

1. Составить расчетную схему, которая включает:

- объект равновесия,
- активные (заданные) силы,
- силы реакции, заменяющие действия отброшенных связей.

2. Определить вид полученной системы сил и выбрать, соответствующие ей, уравнения равновесия;
3. Выяснить, является ли задача статически определимой;

4. Составить уравнения равновесия и определить из них силы реакции;

5. Сделать проверку полученных результатов.

При замене связей (опор) силами реакций помнить:

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;
- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Решение уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое из них. Поэтому, при составлении уравнений равновесия следует:

1) координатные оси $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ располагать так, чтобы одна из осей была перпендикулярна к линии действия хотя бы одной из неизвестных сил, в этом случае проекция неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) за центр моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила $\overline{\mathbf{F}}$ в плоскости $\mathbf{XY}$ имеет две составляющие ее силы $\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}}$, то при вычислении момента силы $\overline{\mathbf{F}}$ вокруг некоторой точки **O**, полезно применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки (см. рис. 1.4).

Если к телу в числе других сил приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил, куда вносится момент этой пары, с соответствующим, знаком.

2.1.4. Примеры выполнения заданий
Часть 1 «Статика»

Задание С1.

Определить реакции опор горизонтальной балки от заданной нагрузки.

Дано:

Схема балки (рис.1.9).

$$P = 20кН,\quad G = 10кН,\quad M = 4кН \cdot м,\quad q = 2\,{}^{кН}\!/_{м},$$

$$a = 2м,\ b = 3м,\ \alpha^0 = 30^0.$$

Определить реакции опор в точках **A** и **B**.

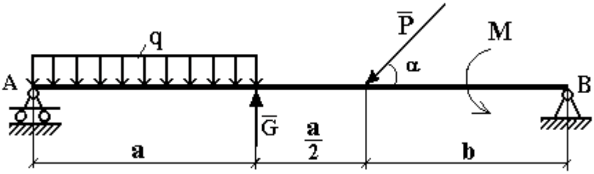


Рис. 1.9

Решение:

Рассмотрим равновесие балки **AB** (рис. 1.10).

К балке приложена уравновешенная система сил, состоящая из активных сил и сил реакции.

Активные (заданные) силы:

$\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{G}}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, пара сил с моментом **M**, где

$\overline{\mathbf{Q}}$ - сосредоточенная сила, заменяющая действие распределенной вдоль отрезка AC нагрузки интенсивностью $\mathbf{q}$.

Величина

$$\mathbf{Q = q \cdot AC = q \cdot a = 2 \cdot 2 \frac{кН}{м} \cdot м = 4кН}.$$

Линия действия силы $\overline{\mathbf{Q}}$ проходит через середину отрезка AC.

Силы реакции (неизвестные силы):

$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}$.

$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}}$ - заменяет действие отброшенного подвижного шарнира (опора A).

Реакция $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}}$ перпендикулярна поверхности, на которую опираются катки подвижного шарнира.

$\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}$ - заменяют действие отброшенного неподвижного шарнира (опора B).

$\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}$ - составляющие реакции $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}$, направление которой заранее неизвестно.

Расчетная схема

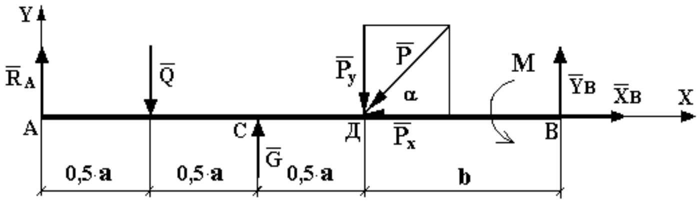


Рис. 1.10

Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0,\ \sum F_{KY} = 0,\ \sum M_0\left(\overline{F}_K\right) = 0.$$

Задача является статически определимой, так как число неизвестных сил ($\overline{R}_A, \overline{X}_B,\ \overline{Y}_B$) - три - равно числу уравнений равновесия.

Поместим систему координат **XY** в точку А, ось **AX** направим вдоль балки. За центр моментов всех сил выберем точку В.

Составим уравнения равновесия:

1) $\sum F_{KX} = 0 \rightarrow X_B - P\cdot\cos\alpha = 0$;

2) $\sum F_{KY} = 0 \rightarrow R_A - Q + G - P\cdot\sin\alpha + Y_B = 0;$;

3)
$$\sum M_B\left(\overline{F}_K\right) = 0 \rightarrow M + P\cdot\sin\alpha\cdot b - G\cdot(b + 0{,}5\cdot a) + Q\cdot(a+b) - R_A\cdot(1{,}5\cdot a + b) = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем $\overline{R}_A,\ \overline{X}_B,\ \overline{Y}_B$.

1 →
$$X_B = P\cdot\cos\alpha = 20\cdot\cos 30^0 \approx 20\cdot 0{,}866 = 17{,}32\text{кН}.$$

3 →
$$R_A = \frac{1}{(1{,}5\cdot a + b)}\left[M + P\cdot\sin\alpha\cdot b - G\cdot(b + 0{,}5\cdot a) + Q\cdot(a+b)\right] =$$

$$= \frac{1}{1{,}5\cdot 2}\cdot\left[4 + 20\cdot\sin 30\cdot 3 - 10\cdot(3+1) + 4\cdot(2+3)\right] = \frac{1}{6}\cdot\left[4 + 30 - 40 + 20\right] =$$

$$= \frac{14}{6} \approx 2{,}333\text{кН}.$$

$2 \rightarrow \quad Y_B = Q - G + P \cdot \sin\alpha - R_A = 4 - 10 + 20 \cdot \sin 30^0 - 2{,}333 = 4 - 2{,}333 = 1{,}667 кН.$

Определив $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, найдем величину силы реакции неподвижного шарнира

$$R_B = \sqrt{X_B{}^2 + Y_B{}^2} = \sqrt{17{,}32^2 + 1{,}667^2} = \sqrt{299{,}9824 + 2{,}778889} \approx 17{,}4 кН.$$

В целях проверки составим уравнение

$$\sum M_{Ђ}\left(\overline{F}_K\right) = -R_A \cdot 1{,}5 \cdot \text{€} + Q \cdot a - G \cdot 0{,}5 \cdot \text{€} + M + Y_B \cdot b.$$

Если в результате подстановки в правую часть этого равенства данных задачи и найденных сил реакций получим нуль, то задача решена - верно.

$$\sum M_Д\left(\overline{F}_K\right) = -2{,}333 \cdot 1{,}5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + 4 + 1{,}667 \cdot 3 = -6{,}999 + 8 - 10 + 4 + 5{,}001 =$$
$$= 17{,}001 - 16{,}999 = 0{,}002 \approx 0.$$

Реакции найдены верно. Неточность объясняется округлением при вычислении R_A.

Ответ: $R_A = 2{,}333 кН.$

$R_B = 17{,}4 кН.$

Задание С2.

Для заданной плоской рамы определить реакции опор.

Дано:

Схема рамы рис. 1.11

$P = 20 кН$, $G = 10 кН$, $M = 4 кН \cdot м$, $q = 2 \, ^{кН}\!/_{м}$,

$a = 2 м$, $b = 3 м$, $\alpha^0 = 30^0$.

Определить реакции опор рамы.

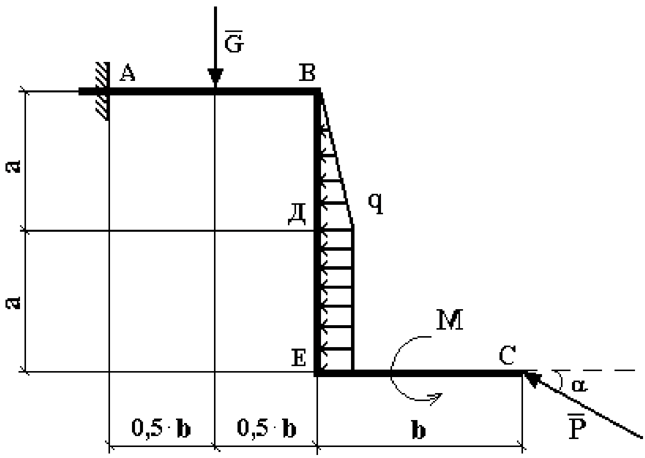


Рис. 1.11

Решение:

Рассмотрим равновесие жесткой рамы ABEC (рис. 1.12).

<u>**Расчетная схема**</u>

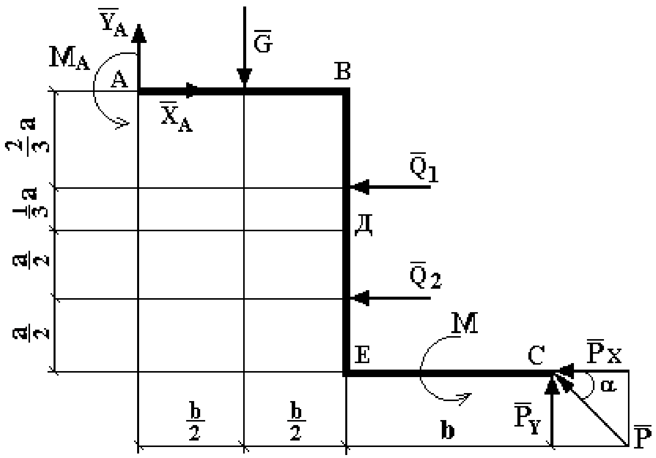


Рис. 1.12

Система сил приложенных к раме состоит из активных сил и сил реакций.

<u>Активные силы:</u>

$\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{G}}$, пара сил с моментом $\mathbf{M}$, $\overline{\mathbf{Q}}_1$, $\overline{\mathbf{Q}}_2$.

$\overline{\mathbf{Q}}_1$, $\overline{\mathbf{Q}}_2$ заменяют действие распределенной нагрузки на отрезках ВД и ДЕ.

$$\mathbf{Q_1 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot ВД = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2кН.}$$

Линия действия силы $\overline{\mathbf{Q}}_1$ проходит на расстоянии $\mathbf{\frac{2}{3} \cdot a}$ от точки В.

$$\mathbf{Q_2 = q \cdot ДЕ = q \cdot a = 4кН.}$$

Линия действия силы $\overline{\mathbf{Q}}_2$ проходит через середину отрезка ДЕ.

<u>Силы реакции:</u>

$\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{A}$, $\mathbf{M_A}$ - заменяют действие жесткого защемления, которое ограничивает любое перемещение рамы в плоскости чертежа.

К раме приложена плоская произвольная система сил. Для нее можем составить три уравнения равновесия:

$$\mathbf{\sum F_{KX} = 0,\ \sum F_{KY} = 0,\ \sum M_0\left(\overline{F}_{KX}\right) = 0.}$$

Задача является статистически определимой, так как число неизвестных тоже три - $\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{A}$, $\mathbf{M_A}$.

Составим уравнения равновесия, выбрав за центр моментов точку А, так как ее пересекают наибольшее число неизвестных сил.

1) $\mathbf{\sum F_{KX} = 0 \to X_A - Q_1 - Q_2 - P \cdot \cos\alpha = 0;}$

2) $\mathbf{\sum F_{KY} = 0 \to Y_A - G + P \cdot \sin\alpha = 0;}$

3)
$$\sum M_A\left(\overline{F}_K\right) = 0 \to M_A - G \cdot 0{,}5 \cdot b - Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a - Q_2 \cdot 1{,}5 \cdot a + M + P \cdot \sin\alpha \cdot 2b -$$
$$- P \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot a = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем $\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Y_A}$, $\mathbf{M_A}$.

1 → $\mathbf{X_A = Q_1 + Q_2 + P \cdot \cos\alpha = 2 + 4 + 20 \cdot \cos 30^0 = 6 + 20 \cdot 0{,}866 = 23{,}32кН;}$

2 → $\mathbf{Y_A = G + P \cdot \sin\alpha = 10 - 20 \cdot \sin 30^0 = 10 - 10 = 0;}$

3 →
$$M_A = G\cdot 0{,}5\cdot b + Q_1\cdot\frac{2}{3}\cdot a + Q_2\cdot 1{,}5\cdot a - M - P\cdot\sin\alpha\cdot 2b + P\cdot\cos\alpha\cdot 2\cdot a = 10\cdot 0{,}5\cdot 3 +$$
$$+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + 4\cdot 1{,}5\cdot 2 - 4 - 20\cdot\sin 30^0\cdot 6 + 20\cdot\cos 30^0\cdot 2\cdot 2 = 15 + \frac{8}{3} + 12 - 4 - 60 +$$
$$+80\cdot 0{,}866 = 34{,}947\,кН\cdot м.$$

Для проверки полученных результатов составим уравнение моментов вокруг точки С.

$$\sum M_C\left(\overline{F}_K\right) = M + Q_2\cdot\frac{a}{2} + Q_1\cdot\left(a + \frac{1}{3}\cdot a\right) + G\cdot 1{,}5\cdot b - X_A\cdot 2\cdot a - Y_A\cdot 2\cdot b + M_A.$$

Подставляя все значения, получим

$$\sum M_C\left(\overline{F}_K\right) = 4 + 4\cdot\frac{2}{2} + 2\cdot\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 2\right) + 10\cdot 4{,}5 - 23{,}32\cdot 2\cdot 2 - 0 + 34{,}947 = 4 + 4 + 5{,}333 +$$
$$+45 - 93{,}28 + 34{,}947 = 93{,}28 - 93{,}28 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Ответ:

$$\left.\begin{array}{l} X_A = 23{,}32кН \\ Y_A = 0 \end{array}\right\} \to R_A = X_A = 23{,}32кН.$$
$$M_A = 34{,}947кН\cdot м.$$

Задание С3.

Для заданной конструкции, состоящей из двух ломанных стержней, определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С.

Дано:

Схема конструкции (рис. 1.13.

$$P = 20кН,\quad G = 10кН,\quad M = 4кН\cdot м,\quad q = 2\,кН/м,$$
$$a = 2м,\ b = 3м,\ \alpha^0 = 30^0.$$

Определить реакции опор в точках А и В и давление в промежуточном шарнире С.

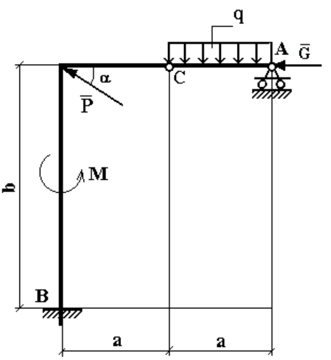


Рис. 1.13

Решение:

Рассмотрим равновесие всей конструкции (рис. 1.14).

К ней приложены: **активные силы** $\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{Q}},$ пара сил с моментом М, где $\mathbf{Q = q \cdot a = 2 \cdot 2 = 4кН;}$

силы реакции: $\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{B}$, $\mathbf{M}_\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{A}$,

$\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{B}$, $\mathbf{M}_\mathbf{B}$ - заменяют действие жесткого защемления;

$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{A}$ - заменяет действие шарнирно-подвижной опоры А.

Расчетная схема

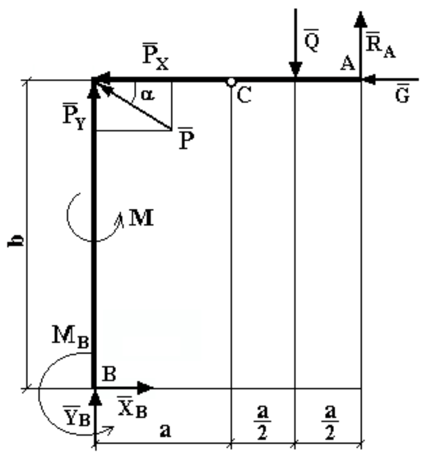


Рис. 1.14

Для полученной плоской произвольной системы сил можем составить три уравнения равновесия, а число неизвестных - четыре - $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, M_B, $\overline{R}_A$.

Чтобы задача стала статически определимой, конструкцию расчленяем по внутренней связи - шарниру С и получаем еще две расчетные схемы (рис. 1.15, рис. 1.16).

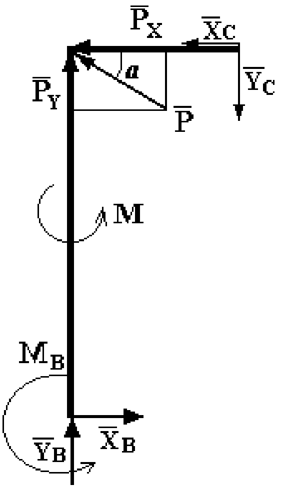


Рис.1.15

Рис.1.16

$\overline{X}_C, \overline{Y}_C$ заменяют действие тела АС на тело СВ, которое передается через шарнир С. Тело СВ передает свое действие на тело АС через тот же шарнир С, поэтому

$$\overline{\mathbf{X}}'_{\mathbf{C}} = -\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{C}},\ \overline{\mathbf{Y}}'_{\mathbf{C}} = -\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{C}};\ \mathbf{X}_{\mathbf{C}} = \mathbf{X}'_{\mathbf{C}},\ \mathbf{Y}_{\mathbf{C}} = \mathbf{Y}'_{\mathbf{C}}.$$

Для трех расчетных схем в сумме можем составить девять уравнений равновесия, а число неизвестных - шесть - $\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{B}}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{C}}$, то есть задача стала статически определима. Для решения задачи используем рис. 2.7, 2.8, а рис. 2.6 оставим для проверки.

<u>Тело BC (рис. 1.15)</u>

1) $\sum \mathbf{F}_{\mathbf{KX}} = -\mathbf{X}_{\mathbf{C}} + \mathbf{X}_{\mathbf{B}} - \mathbf{P} \cdot \cos\alpha = \mathbf{0};$

2) $\sum \mathbf{F}_{\mathbf{KY}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{B}} + \mathbf{P} \cdot \sin\alpha - \mathbf{Y}_{\mathbf{C}} = \mathbf{0};$

3) $\sum \mathbf{M}_{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{K}}\right) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}} + \mathbf{M} + \mathbf{P} \cdot \cos\alpha \cdot \mathbf{b} + \mathbf{X}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{Y}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0};$

<u>Тело CA (рис. 1.16)</u>

4) $\sum \mathbf{M}_{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{K}}\right) = -\mathbf{Q} \cdot \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} + \mathbf{R}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0};$

5) $\sum \mathbf{M}_{\mathbf{A}}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{K}}\right) = -\mathbf{Y}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{Q} \cdot \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0};$

6) $\sum \mathbf{F}_{\mathbf{KX}} = \mathbf{X}_{\mathbf{C}} - \mathbf{G} = \mathbf{0};$

Решаем систему шести уравнений с шестью неизвестными.

6 → $\mathbf{X}_{\mathbf{C}} = \mathbf{G} \to \mathbf{X}_{\mathbf{C}} = \mathbf{10}$**кН,**

5 → $\mathbf{Y}_{\mathbf{C}} = \dfrac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$**кН,**

4 → $\mathbf{R}_{\mathbf{A}} = \dfrac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$**кН.**

1 → $\mathbf{X}_{\mathbf{B}} = \mathbf{X}_{\mathbf{C}} + \mathbf{P} \cdot \cos\alpha = \mathbf{10} + \mathbf{20} \cdot \cos \mathbf{30}^{\mathbf{0}} \approx \mathbf{10} + \mathbf{20} \cdot \mathbf{0{,}866} = \mathbf{27{,}32}$**кН.**

2 → $\mathbf{Y}_{\mathbf{B}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{C}} + \mathbf{P} \cdot \sin\alpha = \mathbf{2} - \mathbf{20} \cdot \sin \mathbf{30}^{\mathbf{0}} \approx \mathbf{2} - \mathbf{10} = -\mathbf{8}$**кН.**

3 $$M_B = Y_C \cdot a - X_C \cdot b - P \cdot \cos\alpha \cdot b - M = 2 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 20 \cdot \cos 30^0 \cdot 3 - 4 =$$

$$= 4 - 30 - 51{,}96 - 4 = -81{,}96 кН \cdot м$$

<u>Проверка:</u>

$$\sum M_C(\overline{F}_K) = X_B \cdot b - Y_B \cdot a + M_B + M - P \cdot \sin\alpha \cdot a - Q \cdot \frac{a}{2} + R_B \cdot a = 27{,}32 \cdot 3 + 8 \cdot 2 - 81{,}96 +$$

$$+ 4 - 20 \cdot \sin 30^0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot 2 = 81{,}96 + 16 - 81{,}96 + 4 - 20 - 4 + 4 = 105{,}96 - 105{,}96 = 0.$$

Реакции внешних опор в точках A и B найдены верно. Давление в шарнире C вычисляем по формуле

$$N_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{104} \approx 10{,}2кН.$$

<u>Ответ:</u>

$X_B = 27{,}32кН$,

$Y_B = -8кН$,

$M_B = -81{,}96кН \cdot м$,

$R_A = 2кН$,

$X_C = 10кН$,

$Y_C = 2кН$.

Минусы означают, что направления $\overline{Y}_B$ и M_B надо изменить на противоположные.

2.1.5. Задания для контрольной работы
Часть 1 « Статика»

<u>Выбор варианта.</u> **Вариант каждой задачи и числовые данные к ней студент выбирает в соответствии со своим номером в журнале: номер варианта схемы определятся по номеру, а числовые данные по последней цифре номера.**

Таблица 1

Исходные данные

Вариант	Нагрузка				Размеры		Углы	
	P кН	**G** кН	**q** кН/м	**M** кН* м	**a** м	**b** м	**α** градус	**β** градус
1	10	8	1,2	12	2	3	30	60
2	15	6	1,0	8	3	2	60	30
3	20	4	0,6	6	2,5	1,5	45	30
4	25	2	0,4	4	1,5	2,5	45	60
5	6	24	2,0	10	3,2	2,4	60	45
6	12	18	0,8	6	3,0	2,2	30	45
7	10	8	1	25	2	1	30	60
8	15	5	0,5	10	1	2	45	45
9	8	12	1,0	2	2,4	3,0	30	30
10	10	6	0,6	14	2,6	1,4	60	60

Примечание:

$\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{G}}$ - сосредоточенные силы; $\mathbf{M}$ - момент пары сил; $\mathbf{q}$ - интенсивность нагрузки, распределенной вдоль отрезка.

Задание С1.

Определить реакции опор горизонтальной балки от заданной нагрузки. Схемы балок показаны на рис 1.17. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 1.

Задание С2.

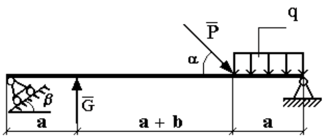
Для заданной плоской рамы определить реакции опор. Схемы рам показаны на рис. 1.18; исходные данные приведены в табл. 1

Задание С3.

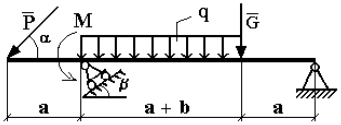
Для заданной конструкции, состоящей из двух ломаных стержней, определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С.

Схемы конструкций показаны на рис. 1.19; исходные данные приведены в табл.1.

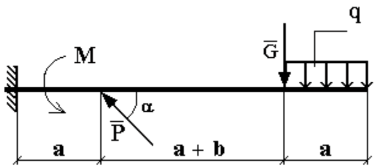
Задание С1



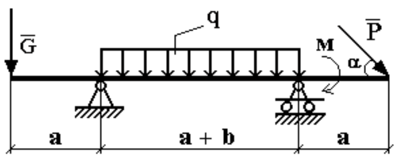
1



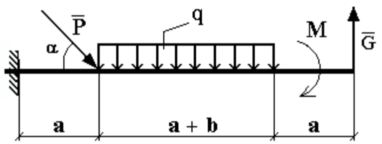
2



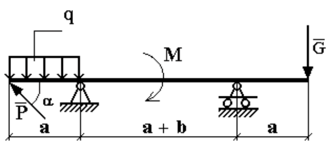
3



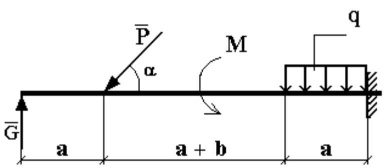
4



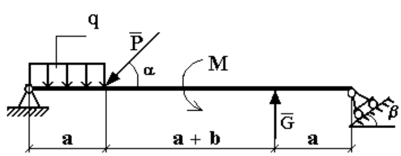
5



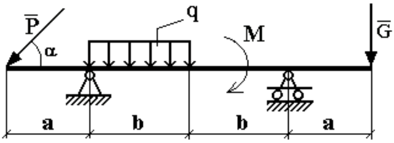
6



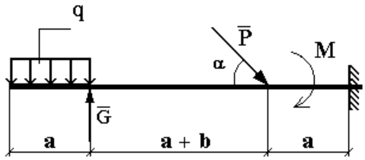
7



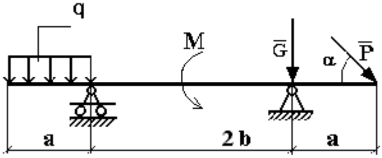
8



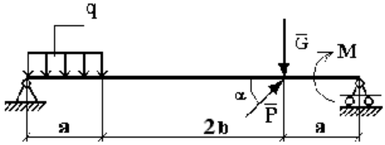
9



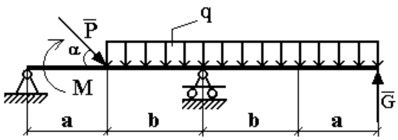
10



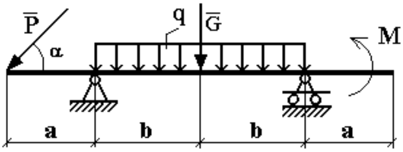
11



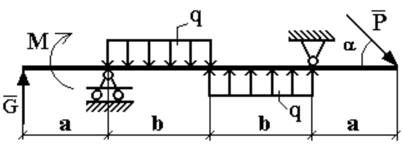
12



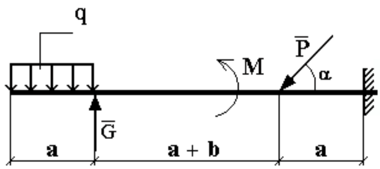
13



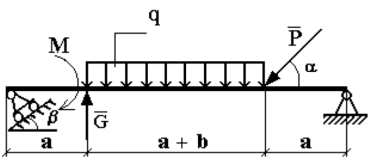
14



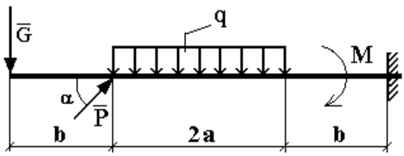
15



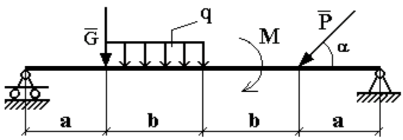
16



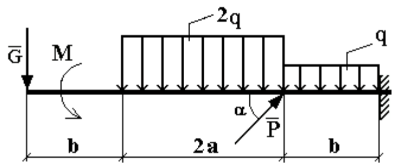
17



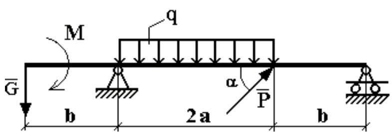
18



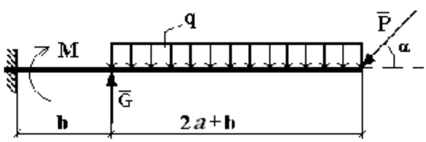
19



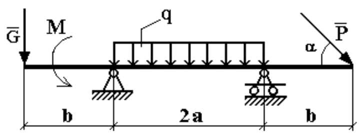
20



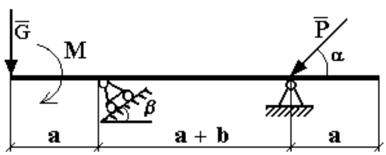
21



22



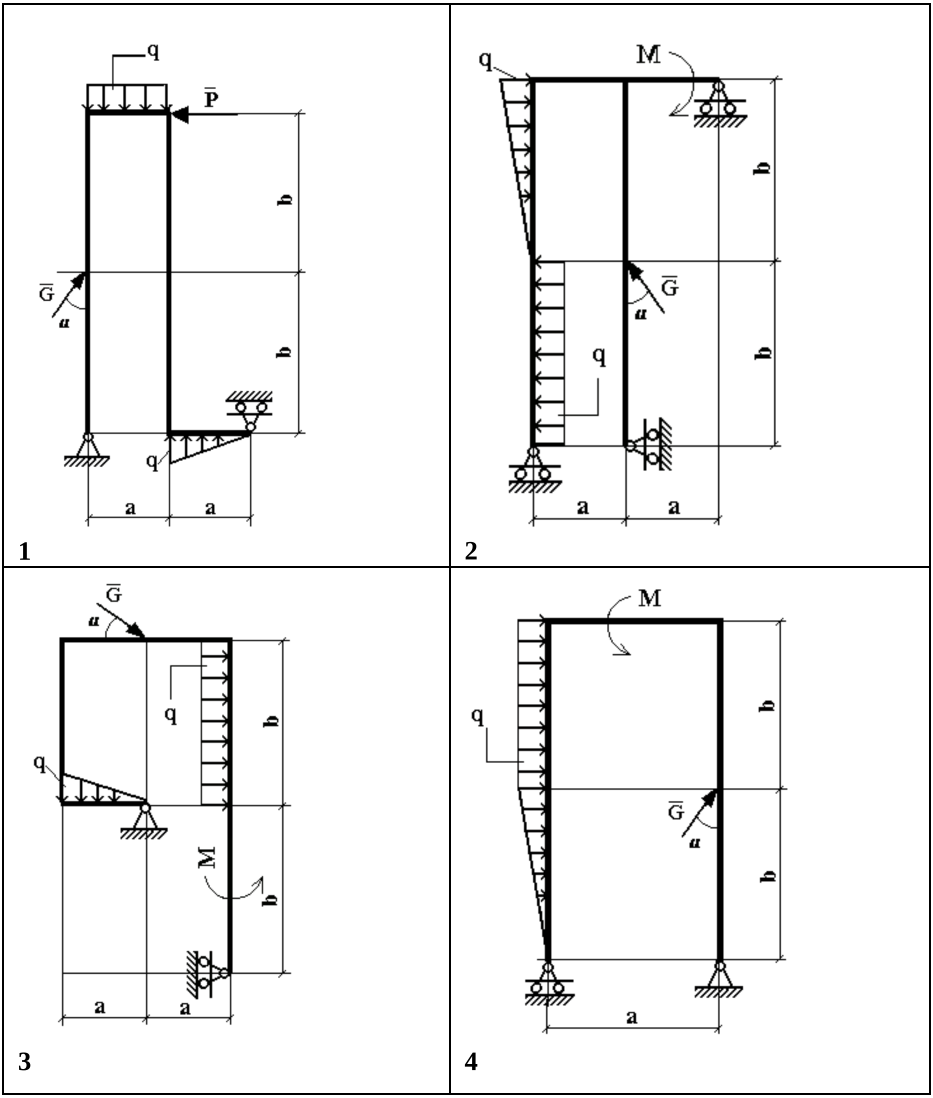
23

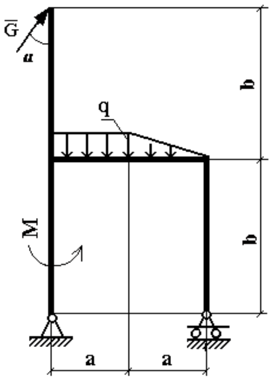


24

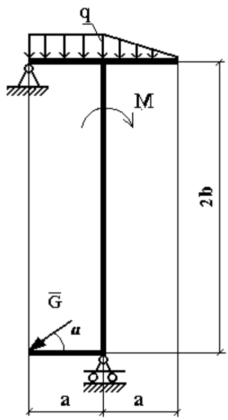
Рис. 1.17

Задание С2.

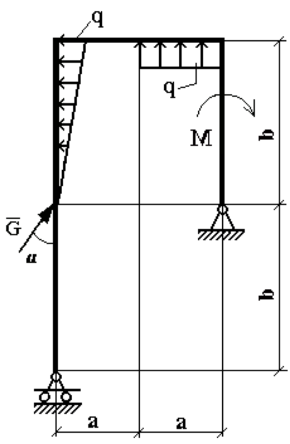



$\overline{G}$
α
q
M
b
b
a
a

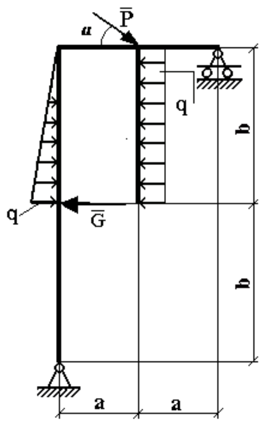
5


q
M
2b
$\overline{G}$
α
a
a

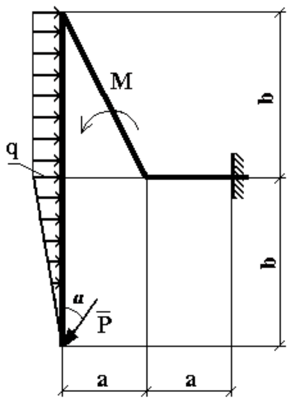
6


q
q
M
b
$\overline{G}$
α
b
a
a

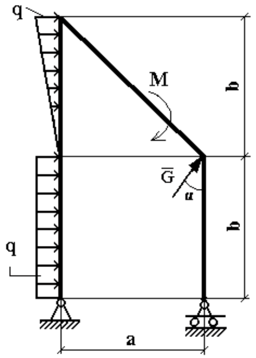
7


α
$\overline{P}$
q
b
q
$\overline{G}$
b
a
a

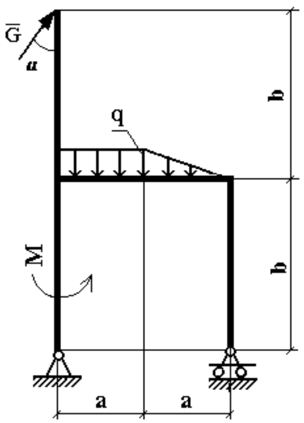
8



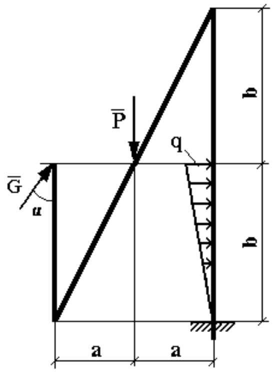
9



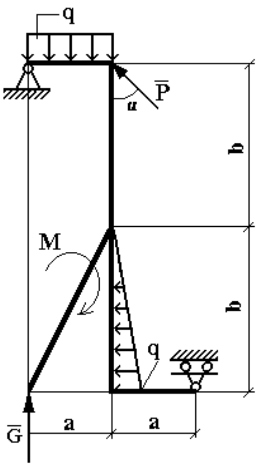
10



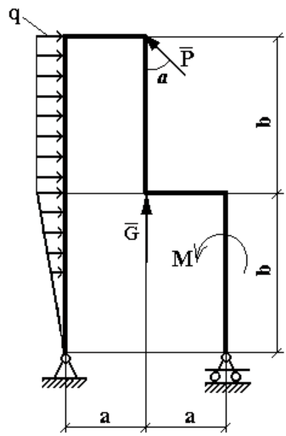
11



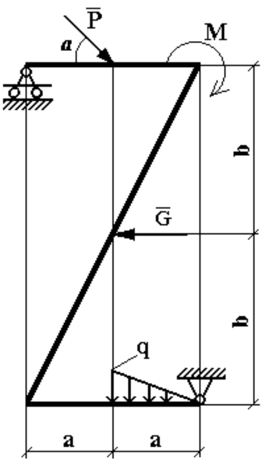
12


q
$\overline{P}$
α
b
M
b
q
$\overline{G}$
a
a

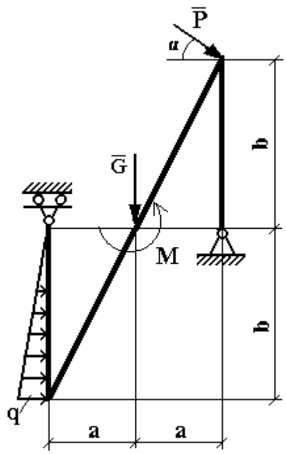
13


q
$\overline{P}$
α
b
$\overline{G}$
M
b
a
a

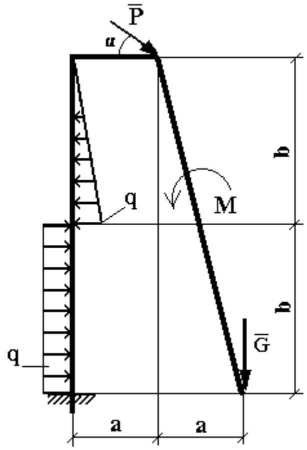
14


$\overline{P}$
α
M
b
$\overline{G}$
q
b
a
a

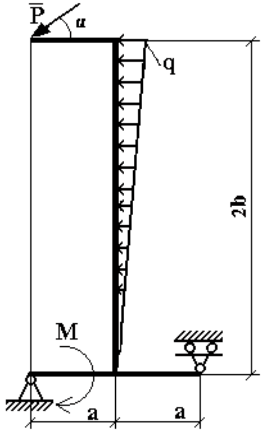
15


$\overline{P}$
α
b
$\overline{G}$
M
b
q
a
a

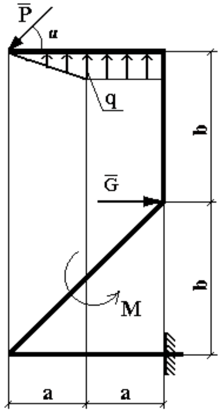
16



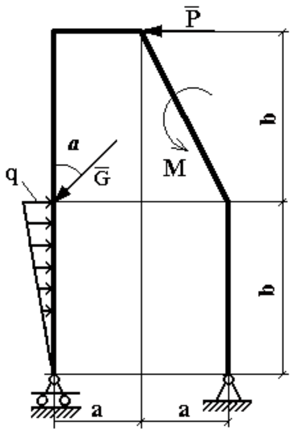
17



18



19



20

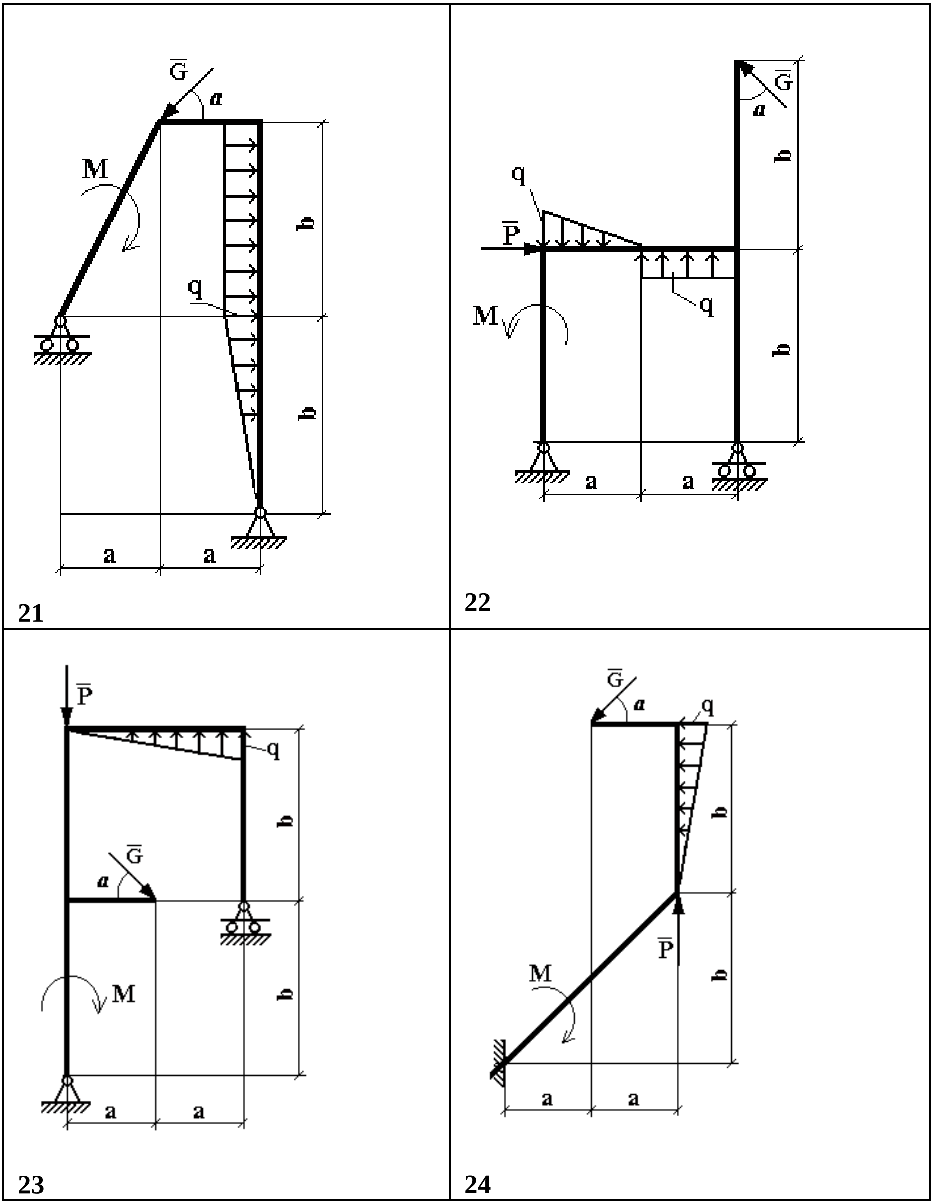
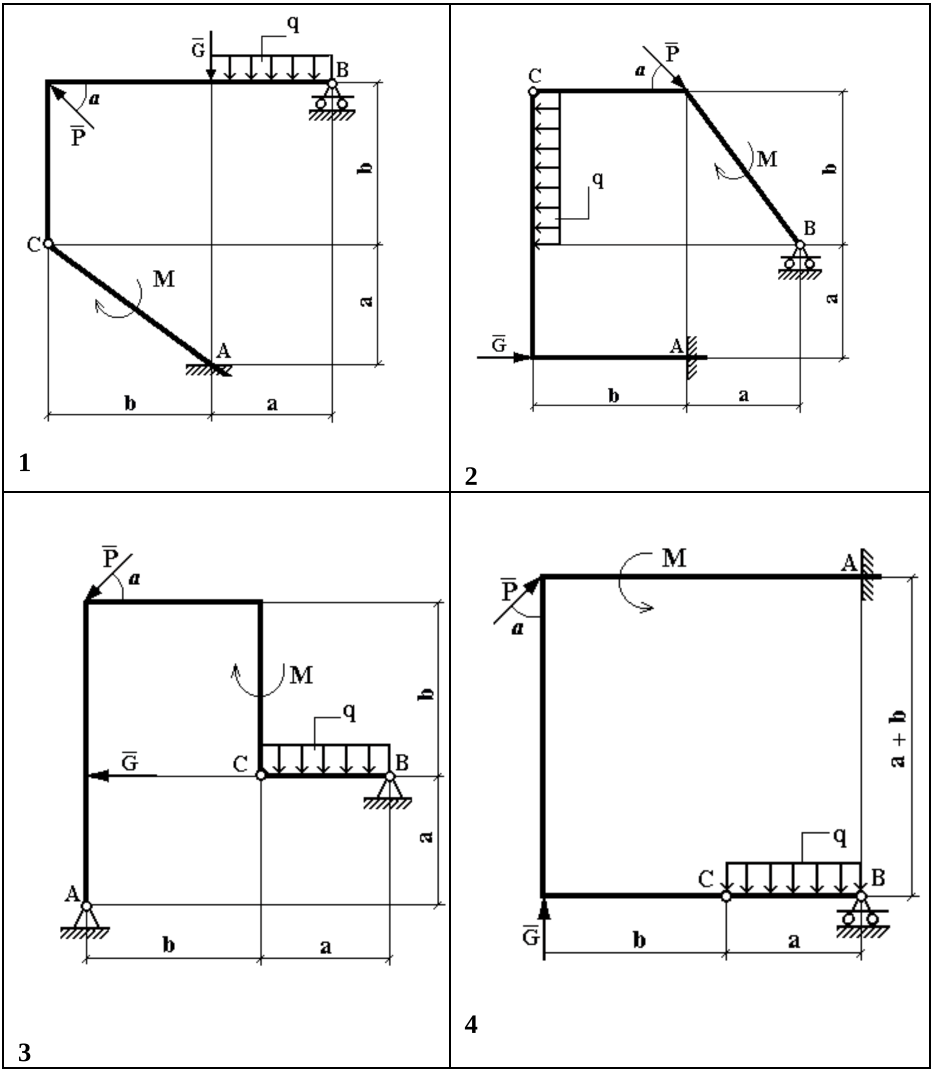
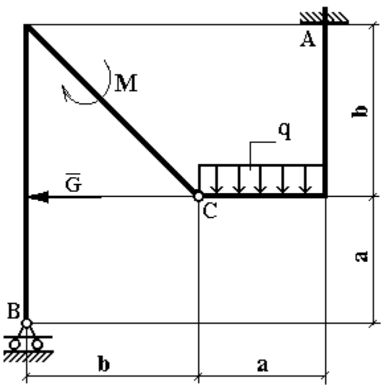


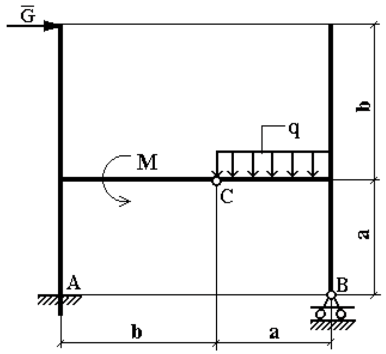
Рис. 1.18

Задание С3.

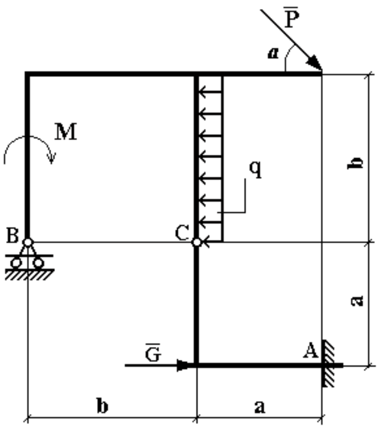

q
G
B
a
P
b
C
M
a
A
b
a
1
P
a
C
M
b
q
B
a
G
A
b
a
2
P
a
M
b
q
G
C
B
a
A
b
a
3
M
A
P
a
a + b
q
C
B
G
b
a
4



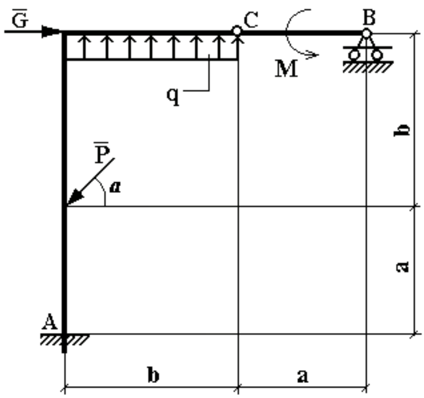
5



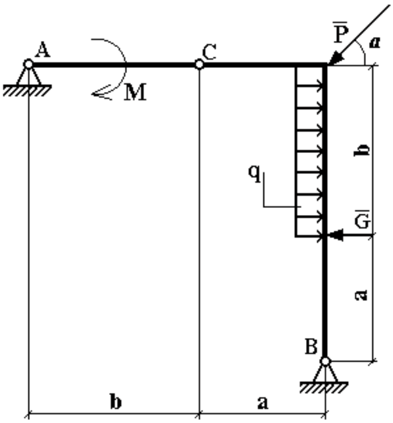
6



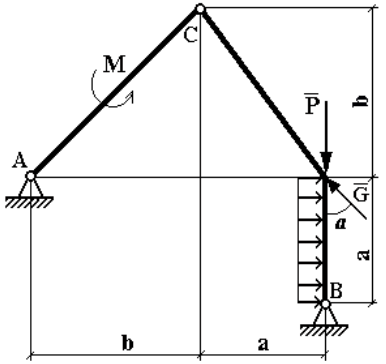
7



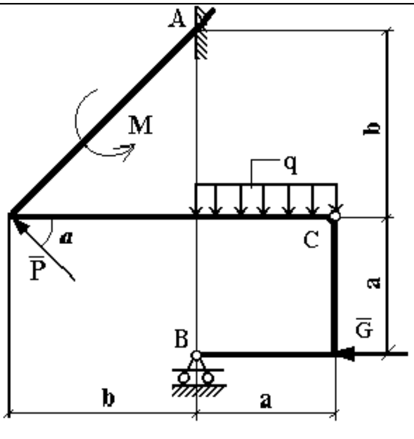
8



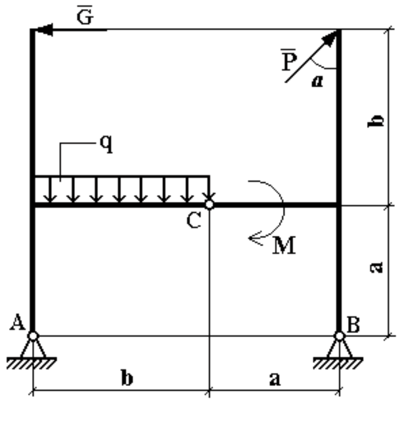
9



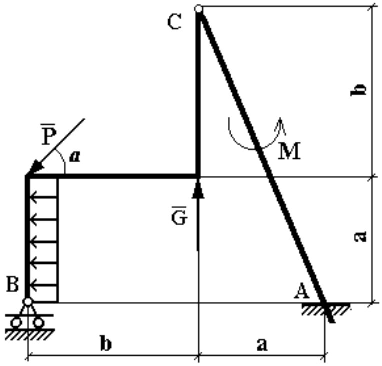
10



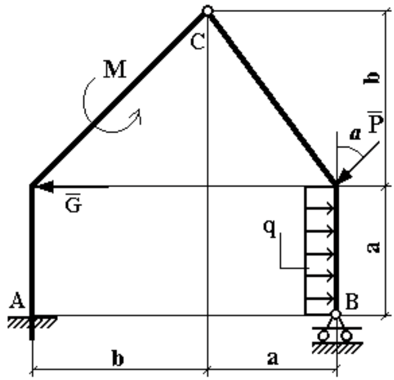
11



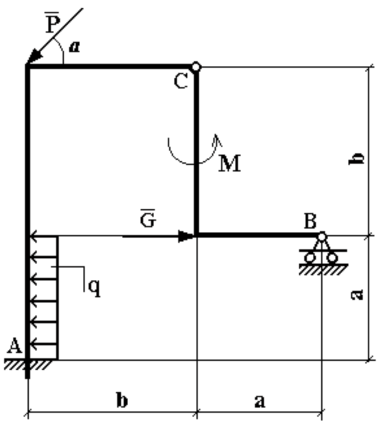
12



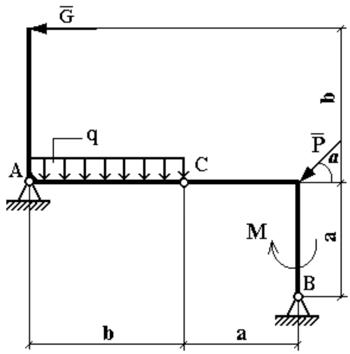
13



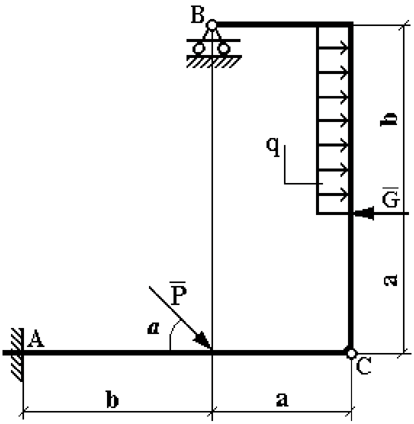
14



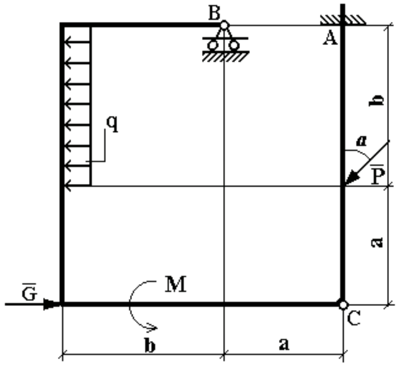
15



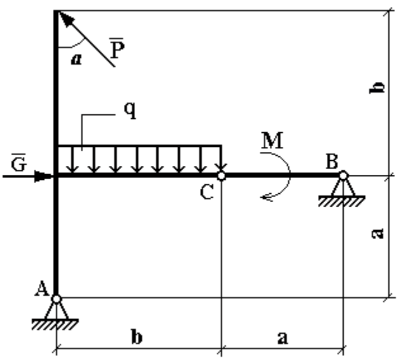
16


B
q
b
$\overline{G}$
$\overline{P}$
a
α
A
C
b
a

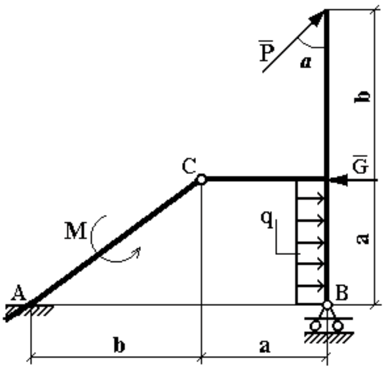
17


B
A
b
q
α
$\overline{P}$
a
$\overline{G}$
M
C
b
a

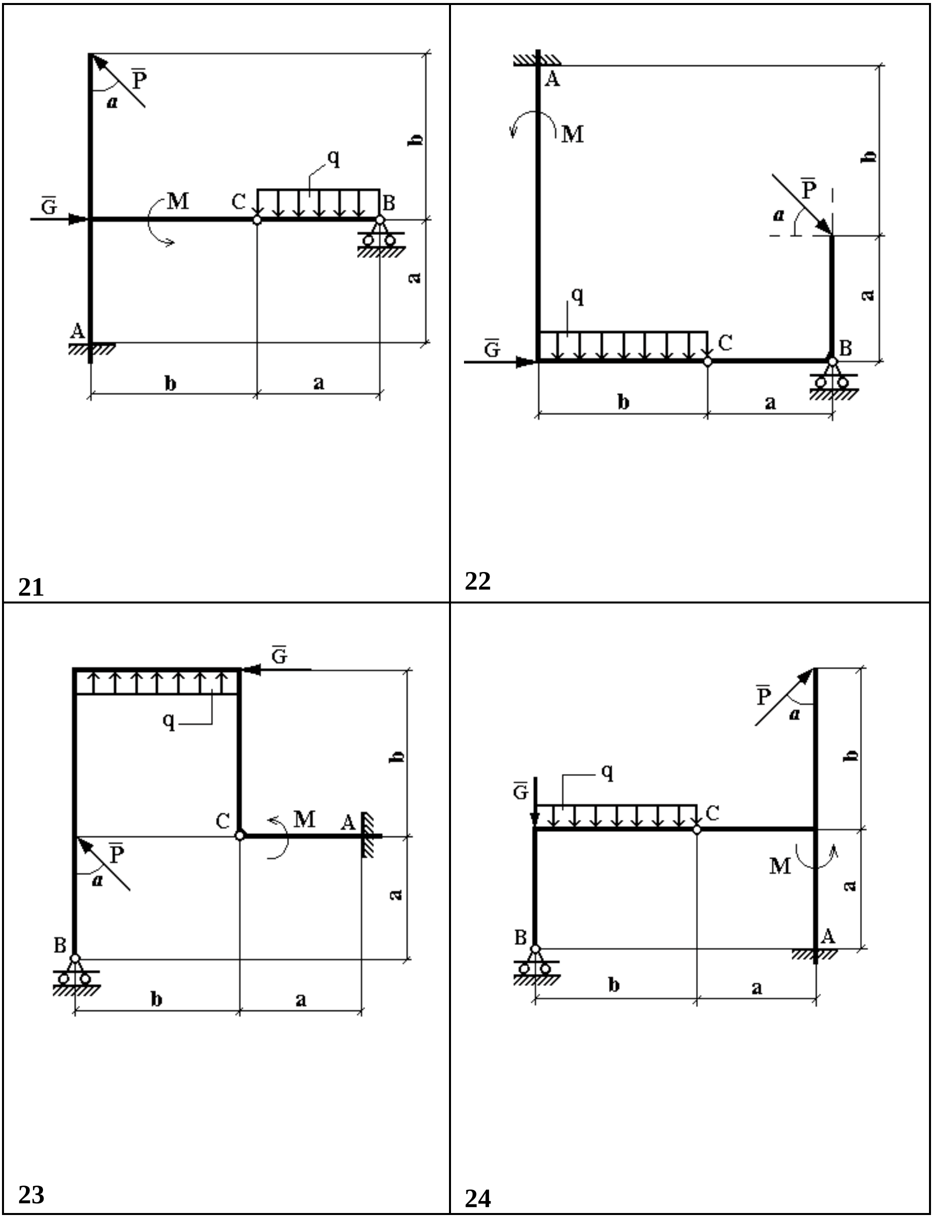
18


$\overline{P}$
α
b
q
M
$\overline{G}$
B
C
a
A
b
a

19


$\overline{P}$
α
b
C
$\overline{G}$
q
M
a
A
B
b
a

20



$\overline{P}$
a
b
$\overline{G}$
M
C
q
B
A
b
a
21
A
M
b
$\overline{P}$
a
q
C
$\overline{G}$
B
b
a
22
$\overline{G}$
q
b
C
M
A
$\overline{P}$
a
B
b
a
23
$\overline{P}$
a
b
q
$\overline{G}$
C
M
a
B
A
b
a
24

Рис. 1.19

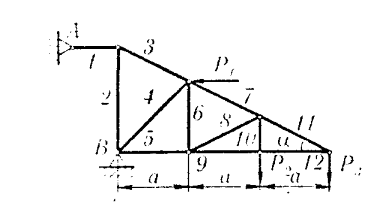
Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

Определить реакции опор фермы на заданную нагрузку, а также силы во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Схемы ферм показаны на рис. 7—9. Необходимые для расчета данные приведены в табл.2

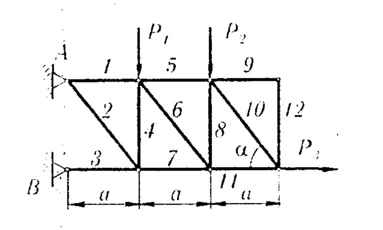
Таблица 2

Номер варианта (рис. 7–9)	P_1	P_2	P_3	a	h	α, град	Номера стержней
	кН			м			
1	4	9	2	2,0	–	30	3, 8, 9
2	10	3	4	2,5	–	60	2, 5, 7
3	2	12	6	3,0	–	60	4, 5, 10
4	10	10	5	4,0	–	60	5, 6, 11
5	2	4	2	–	2,0	60	4, 5, 10
6	3	7	5	4,0	3,0	–	8, 9, 11
7	4	6	3	4,0	–	60	4, 6, 12
8	5	7	7	3,2	–	45	3, 4, 5
9	10	8	2	5,0	–	60	6, 7, 12
10	3	4	5	4,4	3,3	–	3, 5, 7
11	2	6	8	2,5	3,0	–	2, 7, 8
12	5	7	2	4,0	–	60	4, 5, 10
13	4	6	2	4,8	3,6	–	4, 5, 10
14	3	5	5	3,0	–	60	5, 6, 8
15	2	2	10	4,0	6,0	–	2, 6, 9
16	5	6	2	5,0	–	60	3, 5, 6
17	4	4	10	4,0	6,0	–	4, 7, 8
18	5	2	8	–	5,0	60	1, 4, 8
19	8	4	10	5,0	10,0	60	4, 5, 7
20	2	3	5	4,0	6,0	–	5, 6, 8
21	3	2	7	6,0	–	45	5, 8, 9
22	4	2	9	4,0	–	45	2, 6, 8
23	5	8	8	4,0	9,0	30	4, 7, 9
24	6	10	2	3,6	–	45	4, 5, 10
25	7	10	5	4,4	3,3	–	8, 10, 11
26	8	12	2	4,0	–	30	4, 5, 9
27	9	4	4	4,0	3,0	–	5, 9, 11
28	10	5	3	5,0	–	30	3, 5, 6
29	12	8	2	6,0	–	45	5, 6, 11
30	5	10	4	4,0	2,0	–	6, 7, 12

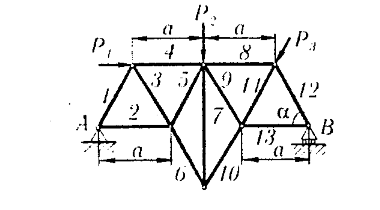
1



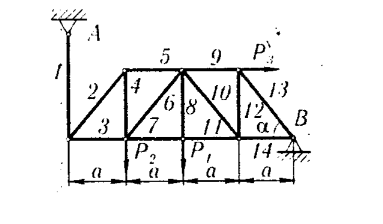
2



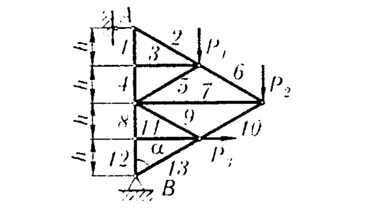
3



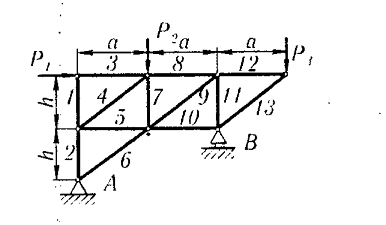
4



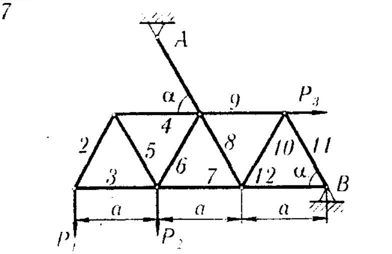
5



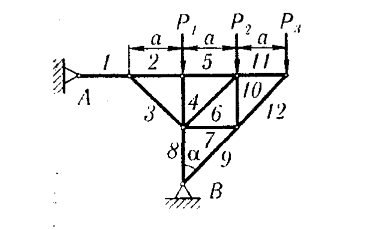
6



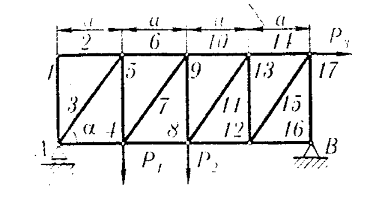
7



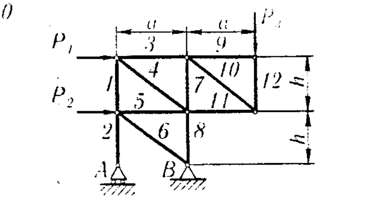
8



9



10



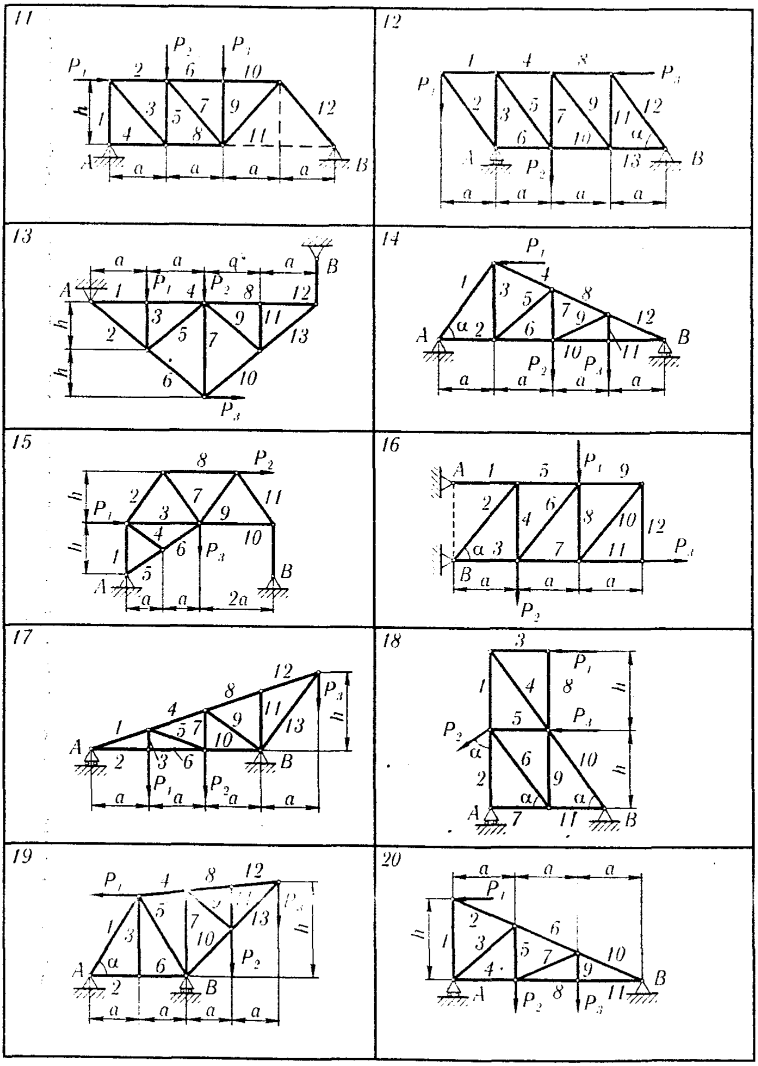


Рис. 8

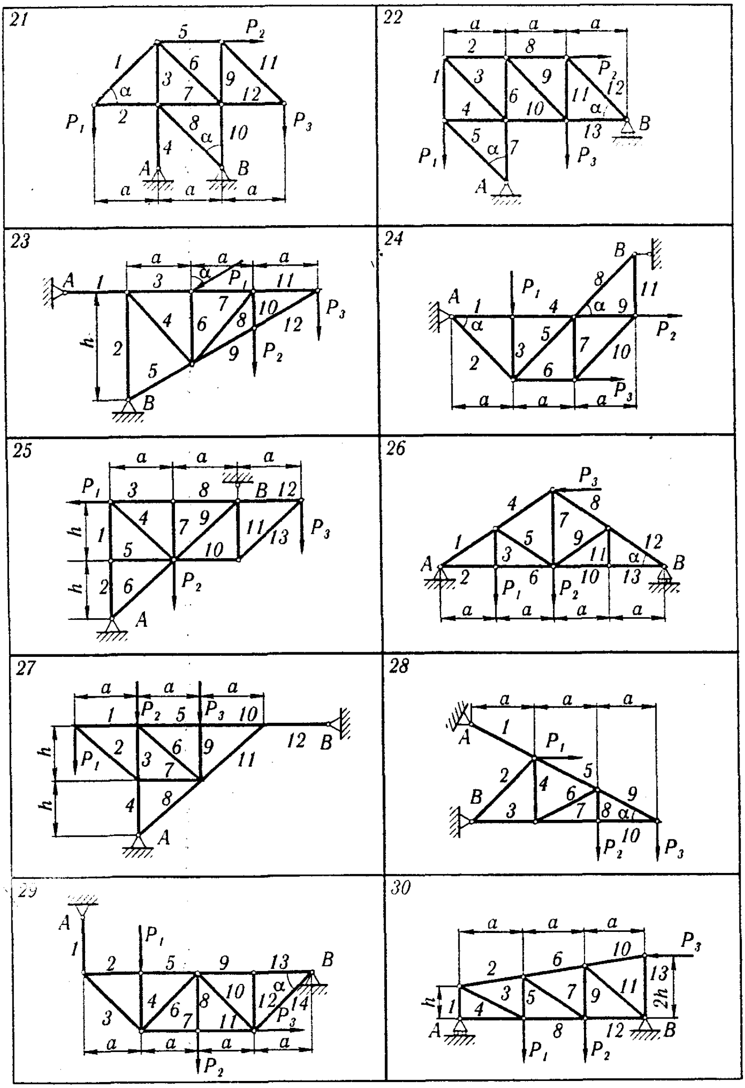


Рис. 9

2.2. Методические указания к выполнению заданий Часть 2 «Кинематика»

2.2.1. Методические указания по усвоению некоторых понятий кинематики

Уравнения движения точки М в декартовой системе координат являются параметрическими уравнениями траектории, в которых роль параметра играет время t. Если точка движется в плоскости, то уравнения движения имеют вид:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{2.1}$$

Линию траектории можно построить по координатам точки М, вычисленным для нескольких значений времени t.

Исключая время t из уравнений (1), можно получить уравнение плоской траектории в явной форме $y = f(x)$. Способы исключения t зависят от условий задачи.

Скорость. Продифференцировав по времени уравнения движения (1), находят составляющие скорости по осям координат:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}. \tag{2.2}$$

Модуль и направление вектора скорости определяется выражениями:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}, \tag{2.3}$$

$$\cos(\bar{\mathrm{v}}, \bar{i}) = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}.$$

Ускорение. Проекции вектора ускорения точки на координатные оси находятся как первые производные по времени от соответствующих проекций скоростей или как вторые производные по времени от координат движущейся точки, т.е.

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \ddot{y}. \tag{2.4}$$

Модуль и направление вектора ускорения определяется из соотношений:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ , \qquad (2.5)$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}\ .$$

Касательное ускорение. Для определения касательного ускорения a_τ необходимо продифференцировать модуль скорости v по времени:

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\ . \qquad (2.6)$$

Если модуль касательного ускорения при заданном времени имеет положительное значение, то вектор его совпадает по направлению с вектором скорости; в противном случае он направлен в сторону, противоположную вектору скорости.

Нормальное ускорение a_n при координатном способе задания движения можно определить как разность между полным a и касательным a_τ ускорениями

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ , \qquad (2.7)$$

а затем по известной величине нормального ускорения a_n вычислить радиус кривизны ρ траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}\ . \qquad (2.8)$$

КИНЕМАТИКА ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$\varphi = f_1(t)\ . \qquad (2.9)$$

Отсчет угла φ ведется от выбранного начала. При этом углам, отложенным в направлении движения часовой стрелки, придается знак “минус”, а углам противоположного направления – знак “плюс”.

Угол поворота φ выражается в радианах. Иногда угол поворота определяется числом оборотов N. Зависимость между φ и N следующая $\varphi = 2\pi N$. Угловая скорость тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = f_2(t) \quad . \qquad (2.10)$$

Знак производной $\dot{\varphi}$ дает возможность установить происходит ли вращение тела в положительном направлении отсчета угла поворота (знак "плюс") или в обратную сторону (знак "минус"). Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (или 1/с).

Иногда угловую скорость характеризуют числом оборотов в минуту и обозначают буквой n. Зависимость между ω и n имеет вид

$$\omega = \frac{\pi n}{30} .$$

Угловое ускорение тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = f_3(t) \quad . \qquad (2.11)$$

Знак производной $\ddot{\varphi}$ дает возможность установить является ли вращение тела в данный момент времени ускоренным или замедленным. Если знаки ω и ε одинаковы, тело вращается ускоренно, а если их знаки различны – замедленно. Единица измерения углового ускорения – радиан на секунду в квадрате (или $1/c^2$).

Траекториями точек тела, нележащих на оси вращения, являются окружности с центрами на оси вращения и радиусами, равными кратчайшему расстоянию от этих точек до оси вращения.

Модуль скорости любой точки тела, находящейся на расстоянии h от оси вращения (рис. 2.1), определяется по формуле

$$V = \omega h. \tag{2.12}$$

Направлена скорость точки по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения.

Ускорение любой точки тела состоит из двух составляющих –

вращательного $\bar{a}_{вр}$ и осестремительного $\bar{a}_{ос}$ ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_{вр} + \bar{a}_{ос}.$$

Модуль вращательного ускорения точки определяется по формуле

$$a_{вр} = \varepsilon h. \tag{2.13}$$

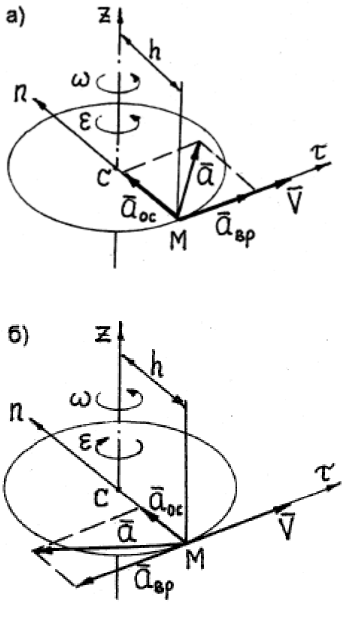


Рис. 2.1

Вращательное ускорение направлено по касательной к описываемой точкой окружности в ту же сторону, что и его скорость, если вращение тела ускоренное (рис. 2.1, а) и в сторону, противоположную скорости, если вращение замедленное (рис. 2.1, б).

Модуль осестремительного ускорения определяется по формуле

$$a_{ос} = \omega^2 h. \tag{2.14}$$

Осестремительное ускорение всегда направлено по радиусу окружности от точки к центру окружности (рис. 2.1).

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{oc}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2.15}$$

Основные типы задач кинематики вращения тела вокруг оси

В зависимости от того, что задано в условии задачи и что требуется определить, различают следующие два основных типа задач.

1. Исследуется движение тела в целом. В этих задачах вначале нужно получить законы (2.1)–(2.3) и, используя связь между ними, определить требуемую величину).

2. Требуется определить скорости и ускорения отдельных точек тела. Для решения задач этого типа вначале надо установить кинематические характеристики движения всего тела в целом, т.е. найти φ , ω и ε. После чего по формулам (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) определить скорости и ускорения точек тела.

Определение скоростей и ускорений в случаях, когда вращающееся тело входит в состав различных механизмов

Рассмотрим механизмы с поступательным и вращательным движением звеньев. Решение задачи начинают с определения скоростей точек того звена, для которого движение задано. Затем рассматривают звено, которое присоединено к первому звену и т.д. В результате определяют скорости точек всех звеньев механизма. В такой же последовательности определяют и ускорения точек.

Передача вращения от одного вращающегося тела, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым, может осуществляться при помощи фрикционной или зубчатой передачи (рис. 2.2).

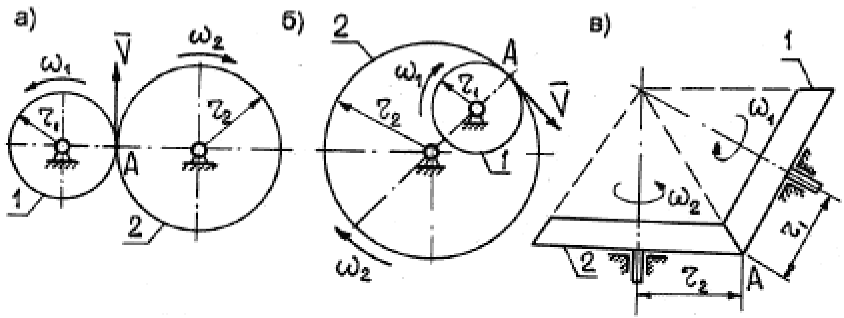


Рис. 2.2

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы трения в месте контакта соприкасающихся колес, в зубчатой передаче – от зацепления зубьев. Оси вращения ведущего и ведомого колес могут быть параллельными (рис. 2.2, а, б) или пересекаться (рис. 2.2, в). В рассмотренных случаях линейные скорости точек А соприкасания колес одинаковы, их модули определяются так:

$$V = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 . \qquad (2.16)$$

Отсюда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} . \qquad (2.17)$$

То есть угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

При преобразовании вращательного движения в поступательное (или наоборот) часто используют зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой (рис. 2.3). Для этой передачи выполняется условие:

$$V = \omega r$$

.

Кроме фрикционной и зубчатой передач, существует передача вращения при помощи гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рис. 2.4).

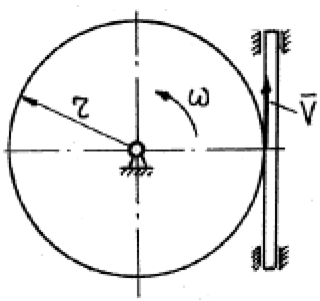


Рис. 2.3

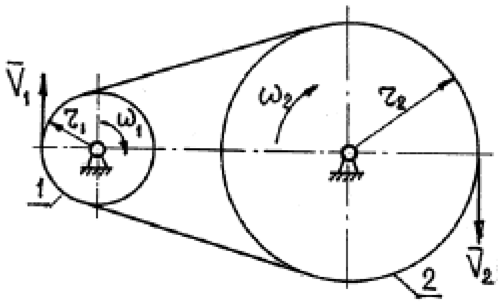


Рис. 2.4

Так как модули скоростей всех точек ремня одинаковы и ремень не скользит по поверхностям шкивов, то соотношения (2.8) и (2.9) относятся и к ременной передаче.

Изучение плоскопараллельного движения тела можно свести к изучению движения плоской фигуры, образованной сечением тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости, относительно которой движется тело.

Определение скоростей точек плоской фигуры можно выполнить одним их следующих методов:

- аналитическим;
- основанным на использовании векторного уравнения;

- основанным на использовании теоремы о проекциях скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки;
- основанным на использовании мгновенного центра скоростей.

Наиболее часто применяется последний метод, ему ниже будет уделено основное внимание.

Аналитический метод

При использовании аналитического метода считаются известными уравнения движения плоской фигуры (тела, совершающего плоскопараллельное движение):

$$x_A = x_A(t);\ y_A = y_A(t);\ \varphi = \varphi(t). \qquad (2.18)$$

Тогда координаты точки М (рис. 2.5) будут

$$x_M = x_A + b\cos\varphi = \psi_1(t);$$

$$y_M = y_A + b\sin\varphi = \psi_2(t), \qquad (2.19)$$

где b – расстояние от точки М до полюса А.

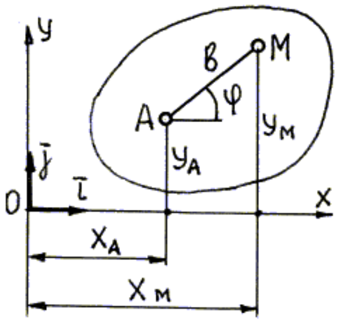


Рис. 2.5

$$V_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2}.$$

Направление вектора $\bar{V}_M$ определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(\bar{V}_M; \bar{i}) = \frac{\dot{x}_M}{V_M}; \cos(\bar{V}_M; \bar{j}) = \frac{\dot{y}_M}{V_M}.$$

Таким образом, задача по определению скоростей точек плоской фигуры сводится к известному решению соответствующей задачи кинематики точки.

Угловая скорость плоской фигуры определяется дифференцированием последнего уравнения из (2.18), т.е.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2.20)$$

Аналитический метод решения задачи рекомендуется использовать в тех случаях, когда требуется определить скорости точек для большого числа положений плоской фигуры.

Метод, основанный на использовании векторного уравнения

Векторное уравнение для скоростей точек плоской фигуры получается из теоремы: *скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса*, т.е. (рис. 3.2)

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{M/A}, \qquad (2.21)$$

где $\bar{V}_A$ – скорость полюса А; $\bar{V}_{M/A}$ – скорость точки М при вращении плоской фигуры вокруг полюса А.

Скорость $\bar{V}_{M/A}$ направлена перпендикулярно прямой АМ в сторону вращения фигуры (рис. 2.6) и равна по модулю

$$V_{M/A} = \omega \cdot MA \quad , \qquad (2.22)$$

где ω – угловая скорость вращения плоской фигуры.

Чтобы можно было определить скорость точки М, используя уравнение (2.21), необходимо знать скорость полюса А и угловую скорость вращения плоской фигуры ω . Для решения задачи надо построить по уравнению (2.21) параллелограмм скоростей (рис. 2.6).

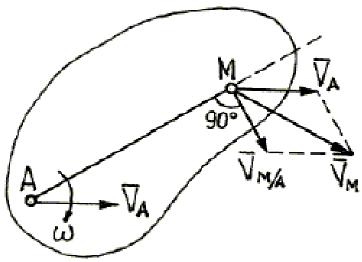


Рис.2.6

Диагональ этого параллелограмма есть искомая скорость точки $\bar{V}_M$, ее модуль:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{M/A}^2 + 2V_A \cdot V_{M/A} \cos\,(\bar{V}_A;\bar{V}_{M/A})} \qquad (2.23)$$

Решение задачи рекомендуется начинать с изображения плоской фигуры в положении, соответствующем данному моменту времени. Затем следует выбрать полюс и для заданной точки М записать векторное уравнение (2.21). За полюс следует взять точку тела, скорость которой задана. Далее необходимо построить параллелограмм скоростей по уравнению (2.21), вычислить модуль скорости $V_{M/A}$ по формуле (2.22), а затем модуль скорости точки V_M по формуле (2.23).

Но скорость конкретной точки плоской фигуры можно найти и в том случае, если известны скорость полюса и направление искомой скорости точки. Для этого используем следующую теорему: *при движении тела проекции скоростей двух точек этого тела на прямую, проходящую через точки, равны между собой* (рис. 2.7), т.е.

$$V_B\cos\beta = V_A\cos\alpha \quad . \tag{2.24}$$

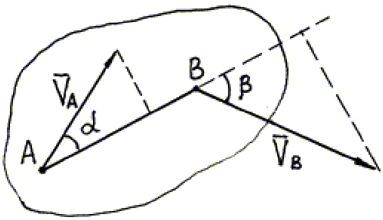


Рис. 2.7

Метод, основанный на использовании мгновенного центра скоростей

Мгновенный центр скоростей, или сокращенно МЦС, есть точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Мгновенный центр скоростей обозначается буквой Р (рис.2 .8). Скорости точек плоской фигуры распределены так, как если бы фигура совершала вращательное движение вокруг оси, проходящей через МЦС перпендикулярно плоскости движения. Поэтому скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна отрезку, соединяющему эту точку с МЦС, а модуль скорости равен произведению угловой скорости тела на расстояние точки до МЦС, т.е. (см. рис. 2.8)

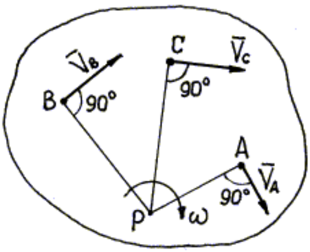


Рис.2.8

$$\bar{V}_A \perp AP \text{ и } V_A = \omega \cdot AP; \quad (2.25)$$

$$\bar{V}_B \perp BP \text{ и } V_B = \omega \cdot BP;$$

$$\bar{V}_C \perp CP \text{ и } V_C = \omega \cdot CP \text{ и т. п.}$$

Отсюда
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \ldots \text{ и т.п.} \quad (2.26)$$

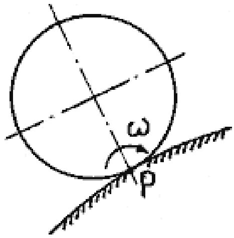
Из анализа формул (2.25) и (2.26) видно, что для определения скоростей надо знать положение МЦС и скорость одной какой-нибудь точки (последнее нужно для определения ω).

Рассмотрим основные способы нахождения положения МЦС.

а) В некоторых случаях удается сразу указать точку плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю. Эта точка и есть МЦС. Так, в случае качения без скольжения тела по неподвижной поверхности точка соприкосновения тела с поверхностью является мгновенным центром скоростей (рис. 2.9). Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если известны направления скоростей каких-нибудь двух точек плоской фигуры в данный момент, то МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям скоростей (перпендикуляры AP и BP на рис. 2.10).

в) Если скорости точек A и B (рис. 2.11) взаимно параллельны, а точки лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то МЦС (точка P) находится на пересечении указанного общего перпендикуляра AB и прямой 1–1, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.



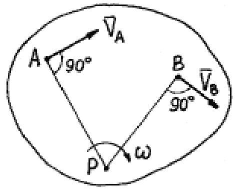


Рис.2.9 Рис. 2.10

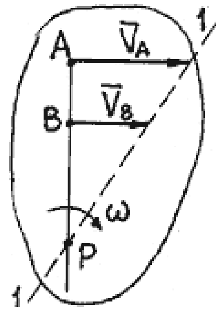


Рис. 2.11

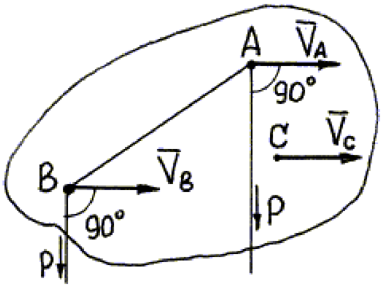


Рис. 2.12

г) Если скорости двух точек А и В (рис. 2.12) параллельны, а точки не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то МЦС находится в бесконечности. В этом случае имеем мгновенное поступательное движение плоской фигуры. Угловая скорость фигуры при таком движении равна нулю. Действительно, из формулы

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$

Скорости всех точек фигуры в этом случае одинаковы по величине и направлению: $\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_C = \ldots$.

Отметим, что при мгновенном поступательном движении только скорости точек одинаковы, а их ускорения в общем случае различны.

Укажем последовательность определения скоростей с использованием мгновенного центра скоростей.

1. Изобразить на чертеже тело (плоскую фигуру) в заданном положении и найти мгновенный центр скоростей одним из рассмотренных выше способов.

2. Указать направления векторов скоростей точек фигуры и записать формулы для вычисления их модулей.

3. Определить угловую скорость, учитывая, что скорость одной какой-либо точки задана по условию задачи.

4. Вычислить искомые модули скоростей точек.

Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Определение ускорений можно выполнить одним из следующих методов:

- аналитическим;
- основанным на использовании векторного уравнения;
- основанным на использовании мгновенного центра ускорений.

Аналитический метод

При использовании аналитического метода уравнения движения (3.1) плоской фигуры считаются известными (п. 3.1.1). Дважды дифференцируя по времени выражения (3.2) координат точки М, получим проекции ускорения этой точки:

$$a_{Mx} = \ddot{x}_M; \qquad a_{Mx} = \ddot{y}_M.$$

Модуль ускорения равен

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2}.$$

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{a}_M; \bar{i}) = \frac{\ddot{x}_M}{a_M}; \cos(\bar{a}_M; \bar{j}) = \frac{\ddot{y}_M}{a_M};.$$

Таким образом, задача по определению ускорений точек сводится к соответствующей задаче кинематики точки.

Угловое ускорение тела находится дифференцированием третьего уравнения движения из (3.1)

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Метод, основанный на использовании векторного уравнения

Векторное уравнение для ускорений получается из следующей теоремы.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса, т.е.

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^{вр}_{M/A} + \bar{a}^{ос}_{M/A}, \qquad (2.27)$$

где $\bar{a}_A$ – ускорение полюса А (см. рис. 2.13); $\bar{a}^{вр}_{M/A}$ и $\bar{a}^{ос}_{M/A}$ – вращательное и осестремительное ускорение точки М при вращении плоской фигуры вокруг полюса А.

Осестремительное ускорение точки М при вращении вокруг полюса А в уравнении (2.27) направлено к полюсу (рис. 2.13), модуль его

$$a^{ос}_{M/A} = \omega^2 \cdot MA, \qquad (2.28)$$

где w – мгновенная угловая скорость плоской фигуры.

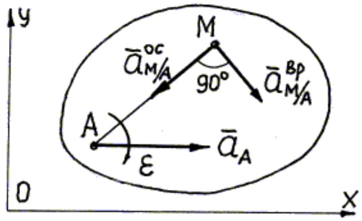


Рис. 2.13

Вращательное ускорение точки М при вращении вокруг полюса А направлено перпендикулярно осестремительному в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε и равно по модулю (рис. 2.13)

$$a^{вр}_{M/A} = \varepsilon \cdot MA \qquad (2.29)$$

где ε – мгновенное угловое ускорение плоской фигуры.

Напомним, что при ускоренном вращении плоской фигуры вокруг полюса полюса направление дуговой стрелки е совпадает с направлением вращения, а при замедленном вращении – противоположно ему.

С помощью уравнения (2.27) задача определения ускорений чаще всего решается для заданного момента времени. При решении задачи векторное уравнение (2.27) проектируется на оси координат. Для этого надо изобразить на чертеже все векторы, входящие в уравнение. Проектирование начинается с векторов (или вектора), стоящих в левой части векторного уравнения. Затем ставится знак равенства и проектируются векторы правой части уравнения. В результате одно векторное уравнение (2.27) заменяется двумя алгебраическими уравнениями проекций. Чтобы система алгебраических уравнений была разрешима, необходимо наличие в ней не более двух неизвестных величин. В качестве неизвестных могут быть любые две из следующих трех величин: одна или две составляющие ускорения точки А и угловое ускорение е плоской фигуры. Отметим, что угловая скорость w определяется заранее при решении задачи о скоростях.

Все вышесказанное позволяет рекомендовать следующую последовательность решения задачи определения ускорений.

1. Изобразить на чертеже положение тела в заданный момент времени, выбрать полюс и отметить точку, ускорение которой требуется определить. За полюс выбирается точка, ускорение которой либо известно по величине и направлению, либо легко определяется по условию задачи до решения уравнения (2.27).

2. Записать основное векторное уравнение (2.27) для точки, ускорение которой надо найти.

3. Показать на чертеже все векторы, входящие в уравнение (2.27). Если направление искомого вектора ускорения неизвестно, то его надо представить составляющими по направлению выбранных координатных осей.

4. Провести анализ уравнения (2.27), то есть выявить, какие величины в нем известны, а какие неизвестны. В результате анализа и

предварительных вычислений в этом уравнении должно остаться не более двух неизвестных величин.

5. Спроектировать уравнение (2.27) на выбранные оси координат. Следить за тем, чтобы знак равенства сохранял свое место и в уравнениях проекций.

6. Решая полученную систему уравнений проекций, определить неизвестные величины.

В зависимости от того, какие неизвестные входят в основное векторное уравнение, задачи определения ускорений могут быть разделены на три основных типа.

Тип 1 – задача, в которой неизвестными уравнения (2.27) являются две составляющие ускорения рассматриваемой точки М. Это значит, ускорение полюса` a_A, угловая скорость w и угловое ускорение e должны быть заданы или определены по исходным данным до решения векторного уравнения.

Тип 2 – задача, возникающая при качении колеса без проскальзывания, когда задается скорость и ускорение центра колеса. Особенности кинематики колеса позволяют в этом случае определить угловую скорость и угловое ускорение колеса до решения векторного уравнения.

Тип 3 – задача, в которой неизвестными векторного уравнения (2.27) являются одна из составляющих ускорений рассматриваемой точки М и угловое ускорение тела e . В этих задачах, как правило, задается скорость и ускорение полюса А и траектория движения точки М.

Тип задачи окончательно может быть установлен только после анализа векторного уравнения (2.27). Однако в наиболее простых случаях само условие задачи, весь набор данных определяют заранее тип задачи и, следовательно, особенности ее решения.

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю, этот центр обозначается буквой Q.

Ускорения точек плоской фигуры в каждый момент времени распределены так, как если бы эта фигура поворачивалась вокруг мгновенного центра ускорений. Для точки М (рис. 2.14) будем иметь

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ ; \tag{2.30}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\left|a^{вр}_{B/A}\right|}{a^{ос}_{B/A}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\ . \tag{2.31}$$

Чтобы найти положение мгновенного центра ускорений, надо знать ускорение полюса А, угловую скорость ω и угловое ускорение ε фигуры. Вектор ускорения полюса a_A нужно повернуть в направлении дуговой стрелки ε (рис. 2.14) на угол μ , определяемый формулой (2.31); затем на полученном луче Ах надо отложить отрезок AQ, равный

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\ . \tag{2.32}$$

Конец этого отрезка (точка Q) есть мгновенный центр ускорений.

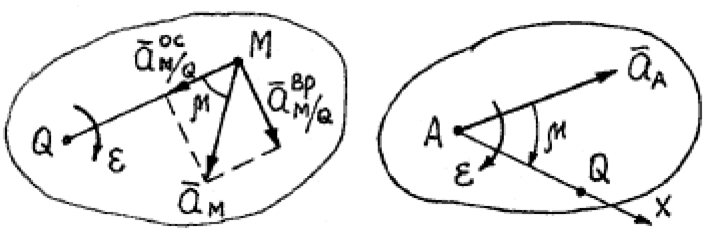


Рис. 2.14 Рис. 2.15

Если по условию задачи ускорение какой-нибудь точки тела равно нулю, то эта точка есть мгновенный центр ускорений. Например, для колеса, у которого центр движется равномерно и прямолинейно, мгновенный центр ускорений совпадает с центром колеса.

Задачу об определении ускорений рекомендуется решать в такой последовательности.

1. Определить положение мгновенного центра ускорений рассмотренным выше способом.

2. Вычислить модуль искомого ускорения по формуле (2.30).

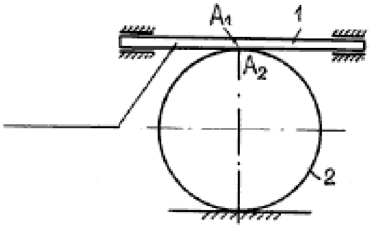
3. Определить угол μ по формуле (2.31) и под этим углом к направлению MQ (рис. 2.15) отложить вектор искомого ускорения.

Определение ускорений точек звеньев плоских механизмов

Решение задачи начинается с исследования ведущего звена, то есть звена, движение которого задано. Затем рассматривается движение звена, связанного с ведущим. Далее одно за другим рассматриваются остальные звенья механизма.

При решении этих задач необходимо уметь находить связь между ускорениями точек двух соединенных между собой звеньев механизма. Рассмотрим два основных способа соединения звеньев в плоских механизмах.

1. Соединения звеньев в различного вида фрикционных и зубчатых передачах (рис. 2.16), а также в передачах с гибкой нерастяжимой нитью (рис. 2.17).



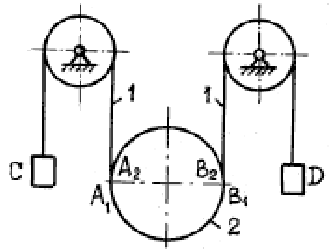
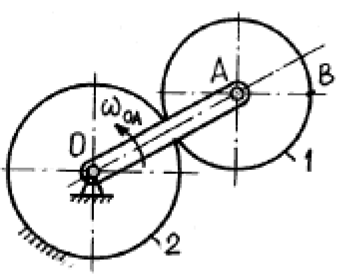


Рис. 2.16 Рис. 2.17

В соединениях этого способа происходит касание двух звеньев (касание зубчатой рейки 1 и колеса 2 на рис. 2.16, касание гибкой нити 1 и блока 2 на рис. 2.17). В месте касания совмещаются точки, принадлежащие разным звеньям. Хотя траектории совмещающихся точек различны, но у них общая касательная. При отсутствии проскальзывания звеньев указанные точки имеют одинаковые касательные ускорения ($\overline{a}^{\tau}_{A1} = \overline{a}^{\tau}_{A2}$; $\overline{a}^{\tau}_{B1} = \overline{a}^{\tau}_{B2}$). Нормальные же ускорения точек не равны между собой, так как точки движутся по различным траекториям.

2. Соединения звеньев с помощью шарниров (шарнир А на рис.2.18 и 2.19).



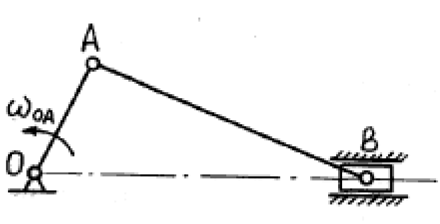


Рис. 2.18 Рис. 2.19

В шарнирных соединениях звеньев центр шарнира принадлежит одновременно двум звеньям. Вследствие этого, например, ускорение точки А на рис. 2.18, определенное для вращающегося кривошипа ОА, будет таким же как и ускорение точки А колеса 1, совершающего плоскопараллельное движение. Аналогичные рассуждения для точки А механизма на рис. 2.19.

Отметим некоторые особенности при выборе полюса. Если звено АВ механизма, совершающего плоскопараллельное движение, присоединено к ведущему звену ОА шарниром А (рис. 2.18, 2.19), то за полюс звена АВ следует взять центр шарнира А, ускорение которого можно определить при решении задачи об ускорениях звена ОА.

Звено механизма, соединенное с ведущим звеном первым способом (рис. 2.18, 2.19), является обычно колесом (или блоком). В этом случае за полюс следует выбирать центр колеса (или блока), ускорение которого можно найти до решения основного векторного уравнения типа (3.10). Покажем это на примере механизмов, изображенных на рис. 2.18, 2.19.

В механизме на рис. 2.18 ведущим звеном является подвижная рейка 1, ее скорость V_1 и ускорение a_1 известны (рис. 2.20). Скорости точек A_1 и A_2 одинаковы: $V_{A2} = V_{A1} = V_1$. Учитывая, что мгновенный центр скоростей колеса 2 находится в точке Р, найдем

$$\omega_2 = \frac{V_{A2}}{AP} = \frac{V_1}{AP}, \quad V_O = \omega_2 OP = \frac{V_1}{AP} OP$$

Или

$$V_O = \frac{1}{2} V_1 .$$

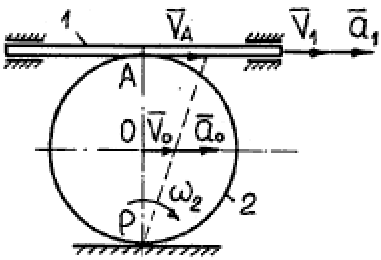


Рис. 2.20

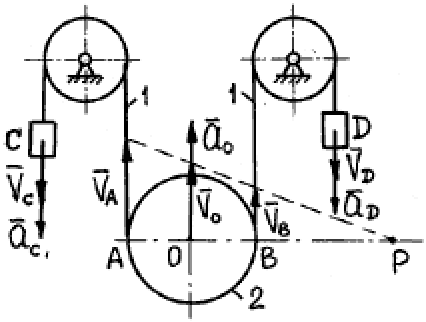


Рис. 2.21

Эта формула справедлива для любого момента времени, поэтому дифференцируя ее по времени, будем иметь

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{2} a_1 .$$

Но $\dfrac{dV_0}{dt} = a_0$, так как точка O движется по прямой и ее полное ускорение равно касательному ускорению.

Окончательно $$a_0 = \frac{1}{2} a_1 .$$

В механизме на рис. 2.19 и 2.21 ведущими звеньями являются грузы C и D, их скорости V_C и V_D и ускорения a_C, a_D известны. Мгновенный центр скоростей блока 2 находится в точке P на пересечении прямой AB и прямой, соединяющей концы векторов V_A и V_B. (Напомним, что $V_A = V_C$; $V_B = V_D$). Скорость центра O блока найдется по формуле

$$V_O = \frac{V_A + V_B}{2} = \frac{V_C + V_D}{2}.$$

Полученная формула справедлива для любого момента времени. Поэтому, дифференцируя ее по времени, найдем

$$a_O = \frac{a_C + a_D}{2}.$$

Рекомендуется следующая последовательность решения задачи определения ускорений плоских механизмов.

1. Изобразить на рисунке механизм в заданном положении.
2. Начиная с ведущего звена, решить задачу о скоростях, главной целью которой является определение угловых скоростей всех звеньев механизма.
3. Решить задачу определения ускорений точек ведущего звена механизма; найти ускорение точки ведущего звена, в которой к нему присоединяется второе звено механизма.

Решить задачу определения ускорений точек второго и затем всех последующих звеньев механизма.

2.2.2. Примеры выполнения заданий
Часть 2 «Кинематика»

Задание К1

По данным уравнения движения точки М

$$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \qquad y = -3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \text{ (м)}.$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t=1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в данной точке.

Решение:

1. Определим уравнение траектории в явном виде. Для этого необходимо исключить из уравнения движения точки время t. Так как уравнения движения точки заданы через $\sin$ и $\cos$ одного и того же аргумента, удобно возвести в квадрат левую и правую часть каждого уравнения, а затем полученные уравнения сложить:

$$x^2 = 4^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right), \qquad y^2 = (-3)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

или $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ – уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями: $a = 4$ м; $b = 3$ м (см. рисунок 1).

Следовательно, траекторией движущейся точки является эллипс.

В начальный момент времени (при t =0) точка имеет координаты:

$$x_0 = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}0\right) = 4 \text{ м}; \qquad y_0 = -3\sin\left(\frac{\pi}{3}0\right) = 0;$$

$M_0(4;0)$ (см. рисунок 2.1).

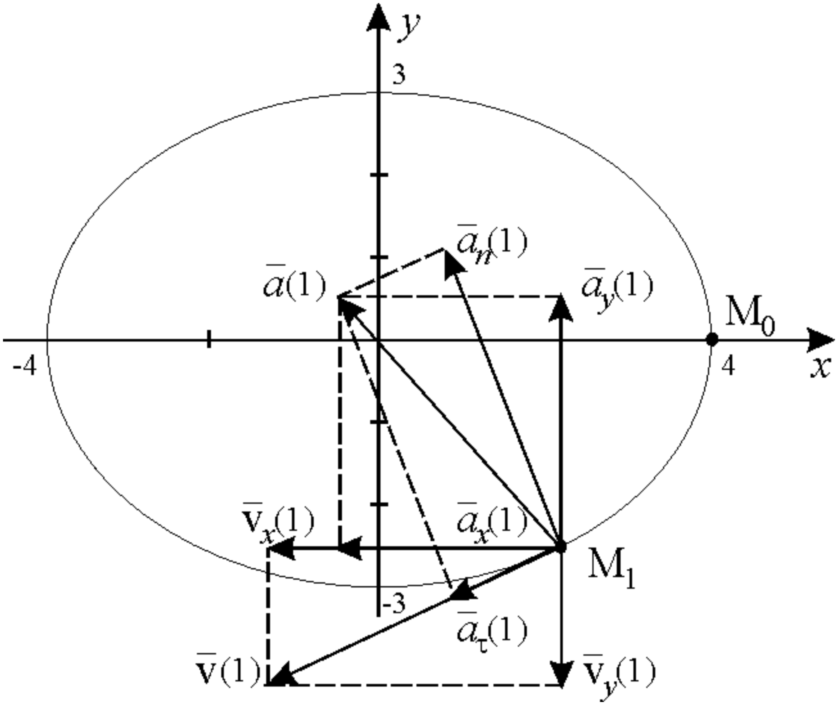


Рис. 2.1. Пример выполнения задачи К1

Определим положение точки М в момент времени t =1 с:

$$x(1) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}1\right) = 2 \text{ м;}$$

$$y(1) = -3\sin\left(\frac{\pi}{3}1\right) = -2{,}598 \text{ м;}$$

$M_1(2;-2{,}598)$ (см. рисунок 2.1).

2. Вычислим скорость и ускорение точки М. Имеем:

- для скорости

$$\mathrm{v}_x = \dot{x} = -4\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right);$$

$$\mathrm{v}_y = \dot{y} = -3\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right);$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{7\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 9};$$

- для ускорения

$$a_x = \ddot{x} = -4\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right);$$

$$a_y = \ddot{y} = 3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\sqrt{7\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 9}\cdot$$

3. Вычислим скорость и ускорение точки М в момент времени t =1 с. Имеем:

- для скорости

$\mathrm{v}_x(1) = -3{,}628$ м/с; $\mathrm{v}_y(1) = -1{,}571$ м/с;

$\mathrm{v}(1) = 3{,}953$ м/с;

- для ускорения

$a_x(1) = -2{,}193$ м/с²; $a_y(1) = 32{,}849$ м/с²;

$a(1) = 3{,}596$ м/с².

Построим вектор скорости и ускорения точки М в момент времени t =1 с, учитывая знаки проекций этих векторов на оси координат (см. рисунок).

4. Определим касательное ускорение точки М. Так как $a_\tau = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt}$, то в данном случае:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{7\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)+9}\right) = 7\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{\sqrt{7\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)+9}}.$$

В момент времени t =1 с: $a_\tau(1) = 0{,}881$ м/с².

5. По величинам полного и касательного ускорения вычислим величину нормального ускорения точки в данный момент времени:

$$a_n(1) = \sqrt{\left(a(1)\right)^2 - \left(a_\tau(1)\right)^2} = 3{,}486 \text{ м/с}^2.$$

6. Вычислим радиус кривизны траектории ρ в момент времени t =1 с:

$$\rho(1) = \frac{\left(v(1)\right)^2}{a_n(1)} = 4{,}483 \text{ м}.$$

Проанализируем полученный результат. Точка М движется по эллипсу; движение криволинейное, неравномерное.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$; $x(1) = 42$ м; $y(1) = -2{,}598$ м; $\mathrm{v}(1) = 3{,}953$ м/с; $a(1) = 3{,}596$ м/с²; $a_\tau(1) = 0{,}881$ м/с²;

Задание К2

Задача К2 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении следует воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (МЦС) и теоремой о сложении ускорений.

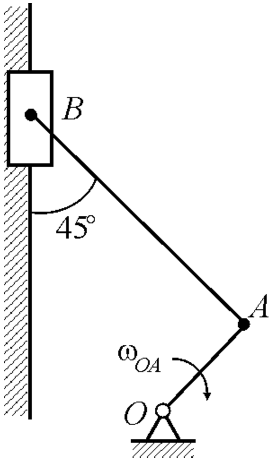


Рис. 2.2

Кривошип *OA* длиной 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{\text{OA}} = 10$ 1/с и приводит в движение шатун *AB* длиной 1 м. Ползун *B* движется по вертикали. (рисунок 2.2)

Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также скорость и ускорение ползуна в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с вертикалью угол 45°.

Решение:

1. ***Определение скоростей***.

Кривошип *OA* совершает вращательное движение. Скорость точки *A* вычислим по заданной угловой скорости:

$$v_{\text{A}} = \omega_{\text{OA}} \left| OA \right| = 2 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости $\bar{v}_{\text{A}}$ направлен перпендикулярно OA.

Ползун совершает поступательное движение; его скорость $\bar{v}_{\text{B}}$ направлена вертикально (см. рисунок 3).

Шатун *AB* совершает плоское движение и для него известны направления скоростей двух точек – точек *A* и *B*. Направления скоростей не параллельны, следовательно, МЦС лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек. Находим точку P (см. рис. 2.3).

Воспользуемся формулой для скоростей точек при плоском движении $\omega_{AB} = \dfrac{v_{\text{A}}}{\left| AP \right|} = \dfrac{v_{\text{B}}}{\left| BP \right|}$.

Из треугольника ABP находим $\left| AP \right| = 1$ м; $\left| BP \right| = \sqrt{2}$ м. Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{|AP|} = 2\,c^{-1};$$

$$v_B = \omega_{AB}|BP| = 2\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

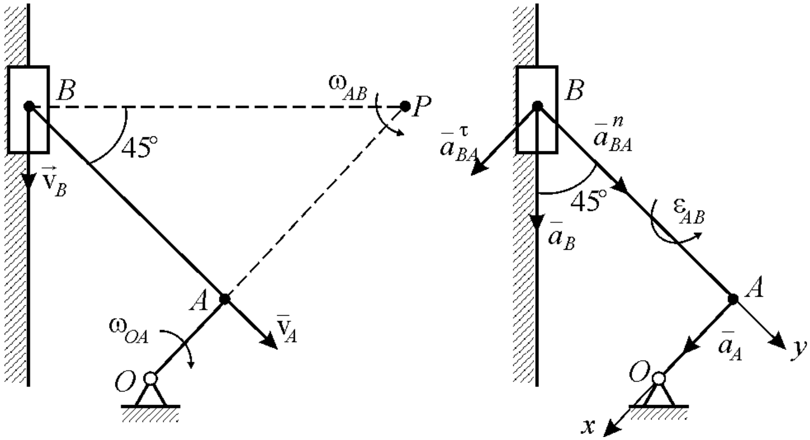


Рис.2.3. Пример выполнения задачи К2

2. ***Определение ускорений***.

Вычисляем ускорение точки *A* как точки кривошипа:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}.$$

Здесь $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA}|OA| = 0$, т.к. $\omega_{OA} = \text{const}$ и, следовательно, $\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = 0$.

Тогда полное ускорение точки *A*

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2|OA| = 20 \text{ м/с}^2$$

и направлено к оси вращения – точке *O*.

Для вычисления ускорения точки *B* воспользуемся теоремой о сложении ускорений, выбрав за полюс точку *A*

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \tag{1}$$

Здесь $a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^{2}\left|AB\right| = 4$ м/с² и направлен вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ от точки *B* к полюсу – точке *A*.

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB}\left|AB\right|.$$

Здесь ε_{AB} – неизвестное угловое ускорение шатуна. Направление вектора $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ также не может быть определено однозначно, т.к. неизвестно, ускоренным или замедленным является поворот шатуна. Принимаем этот поворот ускоренным. Тогда направление ε_{OA} совпадает с направлением ω_{OA}, а вектор $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ направим перпендикулярно отрезку *BA* по ходу углового ускорения.

Вектор ускорения точки *B* направлен по вертикали. Будем считать, что ползун движется ускоренно. Направим ускорение $\bar{a}_{B}$ в ту же сторону, что и скорость $\bar{a}_{B}$ (см. рис. 2.3).

Теперь в равенстве (1) определены направления всех ускорений. Записывая равенство (1) в проекциях на оси координат получим:

На ось x: $a_B \sin 45^\circ = a_A + a_{BA}^{\tau}$; На ось y: $a_B \cos 45^\circ = a_{BA}^{n}$.

Из второго уравнения получаем

$$a_B = \frac{a_{BA}^{n}}{\cos 45^\circ} = 4\sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

Из первого уравнения находим

$$a_{BA}^{\tau} = a_B \sin 45^\circ - a_A = -16 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{BA}^{\tau}}{\left|AB\right|} = -16\,\text{с}^{-2}$.

Отрицательные знаки a_{BA}^{τ} и ε_{AB} показывают, что их истинные направления противоположны принятым.

Ответ: $\omega_{AB} = 2\,\text{с}^{-1}$; $\varepsilon_{AB} = 16\,\text{с}^{-2}$; $v_B = 2\sqrt{2}$ м/с; $a_B = 4\sqrt{2}$ м/с².

2.2.3. Задания для контрольной работы
Часть 2 « Кинематика»

Задание К1

Уравнения движения точки М в декартовой неподвижной системе координат заданы в таблице 2. Расчетное время в часах соответствует t =1 с.

<u>Выбор варианта.</u> **Числовые данные студент выбирает в соответствии со своим номером в журнале.**

Требуется:

1. Построить траекторию движения точки и для указанного времени t найти положение точки на траектории. Получить уравнение траектории в форме $y = f(x)$.
2. Рассчитать скорости и ускорение точки в функции времени через проекции на оси декартовой системы координат. Найти модули скорости и ускорения.
3. Вычислить скорость и ускорение точки для заданного момента времени и показать векторы на чертеже.
4. Определить касательное ускорение точки как функцию времени и вычислить его значение для заданного момента времени. Показать касательное ускорение на чертеже.
5. По величинам полного и касательного ускорения найти величину нормального ускорения точки в данный момент времени. Показать вектор нормального ускорения на чертеже.
6. Найти радиус кривизны траектории по величине скорости и нормального ускорения.

Таблица 2. Исходные данные к задаче К1

№ варианта	Уравнения движения $x = x(t)$, м	Уравнения движения $y = y(t)$, м	№ варианта	Уравнения движения $x = x(t)$, м	Уравнения движения $y = y(t)$, м
1.	$2t+4$	$3t-5$	16.	$7t^2-4$	$4t$
2.	$2\sin 2t$	$4\cos 2t$	17.	$3t$	$4{,}9t^2-3$
3.	$2\sin^2\frac{\pi}{2}t$	$2\cos^2\frac{\pi}{2}t$	18.	$5\sin\frac{\pi}{2}t$	$5\cos\frac{\pi}{2}t$
4.	$2t^2$	$-1+3t$	19.	t^2-6t	$25t$
5.	$2\sin 2\pi t$	$3\cos 2\pi t$	20.	$2-\sin^2\frac{\pi}{4}t$	$3+\cos^2\frac{\pi}{4}t$
6.	$-\frac{3}{t+2}$	$3t+6$	21.	$5+\cos\frac{\pi}{2}t$	$4\sin\frac{\pi}{2}t$
7.	$2\sin\frac{\pi}{2}t$	$2\sin\frac{\pi}{2}t$	22.	$1+\cos\frac{\pi}{12}t^3$	$2-\sin\frac{\pi}{12}t^3$
8.	$2\sin\frac{\pi}{2}t$	$2\cos\frac{\pi}{2}t$	23.	$2+\cos^2\pi t$	$3-\sin^2\pi t$
9.	$4t-2t^2$	$1{,}5t^2-3t$	24.	$5\cos 2t$	$3-5\sin 2t$
10.	$20t$	$-40t^2+250$	25.	$6t-3t^2$	$-1{,}5t^2+3t$

11.	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	$3\cos\frac{\pi}{2}t$	26.	$5+3\cos 2t$	$4\sin 2t$
12.	$250t$	$-490t^2+430t$	27.	$4t^2$	$3t$
13.	$2+\cos\frac{\pi}{4}t^2$	$3-\sin\frac{\pi}{4}t^2$	28.	$5\cos\pi t$	$3-5\sin\pi t$
14.	$3t^2+2$	$-4t$	29.	$5\cos 5t^2$	$5\sin 5t^2$
15.	$\sin 20t$	$\cos 20t$	30.	$4-2\sin t$	$2+\cos t$

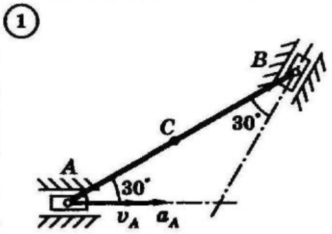
Задание К2

<u>Выбор варианта.</u> **Вариант задачи и числовые данные к ней студент выбирает в соответствии со своим номером в журнале.**

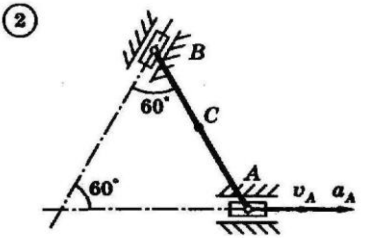
Представленный на схемах (рис. 2.4) механизм состоит из шатуна *AB* длиной 2 м и двух ползунов. Известны величины скорости и ускорения ползуна *A*.

Требуется:

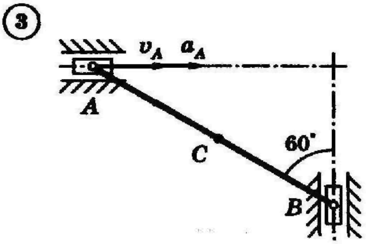
1. Определить скорость и ускорение ползуна *B*.
2. Скорость средней точки *C* шатуна.
3. Угловую скорость и угловое ускорение шатуна *AB*.



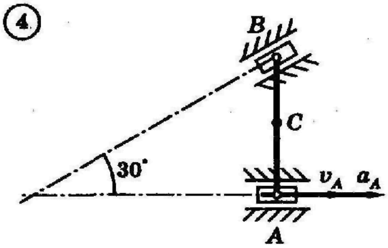
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



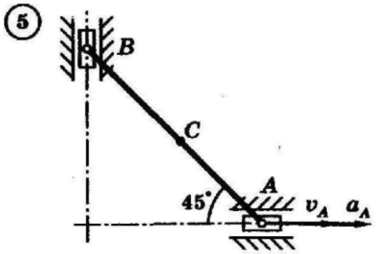
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



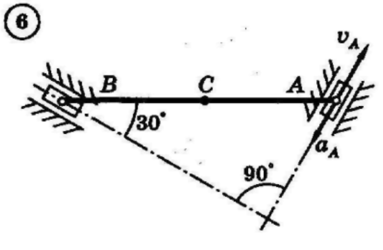
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



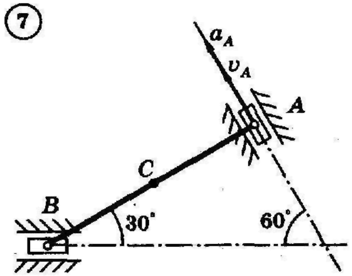
$v_A = 0{,}9$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



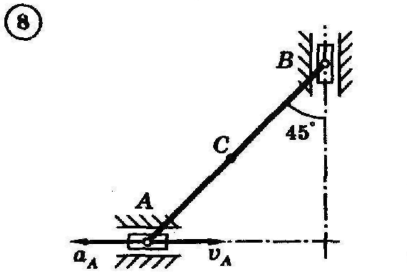
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



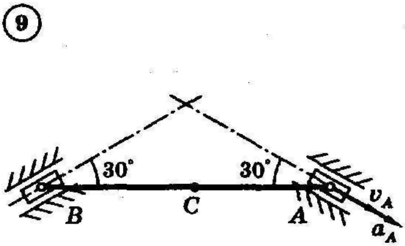
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



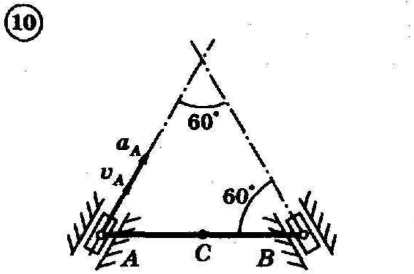
$v_A = 0{,}3$ м/с; $a_A = 1$ м/с^2



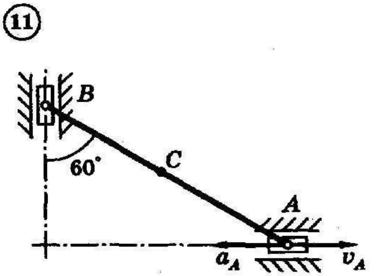
$v_A = 2$ м/с; $a_A = 4$ м/с^2



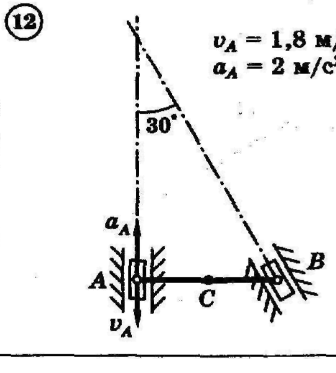
$v_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



$v_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

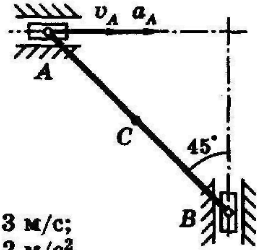


$v_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2



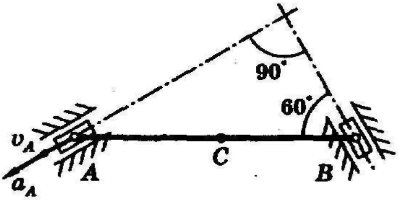
$v_A = 1{,}8$ м/с;
$a_A = 2$ м/с^2

13



$v_A = 3$ м/с;
$a_A = 2$ м/с^2

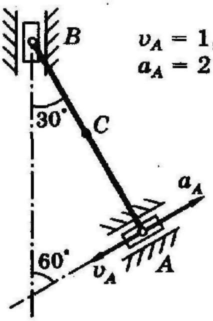
14



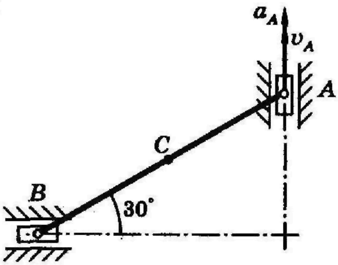
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

15

$v_A = 1{,}5$ м/с;
$a_A = 2$ м/с^2

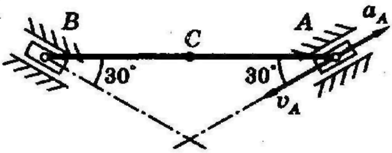


16



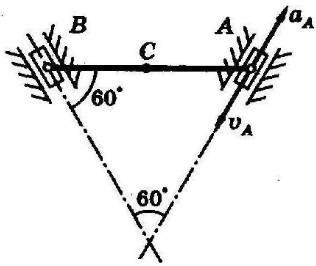
$v_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

17



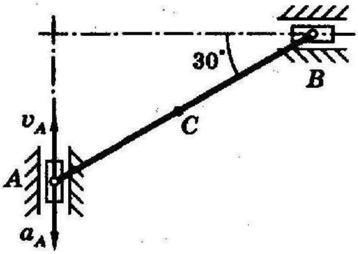
$v_A = 2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

18



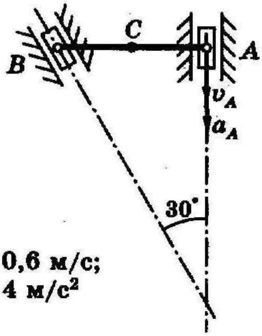
$v_A = 4$ м/с; $a_A = 4$ м/с^2

(19)



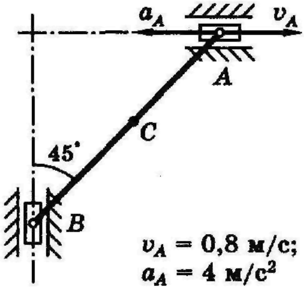
$v_A = 1$ м/с; $a_A = 4$ м/с^2

(20)



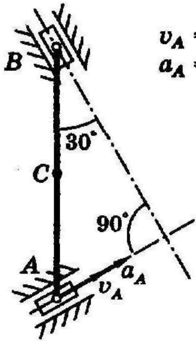
$v_A = 0{,}6$ м/с;
$a_A = 4$ м/с^2

(21)



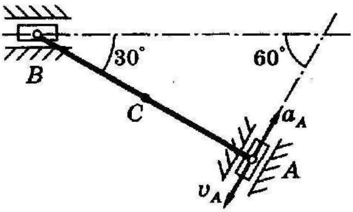
$v_A = 0{,}8$ м/с;
$a_A = 4$ м/с^2

(22)



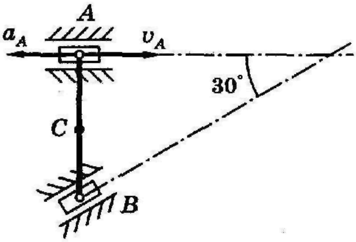
$v_A = 2$ м/с;
$a_A = 2$ м/с^2

(23)



$v_A = 0{,}9$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

(24)



$v_A = 1{,}2$ м/с; $a_A = 2$ м/с^2

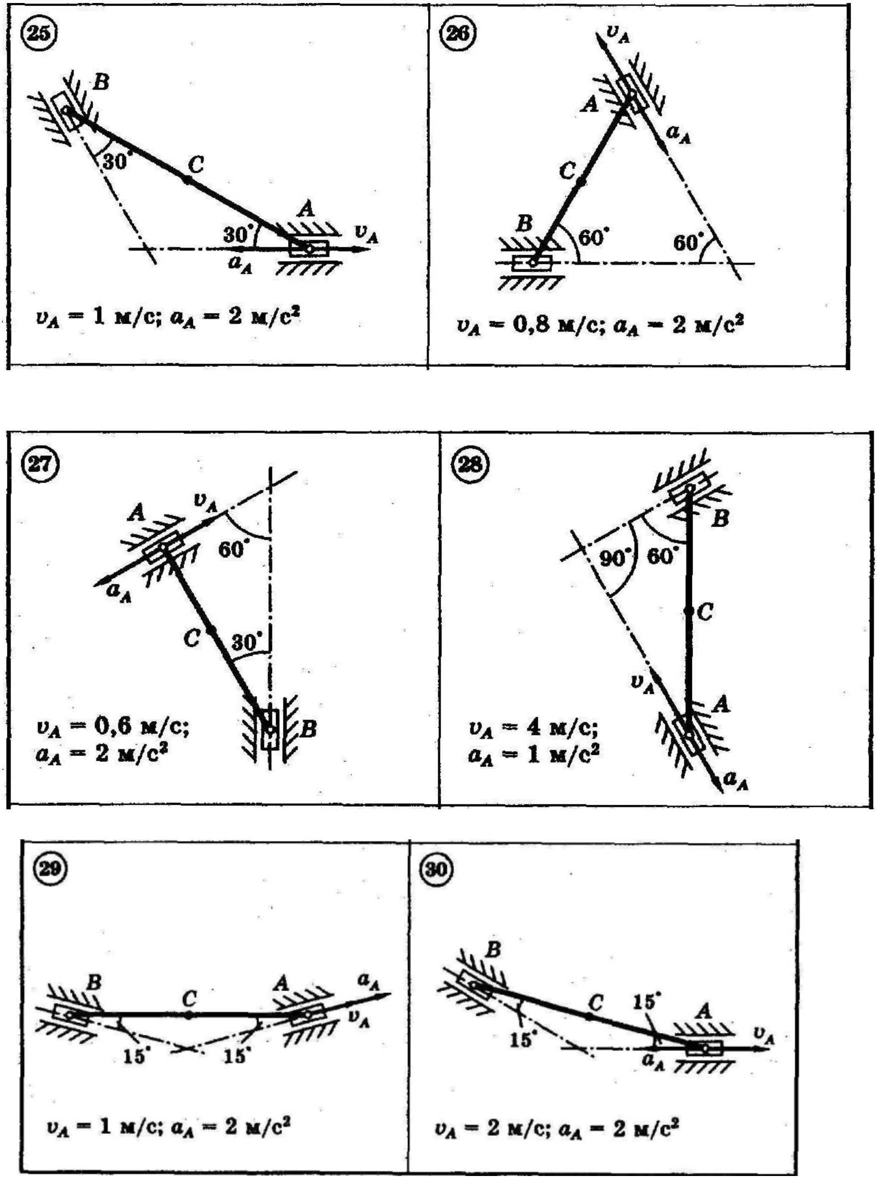


Рис. 2.4. Схемы к задаче К2

2.4.Методические указания к выполнению заданий Часть 3 «Динамика»

2.4.1. Примеры выполнения заданий Часть 3 «Динамика»

Задание Д1

Задача Д1 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки. Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения тела на участке ОА, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке ОА или длину этого участка, определить, какую скорость будет иметь тело в точке А. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке АМ. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке АМ с учетом начальных условий.

Пример выполнения задачи Д1

Тело, массой $m = 1{,}0$ кг, которое считается материальной точкой, перемещается из состояния покоя по шероховатой наклонной плоскости под действием силы $F = a + \mu \cdot v$ ($a = 10$ Н; $\mu = 2\,Н \cdot с/м$). Угол наклона поверхности $\gamma = 30^\circ$. Высота уступа $h = 20$ м. Коэффициент трения скольжения о плоскость $f = 0{,}1$.

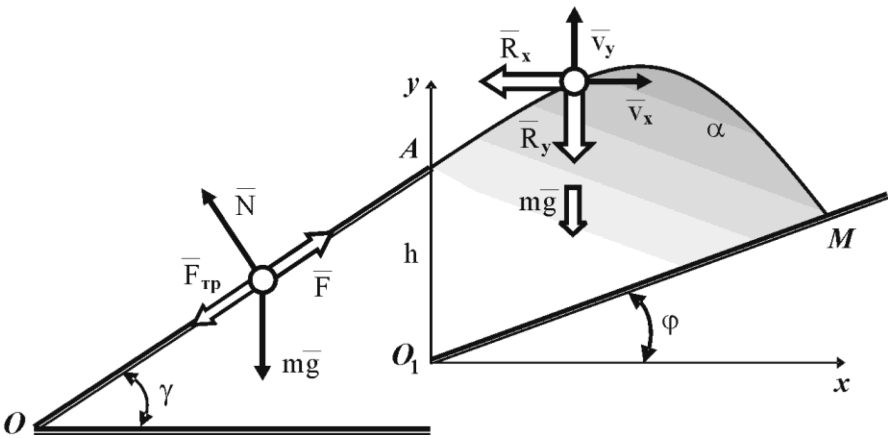


Рис. 3.1 Пример выполнения задачи Д1

Через время $t = 3$ с тело оказывается на ее краю и далее продолжает свободное движение под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы сопротивления среды $\bar{R} = -\alpha \cdot \bar{v}$, $\alpha = 0{,}5\,\text{Н} \cdot \text{с/м}$. Движение тела происходит до падения его на другую наклонную (под углом $\varphi = 20^{\circ}$) плоскость в точке М.

Определит координаты точки падения тела, а также время движения тела до момента падения его в точке М.

Решение:

Движение материальной точки состоит из двух этапов.

На первом этапе точка движется по наклонной шероховатой поверхности (участок ОА).

На втором этапе – происходит свободное движение в сопротивляющейся среде (участок АМ).

Поскольку движение тела на ***первом участке*** ограничено плоскостью и траектория движения задана, уравнения движения тела на этом участке составим в проекциях на оси естественного трехгранника (касательная к траектории τ, нормаль n и бинормаль b):

$$m \cdot \frac{dv_\tau}{dt} = -m \cdot g \cdot \sin\gamma - F_{тр} + F,$$

(3.1)

$$m\frac{v_n^2}{\rho} = N - m g \cos\gamma, \quad (3.2)$$

$$F_b = 0. \quad (3.3)$$

Здесь: v_τ – проекция скорости точки на касательную.

В уравнении (2) левая часть равна нулю, т.к. $\rho \to \infty$ (траектория движения – прямая линия – наклонная поверхность). Уравнение (3) удовлетворяется тождественно, т.к. нет сил, дающих проекции на бинормаль.

Учитывая, что сила трения скольжения по закону Кулона определяться $F_{тр} = f \cdot N$, а движущая сила в примере также имеет постоянную составляющую $F = a + \mu \cdot v_\tau$, после алгебраических преобразований из уравнений (1) и (2) получим:

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = b + \mu v_\tau, \quad (3.4)$$

где $b = a - g(\sin\gamma + f\cos\gamma) = 4{,}25$ Н.

Дифференциальное уравнение (4) описывает движения материальной точки по поверхности ОА рассматриваемой задачи.

Разделяем переменные в (4) и интегрируем полученное выражение: $m\dfrac{dv_\tau}{b + \mu v_\tau} = dt$,

$$m\int \frac{dv_\tau}{b + \mu v_\tau} = \int dt,$$

$$\frac{m}{\mu}\ln(b + \mu v_\tau) = t + C.$$

Постоянную интегрирования C находим из начального условия: при $t_0 = 0$ $v_0 = 0$.

Получим: $$C = \frac{m}{\mu}\ln b.$$

Подставим значение C в предыдущее выражение и после преобразований, получим формулу для определения скорости материальной точки при ее перемещении по наклонной шероховатой поверхности ОА:

$$v = \frac{b}{\mu}\left[\exp\left(\frac{\mu t}{m}\right) - 1\right]. \tag{3.5}$$

Вычислим значение скорости по формуле (5) в точке А при

$t = 3$с $v = 854$м/с.

Время движения тела в задании задано как время движения тела по наклонной плоскости. Особый смысл это имеет в том случаи, если сила зависит от времени. Например, предположим, тело движется по горизонтальной шероховатой поверхности под действием силы $F_\tau = \mu t$. Движение начнется только после того, как величина движущей силы станет больше силы трения, а уравнение движения будет иметь вид $m\dfrac{dv_\tau}{dt} = \mu t$, в которое сила трения скольжения входить не будет.

На ***втором этапе*** (участок АМ) рассмотрим движение материальной точки в декартовой прямоугольной системе координат (O_1xy), представленной на рисунке. Отсчет времени ведется от того момента, когда точка находится в точке А. При составлении уравнений движения координаты и проекции скорости на оси координат принимаются положительными даже в том случаи, если предполагается, что они должны быть отрицательными.

Начальные условия при движении на участке АМ:

$$t = 0, \qquad x = 0, \qquad y = h = 20 \text{ м;} \qquad (3.6)$$

$$v_{x0} = v\cos\gamma = 740 \text{ м/с;}$$

$$v_{y0} = v\sin\gamma = 427 \text{ м/с.}$$

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси координат имеют вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x, \tag{3.7}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - \alpha v_y. \tag{3.8}$$

Решение этих уравнений, состоит из разделения переменных, интегрирование и нахождение постоянных интегрирования в соответствии с начальными условиями. Окончательный результат

$$v_x = v_{x0}\exp(-\beta t),$$

(3.9)

$$v_y = v_{y0}\exp(-\beta t) + \frac{mg}{\alpha}[\exp(-\beta t) - 1].$$

Здесь и далее использовано обозначение: $\beta = \frac{\alpha}{m}$.

В примере

$$\beta = \frac{\alpha}{m} = \frac{0{,}5}{1{,}0} = 0{,}5 \text{ 1/с.}$$

Координаты материальной точки, движущейся на участке АМ, найдем, интегрируя уравнения (9):

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0}\exp(-\beta t), \tag{3.10}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{y0}\exp(-\beta t) + \frac{mg}{\alpha}[\exp(-\beta t) - 1].$$

С учетом начальных условий (6) подучим:

$$x = \frac{v_{x0}}{\beta}[1 - \exp(-\beta\, t)],$$

$$y = \frac{1}{\beta}\left(v_{y0} + \frac{g}{\beta}\right)[1 - \exp(-\beta\ t)] - \frac{g\, t}{\beta} + h. \tag{3.11}$$

Теперь можно определить координаты места контакта материальной точки с поверхностью, расположенной под углом γ к горизонту. Для этого следует решить уравнения (11) совместно с уравнением наклонной поверхности (в рассматриваемом примере это линия):

$$y = x\, \mathrm{tg}\varphi = x\, \mathrm{tg}20^{\circ} = 0{,}364\, x. \tag{3.12}$$

Подставляя (11) в (12), после преобразований получим:

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{g}{\beta} + v_{y0} - v_{x0}\ \mathrm{tg}\varphi\right)[1 - \exp(-\beta\, t)] - \frac{g\, t}{\beta} + h = 0. \tag{3.13}$$

Будем искать корни этого трансцендентного уравнения методом половинного деления. Для определения границ возможного решения рассмотрим случай движения материальной точки в среде без учета сил сопротивления. В этом случае:

$$\lim_{\beta \to 0}\left[\frac{1}{\beta}\left(1 - \exp(-\beta\, t)\right)\right] = t,$$

$$\lim_{\beta \to 0}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(1 - \exp(-\beta\, t) - \beta\, t\right)\right] = -\frac{t^2}{2}.$$

Уравнение (13) примет вид

$$t^2 - \frac{2}{g}(v_{y0} - v_{x0}\ \mathrm{tg}\varphi)\, t - \frac{2h}{g} = 0. \tag{3.14}$$

Отсюда время движения материальной точки до момента контакта с наклонной поверхностью будет

$$t_p = \frac{v}{g}(\sin\gamma - \cos\gamma \cdot tg\varphi) + \sqrt{\frac{v^2}{g^2}(\sin\gamma - \cos\gamma \cdot tg\varphi)^2 + \frac{2h}{g}}\ . \qquad (3.15)$$

Подстановка численных значений дает

$$t_p = \frac{854}{9{,}8}(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot tg\varphi 20^\circ) +$$

$$+\sqrt{\frac{854^2}{9{,}8^2}(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot tg\varphi 20^\circ)^2 + \frac{40}{9{,}8}} = 32{,}3 с.$$

Значение корня уравнения (13) находится между 0 и 32,3 с. Подставим значение времени в формулы (11) и получим

$$x_M = 1490 \text{ м}, \qquad y_M = 280 \text{ м}.$$

Из уравнения наклонной плоскости (12) получим

$$y = x\, tg\varphi = x\, tg 20^\circ = 0{,}364\, x = 0{,}364 \cdot 1480 = 538 \text{ м},$$

т.е. точка находится ниже наклонной плоскости.

При $t = 16{,}1$ с, $x = 1480$ м,

$y = 597$ м.

Далее методом половинного деления получим:

$t = 19{,}1$ с, $x_M = 1479$ м,

$y_M = 538$ м.

При ручном счете точку падения можно определить графически. Для этого следует, например, определить координаты точки при t_p, а затем при $t = t_p/2$ или при $t = 3t_p/2$, в зависимости от того пересекла траектория точки наклонную плоскость или нет, а затем по трем точкам построить приближенно траекторию движешь точки и из рисунка определить место ее пересечения с наклонной плоскостью.

Ответ: $t = 19{,}1$ с, $x_M = 1479$ м, $y_M = 538$ м.

Задание Д2

Задача Д2 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Решение задачи рекомендуется проводить в следующей последовательности:

1. Изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы.
2. Вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы.
3. Вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы.
4. Воспользовавшись результатами вычислений пунктов 2 и 3, записать теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек: $$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^i)$$

и определить искомую величину.

Пример выполнения задачи Д2

Грузоподъемная установка состоит из барабана с осевым моментом инерции $J = 44$ кг·м² и радиусом $r = 20$ см, невесомого и нерастяжимого троса и груза массой $m = 10^3$ кг, перемещающегося по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, с коэффициентом трения $f = 0{,}2$. К барабану приложен постоянный вращающий момент $M = 3$ кН·м.

Определить угловую скорость барабана после того, как он повернется на угол $\varphi = 10$ рад, если движение началось из состояния покоя.

Решение:

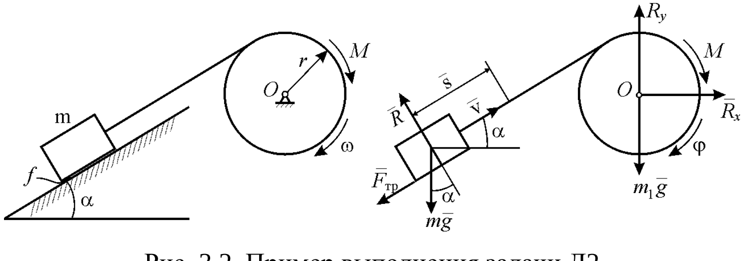


Рис. 3.2. Пример выполнения задачи Д2

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^i).$$

По условию трос нерастяжим и отсутствует проскальзывание троса относительно барабана. Внутренние силы в данной системе не работают.

Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^i) = 0$,

поэтому изменение кинетической энергии будет определяться только работами внешних сил: $T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e)$.

Движение системы начинается из состояния покоя, поэтому начальная кинетическая энергии системы $T_0 = 0$:

$$T = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e).$$

Кинетическая энергия системы, состоящей из поступательно движущегося груза и вращающегося барабана,

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Кинетическая связь между скоростью груза v и угловой скоростью барабана ω может быть установлена из условия нерастяжимости троса и отсутствия проскальзывания троса относительно барабана $v = \omega r$.

Тогда $$T = \frac{1}{2}(m r^2 + J)\,\omega^2 \qquad (3.16).$$

Вычислим работы внешних сил.

Внешние силы и соответствующие им перемещения показаны на рисунке. На рисунке S – перемещение груза, φ – угловое перемещение барабана.

Сила тяжести барабана $m_1\bar{g}$ и соответствующие проекции реакции на оси $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$ работу не совершают, т.к. отсутствует перемещение точки их приложения – точки О.

Нормальная реакция груза $\bar{R}$ перпендикулярна перемещению груза, поэтому работа этой силы также равна нулю.

Ненулевую работу совершают: сила тяжести груза $m\bar{g}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$ и вращающий момент M :

$$A_{mg} = m\bar{g}\,\bar{s} = mg\, s\cos(\alpha + 90^\circ) = -mg\, s\sin\alpha\,;$$

$$A_{F_{тр}} = \bar{F}_{тр}\,\bar{s} = F_{тр}\, s\cos 180^\circ = -F_{тр}\, s\,;$$

$$A_M = M\,\varphi\,.$$

Учитывая, что $F_{тр} = f\,R = f\,mg\,s\cos\alpha$, и устанавливая связь между перемещениями $s = \varphi r$ путем интегрирования уравнения связи $v = \omega\, r$, суммарную работу запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A(\bar{F}_k^e) = [M - mg(\,f\cos\alpha + \sin\alpha)r]\varphi \qquad (3.17).$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$\frac{1}{2}(mr^2 + J)\,\omega^2 = [M - mg(\,f\cos\alpha + \sin\alpha)r]\varphi\,,$$

откуда определяется искомая угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{2[M - mg(\,f\cos\alpha + \sin\alpha)r]\varphi}{mr^2 + J}}$$

$$\omega = 27{,}6 \text{ 1/с.}$$

Ответ: $\omega = 27{,}6$ 1/с.

2.4.2. Задания для контрольной работы
Часть 3 «Динамика»

Задание Д1

<u>Выбор варианта.</u> **Числовые данные к задаче студент выбирает в соответствии со своим номером в журнале.**

Тело, массой m, которое считается материальной точкой, перемещается из состояния покоя по шероховатой наклонной плоскости под действием движущей силы $\overline{F}$. Угол наклона поверхности γ. Высота уступа h. Коэффициент трения скольжения о плоскость f.

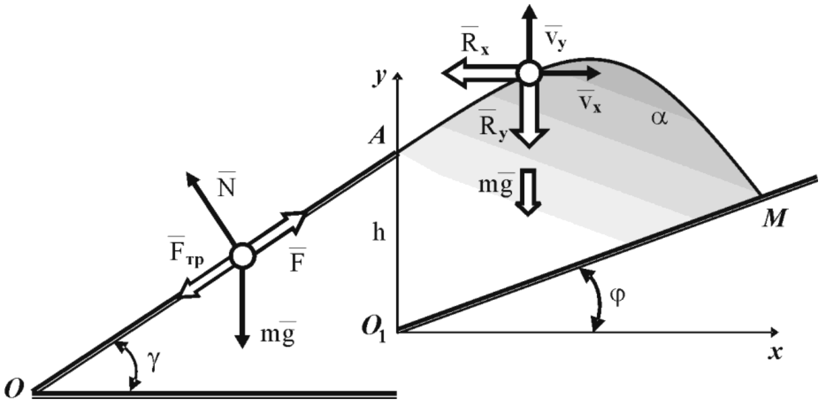


Рис.3.3.

Через время t, а в том случае, если сила зависит от перемещения, после прохождения точкой заданного расстояния S, тело оказывается на ее краю и далее продолжает свободное движение под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и силы сопротивления среды $\vec{R} = -\alpha \cdot \vec{v}$. Движение тела происходит до падения его на другую наклонную (под углом φ) плоскость в точке М.

Требуется:

1. Определит координаты точки падения тела: x_M, y_M.
2. Время движения тела до момента падения его в точке М.

Таблица 3. Исходные данные к задаче Д1

№	Угол γ, град	Угол φ, град	Движущая сила F
1.	0	0	$a+\mu$
2.	0	10	$a+\mu t$
3.	0	20	$a+\mu t^2$
4.	0	30	$(a+\mu t)^2$
5.	10	0	$a-\mu v$
6.	10	10	$a-\mu v^2$
7.	10	20	$a+\mu s$
8.	-10	30	$a+\mu s^2$
9.	-10	0	$a-\mu s$
10.	-10	10	$\dfrac{a}{1-\mu v}$
11.	20	20	$a+\dfrac{1}{1-\mu v}$
12.	20	30	$a+\dfrac{1}{(1-\mu v)^2}$
13.	20	0	$a+\dfrac{1}{1+\mu v}$
14.	-20	-10	$a+\dfrac{1}{1+\mu s^2}$
15.	-20	-20	$a+\mu\sqrt{s}$

16.	-20	-30	$\dfrac{1}{a+1-\mu t}$
17.	10	0	$a+\mu t^2$
18.	10	-10	$a+\dfrac{\mu t^3}{a}$
19.	10	-20	$a+\mu v$
20.	-10	-30	$a-\mu s$
21.	-10	0	$a+\dfrac{\mu}{a-s}$
22.	-20	-10	$a+\dfrac{\mu}{a-t}$
23.	-20	-20	$a-\dfrac{1}{(1-\mu s)^2}$
24.	-20	-30	$1+\dfrac{1}{a-\mu s}$
25.	-20	0	$\dfrac{1}{a+\mu s}$
26.	0	-10	$a+\mu s$
27.	10	-20	$a+\mu\sqrt{t}$
28.	-10	10	$a-\mu\sqrt{t}$
29.	20	-10	$a+\mu\sqrt{s}$
30.	-20	-20	$a-\mu\sqrt{s}$

Таблица 4. Исходные данные к задаче Д1

Значения величин	Вариант 1-5	Вариант 6-10	Вариант 11-15	Вариант 16-30
Масса m, кг	10	20	30	40
Высота h, кг	40	30	20	10
Коэффициент трения скольжения f	0,1	0,2	0,1	0,2
Коэффициент сопротивления среды, α, $\text{Н} \cdot \text{с/м}$	1	2	1	2
Время движения по поверхности t, с	10	20	15	5
Расстояние s, м	10	20	15	5
Коэффициент a	200	400	600	400
Коэффициент μ	30	30	10	20

Коэффициенты a и μ имеют такую размерность, что при подстановке их в конкретную формулу результат имеет размерность силы в ньютонах.

\

Задание Д2

<u>Выбор варианта.</u> **Вариант задачи и числовые данные к ней студент выбирает в соответствии со своим номером в журнале.**

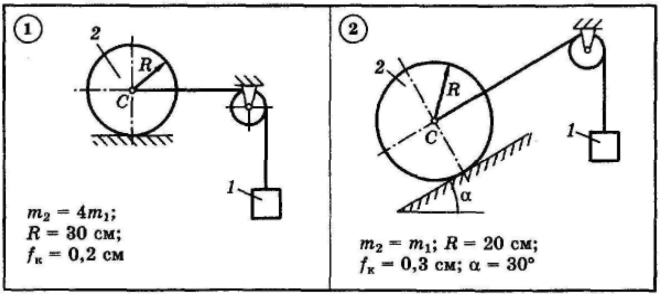
Схемы механических систем приведены на рисунке 3.4. Движение начинается из состояния покоя.

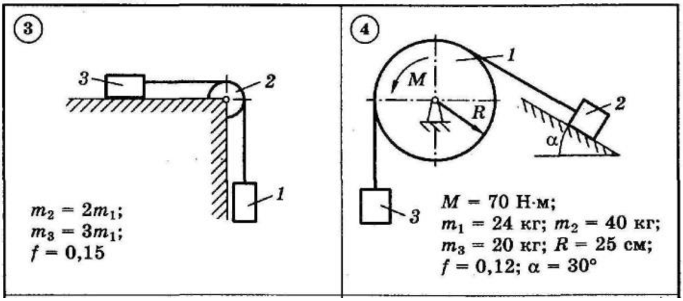
Требуется:

Используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, определить

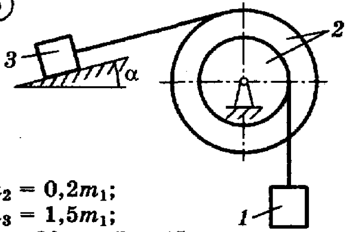
– варианты **4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28** – угловую скорость тела ***1*** после его заданного перемещения $\varphi_1 = 2\pi$ рад;

– **остальные варианты** – линейную скорость тела ***1*** после его заданного перемещения $s_1 = 2$ м.



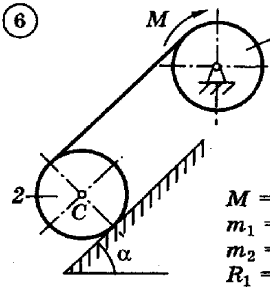


5



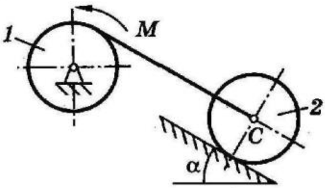
$m_2 = 0{,}2m_1$;
$m_3 = 1{,}5m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R = 45$ см;
$\rho_2 = 25$ см; $f = 0{,}1$;
$\alpha = 15°$

6



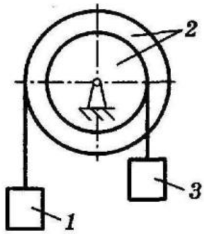
$M = 40$ Н·м;
$m_1 = 15$ кг;
$m_2 = 35$ кг;
$R_1 = 20$ см;
$\alpha = 45°$

7



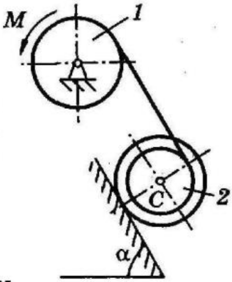
$M = 120$ Н·м;
$m_1 = 30$ кг; $m_2 = 42$ кг;
$R_1 = 40$ см; $\alpha = 30°$

8



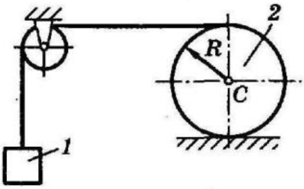
$m_2 = 0{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 25$ см; $R_2 = 55$ см;
$\rho_2 = 40$ см

9



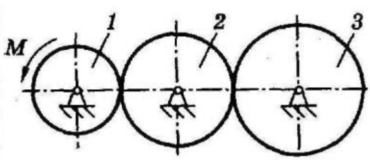
$m_1 = 15$ кг;
$m_2 = 32$ кг;
$R_1 = 20$ см;
$r_2 = 15$ см;
$R_2 = 40$ см;
$\rho_2 = 20$ см;
$\alpha = 60°$;
$M = 120$ Н·м

10



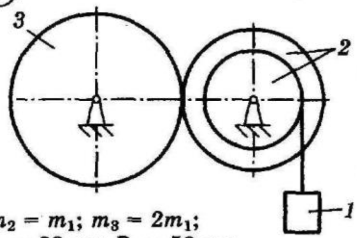
$m_2 = 6m_1$; $R = 45$ см;
$f_к = 0{,}2$ см

(11)



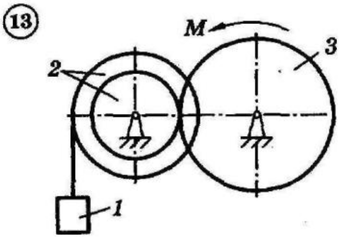
$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 10$ кг;
$m_3 = 40$ кг; $M = 60$ Н·м;
$R_1 = 30$ см

(12)



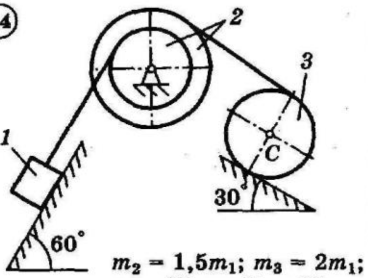
$m_2 = m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см

(13)



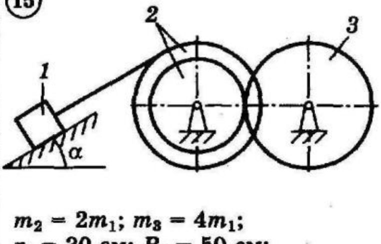
$M = 220$ Н·м; $m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 8$ кг; $m_3 = 15$ кг; $r_2 = 40$ см;
$R_2 = 60$ см; $R_3 = 70$ см; $\rho_2 = 50$ см

(14)



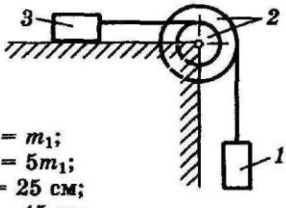
$m_2 = 1{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 55$ см;
$\rho_2 = 40$ см

(15)



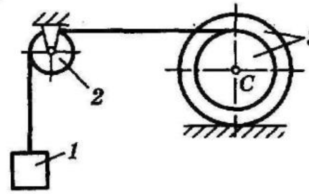
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 4m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $f = 0{,}2$; $\alpha = 30°$

(16)



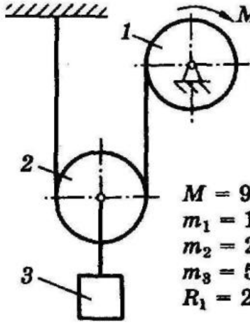
$m_2 = m_1$;
$m_3 = 5m_1$;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$f = 0{,}2$

(17)



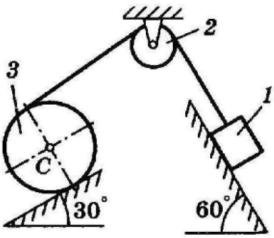
$m_2 = 3m_1$; $m_3 = 7m_1$;
$r_3 = 30$ см; $R_3 = 50$ см;
$\rho_3 = 40$ см

(18)



$M = 90$ Н·м;
$m_1 = 10$ кг;
$m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 20$ см

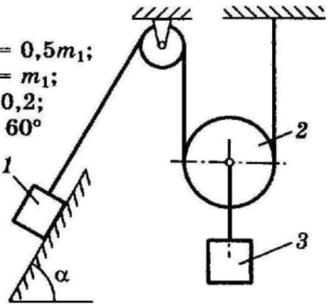
(19)



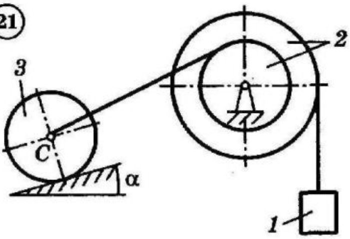
$m_2 = 0{,}6m_1$; $m_3 = 3m_1$

(20)

$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = m_1$;
$f = 0{,}2$;
$\alpha = 60°$

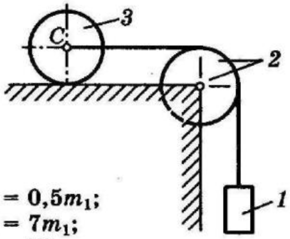


(21)



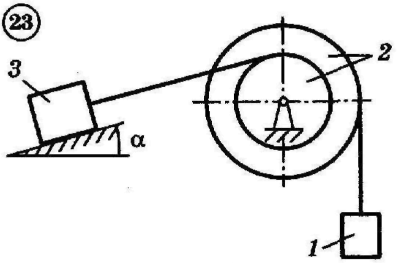
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 5m_1$;
$\rho_2 = 40$ см; $r_2 = 30$ см;
$R_2 = 50$ см; $\alpha = 15°$

(22)



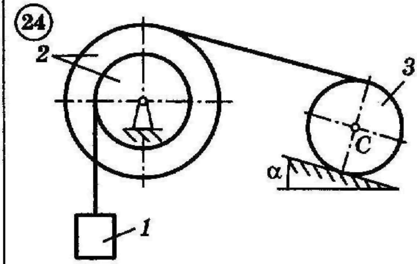
$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = 7m_1$;
$R_3 = 40$ см;
$f_к = 0{,}25$ см

23



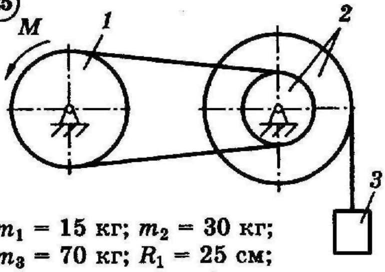
$m_2 = 1{,}5m_1$; $m_3 = 6m_1$;
$r_2 = 20$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $f = 0{,}1$; $\alpha = 15°$

24



$m_2 = m_1$; $m_3 = 2{,}5m_1$;
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $\alpha = 15°$

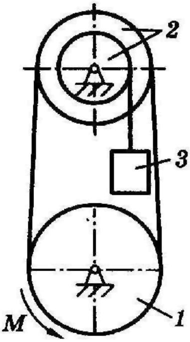
25



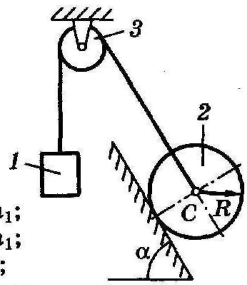
$m_1 = 15$ кг; $m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 70$ кг; $R_1 = 25$ см;
$R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $M = 480$ Н·м

26

$m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 50$ см;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$M = 180$ Н·м

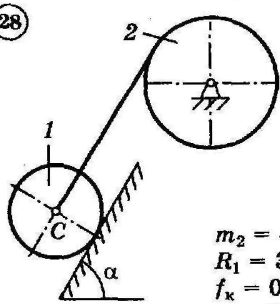


27



$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = 0{,}5m_1$;
$R = 25$ см;
$f_к = 0{,}28$ см;
$\alpha = 60°$

28



$m_2 = 4m_1$;
$R_1 = 30$ см;
$f_к = 0{,}3$ см;
$\alpha = 60°$

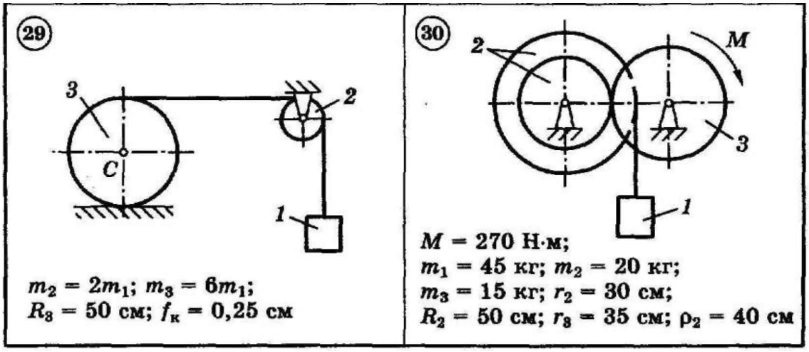


Рис.3.4. Схемы к задаче Д2

Основная литература

1. Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько, В. А. Волосухин, А. Н. Кабельков, О. А. Бурцева. - 2-е изд., испр. и доп. - Ростов н/Д: Феникс, 2015. - 302 с.: ил., табл. - (Высшее образование). - Гриф: Рек. НМС МО. - Библиогр.: с. 296. - ISBN 978-5-222-22787-9
2. Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Кульгина, Л. М. Теоретическая механика: курс лекций / Л. М. Кульгина, А. Р. Закинян, Ю. Л. Смерек. — Ставрополь: СевероКавказский федеральный университет, 2015. — 118 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/62871.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература

1.Антонов, В. И. Теоретическая механика (статика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23750.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2. Антонов, В. И. Теоретическая механика (кинематика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23749.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

По дисциплине «Теоретическая механика»

Вариант -

Выполнил:
Студент курса
Группы
Направления 15.03.02
____
(ФИ студента)
____
(подпись)

Руководитель работы:

Работа выполнена и защищена с оценкой______________

Дата защиты________________

Невинномысск
2020

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт (филиал) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ
по дисциплине «Теоретическая механика»
для студентов очной формы обучения
направления подготовки
15.03.02 Технологические машины и оборудование

Невинномысск 2020

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями ФГОС ВО и рабочей программы дисциплины «Теоретическая механика». Указания предназначены для студентов очной формы обучения направления подготовки 15.03.02 Технологические машины и оборудование. Содержат основные разделы изучаемого теоретического материала, перечень вопросов необходимых для проработки, а также список рекомендуемой литературы.

Составители *Г.В. Кукинова, канд. техн. наук, доцент*

Отв. редактор *А.Л. Проскурнин, канд. хим. наук, доцент.*

Содержание

Введение

Дисциплина «Теоретическая механика» относится к вариативной дисциплине базовой части. Она направлена на формирование профессиональной компетенции обучающихся в процессе выполнения работ, определенных ФГОС ВО.

Методические указания составлены на современном научном уровне и рассчитаны на студентов, обучающихся по направлению 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

Последовательность тем соответствует логической структуре ее прохождения. Предлагаемые методические указания содержат материал, который рекомендуется использовать студентам при подготовке к практическим занятиям.

Для подготовки к практическим занятиям студент должен изучить материал по соответствующей теме, используя основную и дополнительную литературу, а также используя периодические издания СМИ.

Практические занятия - один из основных информационных компонентов учебного процесса подготовки будущих специалистов. Они придают материалу, полученному на лекциях, профессиональную направленность, трансформируя теоретические знания в умения и навыки во время практических и лабораторных занятий, активных производственных практик.

Практические работы решают одну из важнейших задач дидактики - связь теории с практикой. При этой форме подготовки специалиста могут быть практически учтены все изменения в программах, отражающие новые достижения в области науки и техники, а также методические рекомендации, построенные на изучении передового педагогического опыта. Практические занятия имеют большое воспитательное значение, способствуют развитию мышления и приобретению профессиональной уверенности у студентов. Практические работы призваны обеспечить реализацию целого комплекса целей и задач:

- развитие и воспитание у студентов навыков высокой культуры труда, навыков выполнения заданий в срок;
- способность к самостоятельному анализу состояния конкретной учебно-научной проблемы, к выполнению практического задания с обсуждением предлагаемых вариантов его решения;
- понимание студентами теоретических основ, на которых базируется данная практическая работа, связи теории с практикой;
- развитие творческого мышления, технических способностей и наблюдательности в ходе реальных технологических процессов;
- умение анализировать и обобщать полученные результаты; делать из них логические выводы и находить им практическое применение;
- формирование интереса к самостоятельному поиску, эксперименту;
- выработка умения четко, точно, лаконично и грамотно формулировать свои мысли, участвовать в научной дискуссии;
- умение руководить познавательной деятельностью учащихся и направлять их интерес к технике, формировать рационализаторский подход к существующим технологиям;
- умение пользоваться учебной, научно-популярной и справочной литературой, графиками, таблицами и соответствующими схемами;
- умение подбирать аудиовизуальные средства обучения и дидактические материалы по конкретным темам программы.

Таким образом, практические занятия таят в себе большие резервы для творческой самостоятельности студентов. И как результат, знания, полученные при выполнении данных лабораторно-практических работ, помогут до минимума сократить срок адаптации молодого специалиста в первоначальный период работы.

ТЕМА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы

Знать: законы преобразования систем сил; условия равновесия систем сил на плоскости и в пространстве и условия равновесия тел; трения скольжения и сопротивление качению на равновесие тел.

Уметь: определять силы реакций, действующих на тело, и силы взаимодействия между телами системы.

Наименование формируемых компетенций

Код	Формулировка
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию
ПК-5	способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования

Актуальность темы. Решение задач статики, приведенных в методических указаниях, сводится к определению реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь.

Теоретическая часть

Приступая к решению задания, необходимо разобраться в условии задачи и рисунке, а затем:

1. Составить расчетную схему, которая включает:

- объект равновесия,
- активные (заданные) силы,
- силы реакции, заменяющие действия отброшенных связей.

2. Определить вид полученной системы сил и выбрать, соответствующие ей, уравнения равновесия;
3. Выяснить, является ли задача статически определимой;
4. Составить уравнения равновесия и определить из них силы реакции;
5. Сделать проверку полученных результатов.

<u>При замене связей (опор) силами реакций помнить:</u>

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;
- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям.

Решение уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое из них. Поэтому, при составлении уравнений равновесия следует:

1) координатные оси располагать так, чтобы одна из осей была перпендикулярна к линии действия хотя бы одной из неизвестных сил, в этом случае проекция неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) за центр моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила в плоскости имеет две составляющие ее силы, то при вычислении момента силы вокруг некоторой точки О, полезно применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки.

Если к телу в числе других сил приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил, куда вносится момент этой пары, с соответствующим, знаком

Практическое занятие № 1. Определение реакций опор горизонтальной балки от заданной нагрузки.

Задание: Определить реакции опор горизонтальной балки от заданной нагрузки.

Дано:

Схема балки (рис.1).

$\mathbf{P = 20кН \;\; G = 10кН \;\; M = 4кН \cdot м \;\; q = 2 \, кН/м}$

$\mathbf{a = 2м \;\; b = 3м \;\; \alpha^0 = 30^0}$

Определить реакции опор в точках **A** и **B**.

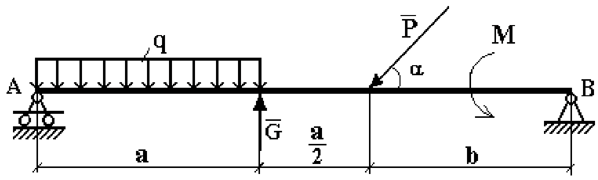


Рис. 1.

Решение:

Рассмотрим равновесие балки **AB** (рис. 1.1).

К балке приложена уравновешенная система сил, состоящая из активных сил и сил реакции.

Активные (заданные) силы: $\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{G}}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, пара сил с моментом **M**, где

$\overline{\mathbf{Q}}$ - сосредоточенная сила, заменяющая действие распределенной вдоль отрезка AC нагрузки интенсивностью $\mathbf{q}$.

Величина

$$\mathbf{Q = q \cdot AC = q \cdot a = 2 \cdot 2 \frac{кН}{м} \cdot м = 4кН}$$

.

Линия действия силы $\overline{\mathbf{Q}}$ проходит через середину отрезка AC.

Силы реакции (неизвестные силы): $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{A}, \overline{\mathbf{X}}_\mathbf{B}, \overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{B}$

$\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{A}$ - заменяет действие отброшенного подвижного шарнира (опора А).

Реакция $\overline{\mathbf{R}}_\mathbf{A}$ перпендикулярна поверхности, на которую опираются катки подвижного шарнира.

$\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{B}$ - заменяют действие отброшенного неподвижного шарнира (опора В).

$\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{B}$ - составляющие реакции, направление которой заранее неизвестно.

Расчетная схема

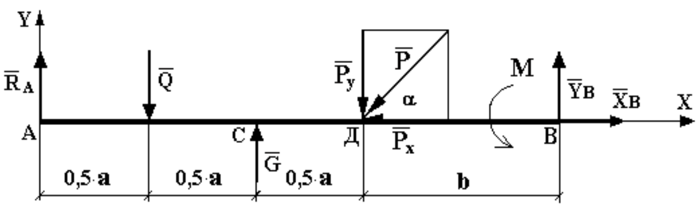


Рис. 1.1

Для полученной плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0, \ \sum F_{KY} = 0 \ , \sum M_0\left(\overline{F}_K\right) = 0.$$

Задача является статически определимой, так как число неизвестных сил три - равно числу уравнений равновесия.

Поместим систему координат **XY** в точку А, ось **AX** направим вдоль балки. За центр моментов всех сил выберем точку В.

Составим уравнения равновесия:

1) $\sum F_{KX} = 0 \rightarrow X_B - P \cdot \cos\alpha = 0;$

2) $\sum F_{KY} = 0 \rightarrow R_A - Q + G - P \cdot \sin\alpha + Y_B = 0;$

3) $\sum M_B\left(\overline{F}_K\right) = 0 \rightarrow M + P \cdot \sin\alpha \cdot b - G \cdot (b + 0{,}5 \cdot a) + Q \cdot (a + b) - R_A \cdot (1{,}5 \cdot a + b) = 0.$

Решая систему уравнений, найдем

$$X_B = P \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 30^0 \approx 20 \cdot 0{,}866 = 17{,}32\text{кН}.$$

1 →

$$R_A = \frac{1}{(1{,}5 \cdot a + b)}\left[M + P \cdot \sin\alpha \cdot b - G \cdot (b + 0{,}5 \cdot a) + Q \cdot (a + b)\right] =$$

$$= \frac{1}{1{,}5 \cdot 2} \cdot \left[4 + 20 \cdot \sin 30 \cdot 3 - 10 \cdot (3 + 1) + 4 \cdot (2 + 3)\right] = \frac{1}{6} \cdot \left[4 + 30 - 40 + 20\right] =$$

3 →

$$= \frac{14}{6} \approx 2{,}333\text{кН}.$$

$$Y_B = Q - G + P \cdot \sin\alpha - R_A = 4 - 10 + 20 \cdot \sin 30^0 - 2{,}333 = 4 - 2{,}333 = 1{,}667\text{кН}.$$

Определив, , найдем величину силы реакции неподвижного шарнира

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{17{,}32^2 + 1{,}667^2} = \sqrt{299{,}9824 + 2{,}778889} \approx 17{,}4\text{кН}.$$

В целях проверки составим уравнение

$$\sum M_Б\left(\overline{F}_K\right) = -R_A \cdot 1{,}5 \cdot \text{€} + Q \cdot a - G \cdot 0{,}5 \cdot \text{€} + M + Y_B \cdot b.$$

Если в результате подстановки в правую часть этого равенства данных задачи и найденных сил реакций получим нуль, то задача решена - верно.

$$\sum M_Д\left(\overline{F}_K\right) = -2{,}333 \cdot 1{,}5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + 4 + 1{,}667 \cdot 3 = -6{,}999 + 8 - 10 + 4 + 5{,}001 =$$

$$= 17{,}001 - 16{,}999 = 0{,}002 \approx 0.$$

Реакции найдены верно. Неточность объясняется округлением при вычислении.

Ответ:

$$R_A = 2{,}333\text{кН}.$$

ТЕМА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Практическое занятие № 2. Определение реакции опор плоской рамы от заданной нагрузки

Задание: Для заданной плоской рамы определить реакции опор.

Дано:

Схема рамы рис. 1.2

$P = 20\text{кН} \ G = 10\text{кН} \ M = 4\text{кН} \cdot \text{м} \ q = 2\,{}^{\text{кН}}\!/_{\text{м}}$

$\mathbf{a = 2м \;\; b = 3м \;\; \alpha^0 = 30^0}$

Определить реакции опор рамы.

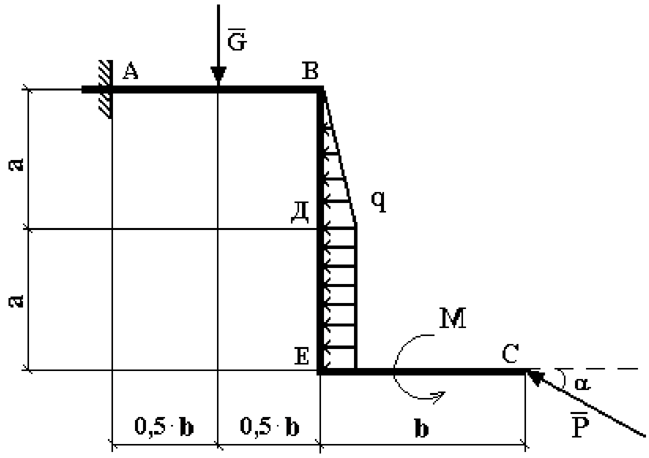


Рис. 1.2

Решение:

Рассмотрим равновесие жесткой рамы АВЕС (рис. 1.3).

Расчетная схема

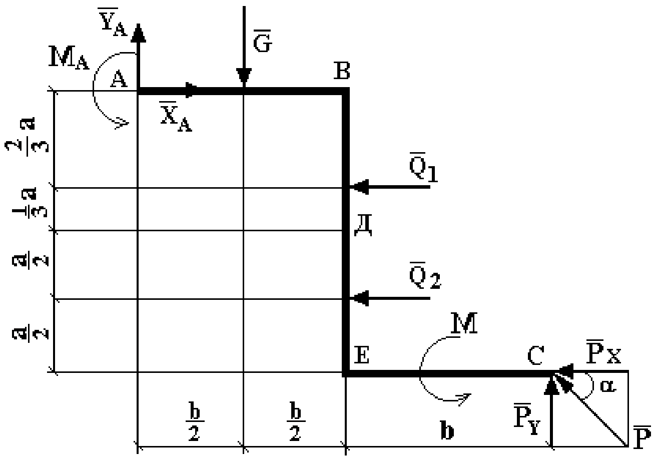


Рис. 1.3

Система сил приложенных к раме состоит из активных сил и сил реакций.

Активные силы:

$\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{G}}$ пара сил с моментом $\mathbf{M}$ $\overline{\mathbf{Q_1}}$ $\overline{\mathbf{Q_2}}$

$\overline{\mathbf{Q_1}}$, $\overline{\mathbf{Q_2}}$

заменяют действие распределенной нагрузки на отрезках ВД и ДЕ.

$$\mathbf{Q_1 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot ВД = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2кН.}$$

Линия действия силы $\overline{\mathbf{Q_1}}$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3} \cdot \mathbf{a}$ от точки В.

$$\mathbf{Q_2 = q \cdot ДЕ = q \cdot a = 4кН.}$$

Линия действия силы проходит через середину отрезка ДЕ.

<u>Силы реакции:</u>

$\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{A}}$ $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$ - заменяют действие жесткого защемления, которое ограничивает любое перемещение рамы в плоскости чертежа.

К раме приложена плоская произвольная система сил. Для нее можем составить три уравнения равновесия:

$$\sum \mathbf{F_{KX}} = \mathbf{0},\ \sum \mathbf{F_{KY}} = \mathbf{0}, \sum \mathbf{M_0}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{KX}}\right) = \mathbf{0}.$$

Задача является статистически определимой, так как число неизвестных тоже три - $\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$

Составим уравнения равновесия, выбрав за центр моментов точку А, так как ее пересекают наибольшее число неизвестных сил.

1) $\sum \mathbf{F_{KX}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{X_A} - \mathbf{Q_1} - \mathbf{Q_2} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{cos}\alpha = \mathbf{0};$

2)_ $\sum \mathbf{F_{KY}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{Y_A} - \mathbf{G} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{sin}\alpha = \mathbf{0};$

3) $$\sum M_A\left(\overline{F}_K\right) = 0 \rightarrow M_A - G \cdot 0{,}5 \cdot b - Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a - Q_2 \cdot 1{,}5 \cdot a + M + P \cdot \sin\alpha \cdot 2b -$$
$$- P \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot a = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем неизвестные величины

1 → $\mathbf{X_A = Q_1 + Q_2 + P \cdot cos\alpha = 2 + 4 + 20 \cdot cos 30^0 = 6 + 20 \cdot 0{,}866 = 23{,}32}$**кН;**

2 → $\mathbf{Y_A = G + P \cdot sin\alpha = 10 - 20 \cdot sin 30^0 = 10 - 10 = 0;}$

3 → $$M_A = G \cdot 0{,}5 \cdot b + Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a + Q_2 \cdot 1{,}5 \cdot a - M - P \cdot \sin\alpha \cdot 2b + P \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot a = 10 \cdot 0{,}5 \cdot 3 +$$
$$+ 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 - 4 - 20 \cdot \sin 30^0 \cdot 6 + 20 \cdot \cos 30^0 \cdot 2 \cdot 2 = 15 + \frac{8}{3} + 12 - 4 - 60 +$$
$$+ 80 \cdot 0{,}866 = 34{,}947 \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для проверки полученных результатов составим уравнение моментов вокруг точки С.

$$\sum \mathbf{M_C}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{K}}\right) = \mathbf{M + Q_2 \cdot \frac{a}{2} + Q_1 \cdot \left(a + \frac{1}{3} \cdot a\right) + G \cdot 1{,}5 \cdot b - X_A \cdot 2 \cdot a - Y_A \cdot 2 \cdot b + M_A}.$$

Подставляя все значения, получим

$$\sum \mathbf{M_C}\left(\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{K}}\right) = \mathbf{4 + 4 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) + 10 \cdot 4{,}5 - 23{,}32 \cdot 2 \cdot 2 - 0 + 34{,}947 = 4 + 4 + 5{,}333 +}$$
$$\mathbf{+ 45 - 93{,}28 + 34{,}947 = 93{,}28 - 93{,}28 = 0.}$$

Реакции найдены верно.

<u>Ответ:</u>

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X_A} &= \mathbf{23{,}32}\text{кН} \\ \mathbf{Y_A} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \rightarrow \mathbf{R_A = X_A = 23{,}32}\text{кН}.$$

$$\mathbf{M_A = 34{,}947}\text{кН} \cdot \text{м}.$$

ТЕМА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Практическое занятие № 3. Графический способ определения реакции стержней.

Задание: Определить реакции стержней 2 и 3, считая их концы закрепленными шарнирно.

Дано:

В узле нижнего пояса фермы сходятся четыре стержня (рисунок 1.4, а). На узел действует нагрузка от подвесного потолка P = 20 кН. Реакции стержней 1 и 4 равны N_1 = 100 кН и N_4 = 70 кН.

Р Е Ш Е Н И Е

Так как узел фермы находится в равновесии, то многоугольник из трех заданных и двух искомых сил должен быть замкнутым. Примем масштаб сил m_P = 2 кН/мм и, выбрав произвольную точку о, начнем строить замкнутый многоугольник сил. Сначала отложим все известные силы: $\mathbf{N_1}$

(отрезок ОА = $\mathbf{N_1}$ / m_P = 100 / 2 = 50 мм),

P (отрезок AB = P / m_P = 20 / 2 = 10 мм)

$\mathbf{N_4}$ (отрезок BC = N_4 / m_P = 70 / 2 = 35 мм) (рисунок 1.6, б).

Из рисунка 1.6, в видно, что стержень 2 сжат, а стержень 3 растянут.

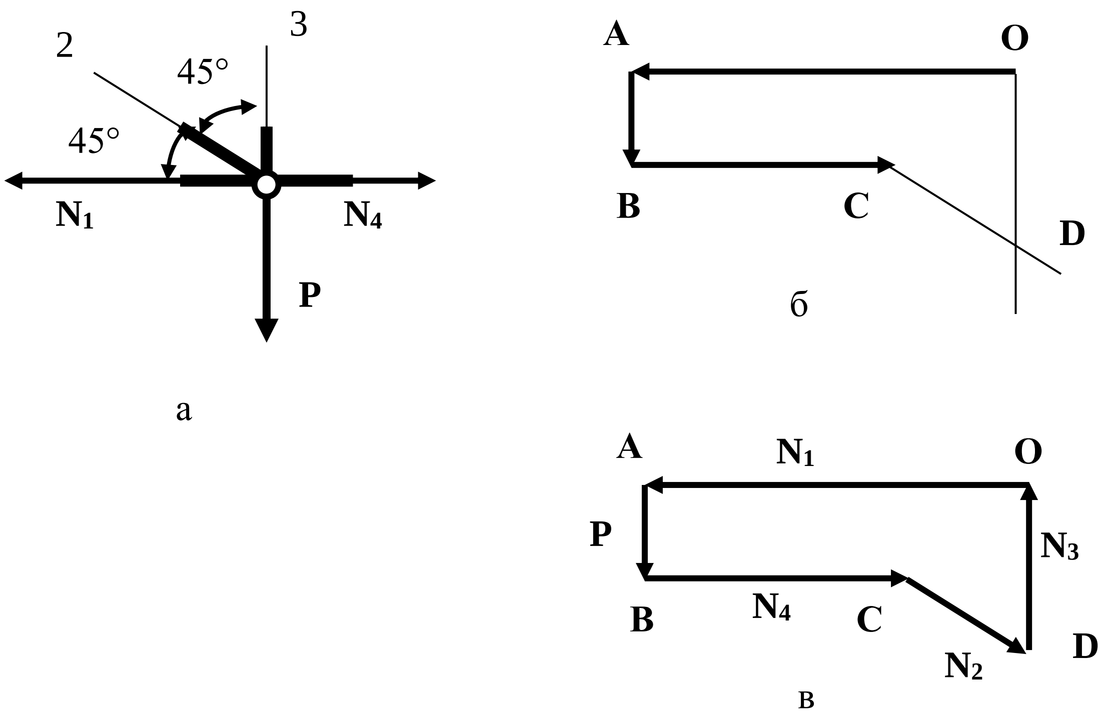


Рисунок 1.4

Силы $\mathbf{N_2}$ и $\mathbf{N_3}$ неизвестны, но известны их направления (силы $\mathbf{N_2}$ и $\mathbf{N_3}$ направлены вдоль стержней 2 и 3). Поэтому, зная, что силовой многоугольник должен быть замкнут, из точки С проводим прямую, параллельную стержню 2, а из точки О прямую, параллельную стержню 3 до точки их пересечения, которую обозначим точкой D (см. рисунок 1.4, б). Расставим направления неизвестных сил $\mathbf{N_2}$ и $\mathbf{N_3}$ так, чтобы получить силовой многоугольник замкнутым (рисунок 1.4, в).

Измерив длины отрезков CD и DO, получим CD = 21 мм, DO = 25 мм и с учетом масштаба построения найдем:

$$N_2 = CD\ m_P = 21 \text{ мм} * 2 \text{ кН/мм} = 42 \text{ кН}.$$
$$N_3 = DO\ m_P = 25 \text{ мм} *2 \text{ кН/мм} = 50 \text{ кН}.$$

Ответ: N_2 = 42 кН**,** $\mathbf{N_3}$ = 50 кН.

ТЕМА 1. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Практическое занятие № 4. Момент силы. Пара сил.

Цель занятия: приобретение навыков решения задач на определение момента силы относительно точки и пары сил, на равновесие рычага.

Задание: Определить момент силы относительно точки О.

Сила F = 420 Н, приложенная к точке А, лежит в плоскости Оху, если координаты $x_A = 0{,}2$ м, $y_A = 0{,}3$ м и угол $\alpha = 30^0$ (рисунок 1.5).

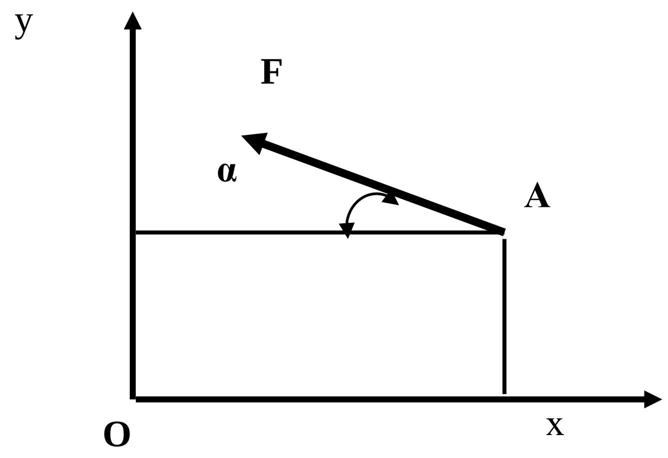


Рисунок 1.5

Р Е Ш Е Н И Е

1. Спроектируем силу **F** на оси координат, получим **Fx** и **Fy.** (рисунок 1.6).

$$F_Y = F \cdot \sin\alpha = 420 \cdot 0{,}5 = 210 \text{ Н}$$

$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 420 \cdot 0{,}866 = 363{,}72 \text{ Н}$$

2. Найдем момент этих сил относительно точки В.

$$M_B = F_X \cdot y_A + F_Y \cdot x_A =$$
$$= 363{,}72 \cdot 0{,}3 + 210 \cdot 0{,}2 \approx 151 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

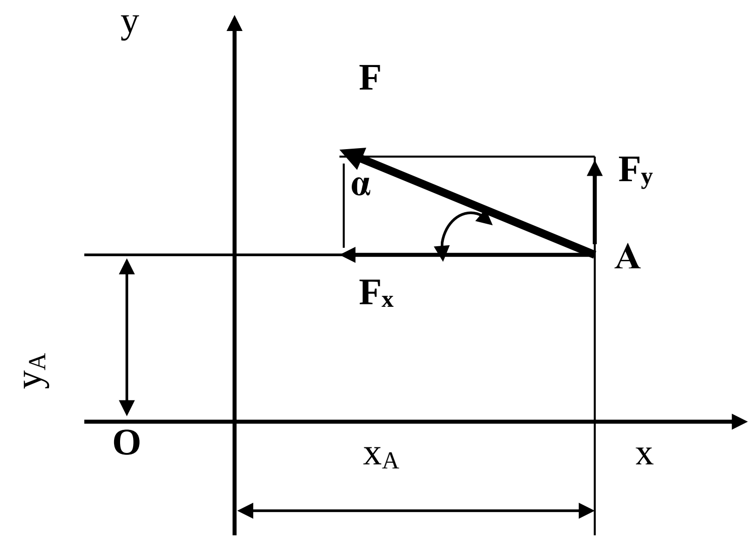


Рисунок 1.6

Ответ: M_B = 151 Н м.

Вопросы и задания:

Базовый уровень

1. Расчет и проектирование деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями.
2. Стандартные средства автоматизации проектирования.
3. Материальная точка, абсолютно твердое тело, сила, система сил, равнодействующая системы сил.
4. Основные задачи статики. Аксиомы статики.
5. Распределенные и сосредоточенные силы. Эквивалентная система сил.
6. Условия равновесия системы сходящихся сил.
7. Момент силы относительно центра.
8. Правило знаков для момента силы относительно центра.

Повышенный уровень

1. Сложение вращений вокруг пересекающихся и параллельных осей.
2. Метод остановки (Метод Виллиса) для определения угловых скоростей звеньев планетарного редуктора.
3. Теорема Кориолиса. Ускорение Кориолиса.
4. Динамика точки. Законы Ньютона.
5. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых и естественных осях

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература:

1 Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько, В. А. Волосухин, А. Н. Кабельков, О. А. Бурцева. - 2-е изд., испр. и доп. - Ростов н/Д: Феникс, 2015. - 302 с.: ил., табл. - (Высшее образование). - Гриф: Рек. НМС МО. - Библиогр.: с. 296. - ISBN 978-5-222-22787-9

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный

строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература:

1 Антонов, В. И. Теоретическая механика (статика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23750.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (кинематика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23749.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Интернет-ресурсы:

1 http://window.edu.ru/ – единое окно доступа к образовательным ресурсам

2 http://biblioclub.ru/ — ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

3 http://catalog.ncstu.ru/ — электронный каталог ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО

4 http://www.iprbookshop.ru — ЭБС.

5 https://openedu.ru – Открытое образование

ТЕМА 2. СТАТИКА

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы

Знать: законы преобразования систем сил; условия равновесия систем сил на плоскости и в пространстве и условия равновесия тел; трения скольжения и сопротивление качению на равновесие тел.

Уметь: определять силы реакций, действующих на тело, и силы взаимодействия между телами системы.

Наименование формируемых компетенций

Код	Формулировка
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию
ПК-5	способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования

Актуальность темы. Решение задач статики, приведенных в методических указаниях, сводится к определению реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь.

Теоретическая часть

Плоская произвольная система сил - система сил, как угодно расположенных, в одной плоскости.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра О были равны нулю.

Первая (основная) форма условий равновесия: для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки О, лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю.

ТЕМА 2. СТАТИКА

Практическое занятие № 5. Равновесие плоской системы сходящихся сил.

Цель занятия: овладение навыками решения практических задач на составление уравнений равновесия произвольной плоской системы сил, определение реакций опор.

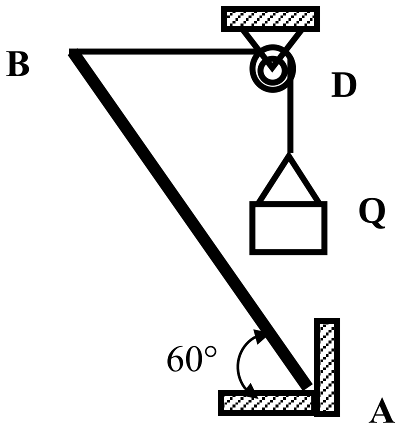
Задание: Определить вес груза и давление бруса на вертикальную и горизонтальную поверхности в положении равновесия.

Дано: Однородный брус весом P = 50 кН торцом A опирается на горизонтальную и вертикальную поверхность. К торцу B бруса прикреплен трос BD, перекинутый через блок D, несущий груз Q. Дина бруса AB = 2 м. Определить вес груза Q и давление бруса на вертикальную и горизонтальную поверхности в положении равновесия. Трением пренебречь (рисунок 2.1, а).

РЕШЕНИЕ

1. Приложим к заданному брусу внешние силы: заданную силу **P** (т.к. брус однородный, то сила **P** приложена в центре бруса C и направлена вертикально вниз), неизвестную по модулю силу Q, вызывающую натяжение троса BD, неизвестные реакции вертикальной поверхности $\mathbf{X_A}$ и горизонтальной поверхности $\mathbf{Y_A}$ (рисунок 2.1, б).

2. Выбираем систему отсчета (координат) XAY, оси направляем по $X_A; Y_A$.



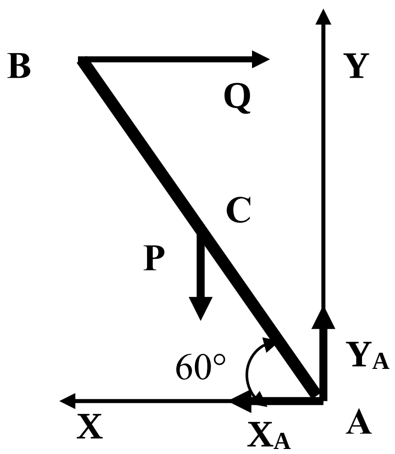


Рисунок 2.1

3. Составим аналитические уравнения условий равновесия, используя основную форму.

Полученная система сил – это произвольная система сил на плоскости, для которой:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - Q = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P = 0 \tag{2.2}$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad Q \times AB \sin 60^0 - P \times \frac{AB}{2} \times \cos 60^0 = 0 \tag{2.3}$$

Из уравнения (2.3) выражаем

$$Q = \frac{P \cdot AC \times \cos 60^0}{AB \sin 60^0} = \frac{50 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 14{,}45 \text{ кН}$$

Из уравнения (2.1)

$$X_A = Q = 14.45 \text{ кН}$$

Из уравнения (2.2)

$$Y_a = P = 50 \text{ кН}$$

Ответ: $X_A = Q = 14.45 \text{ кН}$, $Y_a = P = 50 \text{ кН}$

ТЕМА 2. СТАТИКА

Практическое занятие № 6. Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил

Цель занятия: овладение навыками решения практических задач на составление уравнений равновесия произвольной плоской системы сил, определение реакций опор.

Задание: Определить вес груза и давление бруса на вертикальную и горизонтальную поверхности в положении равновесия.

Дано:

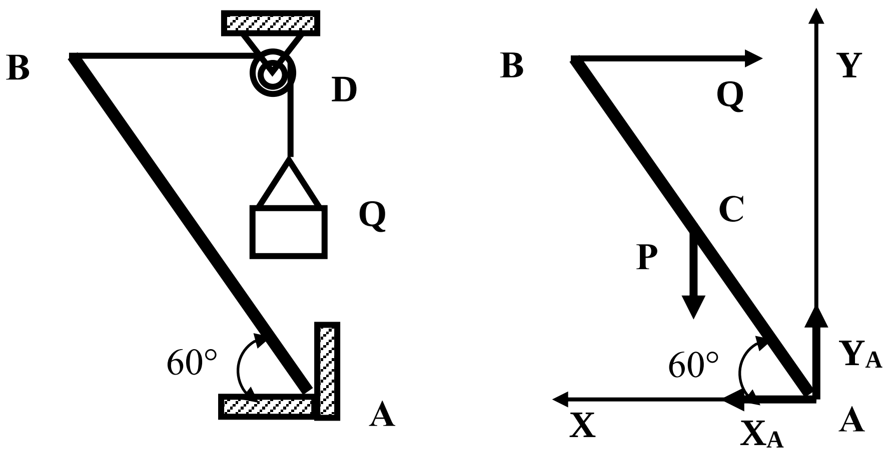
Однородный брус весом P = 50 кН торцом A опирается на горизонтальную и вертикальную поверхность. К торцу B брус прикреплен трос BD, перекинутый через блок D, несущий груз Q. Дина бруса AB = 2 м. Определить вес груза Q и давление бруса на вертикальную и горизонтальную поверхности в положении равновесия. Трением пренебречь (рисунок 2.2, а).

РЕШЕНИЕ

1. Приложим к заданному брусу внешние силы: заданную силу **P** (т.к. брус однородный, то сила **P** приложена в центре бруса C и направлена вертикально вниз),

неизвестную по модулю силу Q, вызывающую натяжение троса BD, неизвестные реакции вертикальной поверхности $\mathbf{X_A}$ и горизонтальной поверхности $\mathbf{Y_A}$ (рисунок 2.2, б).

2. Выбираем систему отсчета (координат) XAY, оси направляем по $X_A; Y_A$.



а б

Рисунок 2.2

3. Составим аналитические уравнения условий равновесия, используя основную форму.

Полученная система сил – это произвольная система сил на плоскости, для которой:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - Q = 0 \tag{3.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - P = 0 \tag{3.2}$$

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad Q \times AB\sin 60^0 - P \times \frac{AB}{2} \times \cos 60^0 = 0 \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.3) выражаем

$$Q = \frac{P \cdot AC \times \cos 60^0}{AB\sin 60^0} = \frac{50 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 14{,}45 \text{ кН}$$

Из уравнения (3.1)

$$X_A = Q = 14.45 \text{ кН}$$

Из уравнения (3.2)

$$Y_a = P = 50\,\text{кН}$$

Ответ: $X_A = Q = 14.45\,\text{кН}$, $Y_a = P = 50\,\text{кН}$

ТЕМА 2. СТАТИКА

Практическое занятие № 7. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Цель занятия: овладение навыками решения практических задач по составлению уравнений равновесия и определению неизвестных сил для плоской системы параллельных сил.

Задание: Определить реакции опор балки.

Дано:

Горизонтальная консольная балка AB опирается на две опоры. К торцу B балки прикреплен трос, перекинутый через блок D и несущий груз весом Q = 500 Н, при этом AC = 2 м, CB = 1м . Углы α = 30° и β = 60° (рисунок 2.3, а). Определить реакции опор балки. Весом балки, троса и трением в блоке – пренебречь.

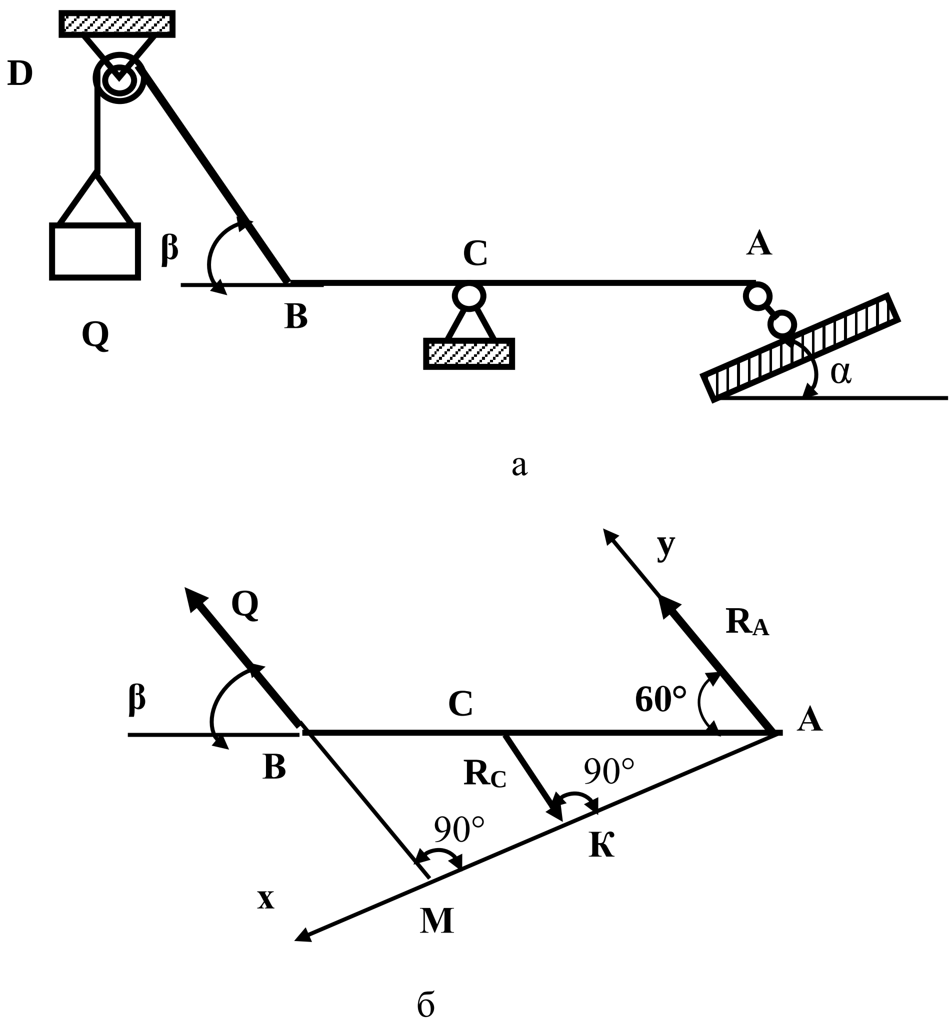


Рисунок 2.3.

Р Е Ш Е Н И Е

1. Выделим тело, равновесие которого рассматриваем, отбросим связи и приложим к нему все внешние силы и реакции связей (Q, R_C и R_A) (рисунок 2.3, б).

Для подвижной опоры (катка) линия действия реакции опоры перпендикулярна плоскости опоры А, т.е. в нашем случае параллельна линии действия натяжения троса Q. Линия действия силы реакции опоры С будет параллельна им, т. к. балка АВ находится в равновесии по условию задачи и поэтому многоугольник сил должен быть замкнут, т. е. линия действия реакции R_A должна быть параллельна линиям действия вышеуказанных сил.

2. Выбираем систему координат (оптимальную) – ось ОХ перпендикулярна линиям действия сил.

3. Составляем аналитические уравнения условий равновесия балки (для плоской системы параллельных сил):

$$\sum F_{ky} = 0; \quad \sum \mathrm{M}_{\mathrm{A}}(F_k) = 0 \tag{4.1}$$

или

$$R_A + Q - R_c = 0$$

$$\mathrm{R_c} \cdot \mathrm{AK} - \mathrm{Q} \cdot \mathrm{AM} = 0,$$

где: $AK = AC \cdot \cos 30^\circ$ - плечо силы R_c

и $AM = AB \cdot \cos 30^\circ$ – плечо силы Q.

Решая систему уравнений (4.1), получим:

$$R_c = Q \cdot \frac{AB}{AC} = 500 \times \frac{3}{2} = 750\ H$$

$$R_A = R_c - Q = 750 - 500 = 250\ H$$

Ответ: $R_A = 250\ H, \quad R_c = 250\ H$

Вопросы и задания:

Базовый уровень

1. Основные задачи статики. Аксиомы статики.
2. Распределенные и сосредоточенные силы. Эквивалентная система сил.
3. Условия равновесия системы сходящихся сил.
4. Момент силы относительно центра.
5. Правило знаков для момента силы относительно центра.
6. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Повышенный уровень

1. Сложение вращений вокруг пересекающихся и параллельных осей.
2. Метод остановки (Метод Виллиса) для определения угловых скоростей звеньев планетарного редуктора.
3. Теорема Кориолиса. Ускорение Кориолиса.
4. Динамика точки. Законы Ньютона.
5. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовых и естественных осях

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература:

1 Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько, В. А. Волосухин, А. Н. Кабельков, О. А. Бурцева. - 2-е изд., испр. и доп. - Ростов н/Д: Феникс, 2015. - 302 с.: ил., табл. - (Высшее образование). - Гриф: Рек. НМС МО. - Библиогр.: с. 296. - ISBN 978-5-222-22787-9

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература:

1 Антонов, В. И. Теоретическая механика (статика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23750.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (кинематика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23749.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Интернет-ресурсы:

1 http://window.edu.ru/ – единое окно доступа к образовательным ресурсам

2 http://biblioclub.ru/ — ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

3 http://catalog.ncstu.ru/ — электронный каталог ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО

4 http://www.iprbookshop.ru — ЭБС.

5 https://openedu.ru – Открытое образование

ТЕМА 3. КИНЕМАТИКА

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы

Знать: способы задания движения, скорость и ускорение точки в декартовых осях.

Уметь: находить скорости и ускорения точек тела в различных видах движений.

Наименование формируемых компетенций

Код	Формулировка
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию
ПК-5	способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования.

Теоретическая часть

Уравнения движения точки М в декартовой системе координат являются параметрическими уравнениями траектории, в которых роль параметра играет время t. Если точка движется в плоскости, то уравнения движения имеют вид:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{2.1}$$

Линию траектории можно построить по координатам точки М, вычисленным для нескольких значений времени t.

Исключая время t из уравнений (1), можно получить уравнение плоской траектории в явной форме $y = f(x)$. Способы исключения t зависят от условий задачи.

Скорость. Продифференцировав по времени уравнения движения (1), находят составляющие скорости по осям координат:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt}. \tag{2.2}$$

Модуль и направление вектора скорости определяется выражениями:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}, \tag{2.3}$$

$$\cos(\bar{\mathrm{v}}, \bar{i}) = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}.$$

Ускорение. Проекции вектора ускорения точки на координатные оси находятся как первые производные по времени от соответствующих проекций скоростей или как вторые производные по времени от координат движущейся точки, т.е.

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \ddot{y}. \tag{2.4}$$

Модуль и направление вектора ускорения определяется из соотношений:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \tag{2.5} \qquad \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}.$$

Касательное ускорение. Для определения касательного ускорения a_τ необходимо продифференцировать модуль скорости v по времени:

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt}. \tag{2.6}$$

Если модуль касательного ускорения при заданном времени имеет положительное значение, то вектор его совпадает по направлению с вектором скорости; в противном случае он направлен в сторону, противоположную вектору скорости.

Нормальное ускорение a_n при координатном способе задания движения можно определить как разность между полным a и касательным a_τ ускорениями

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \tag{2.7}$$

а затем по известной величине нормального ускорения a_n вычислить радиус кривизны ρ траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \tag{2.8}$$

ТЕМА 3. КИНЕМАТИКА
Практическое занятие № 8. Векторный и координатный способы задания движения точки.

Цель занятия: приобретение навыков решения задач по определению траектории движения материальной точки, ее скорости и ускорения.

Задание: овладеть векторным способом задания движения точки.

Дано: уравнение движения точки $r = t^2 i + 2tj + 3k$

Определить модуль скорости точки и модуль ее ускорения в момент времени t = 2с.

Р Е Ш Е Н И Е

1. Устанавливаем способ задания движения точки и вид ее движения.

В данном случае это векторный способ задания движения, т.к. движение задается уравнением зависимости от времени t радиус – вектора **r.**

Проекции радиус – вектора на оси координат (декартовы):

$$r_x = t^2, \quad r_y = 2t, \quad r_z = 3$$

2. Определяем модули скорости точки и ее ускорения:

модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{(dr_x / dt)^2 + (dr_y / dt)^2 + (dr_z / dt)^2}$$

Отсюда проекции вектора скорости на оси

$$v_x = dr_x / dt = 2t; \mathrm{v_y} = dr_y / dt = 2; \mathrm{v_z} = dr_z / dt = 0,$$

тогда при t = 2с : $\mathrm{v} = \sqrt{(2 \times 2)^2 + 2^2} = 4{,}47 м \backslash с$

Модуль ускорения точки $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$,

где $a_x = d^2 r_x / dt^2 = dv_x / dt = 2\text{м} \backslash \text{с}^2$

$$a_y = d^2 r_y / dt^2 = dv_y / dt = 0$$

$$a_z = d^2 r_z / dt^2 = dv_z dt = 0$$

При t = 2с $a = a_x = 2\text{м} \backslash \text{с}^2$ (т.к. проекция на ось X величина постоянная, независимая от времени)

Ответ: $\mathrm{v} = 4{,}47\text{м} \backslash \text{с}; \quad \mathrm{a} = 2\text{м} \backslash \text{с}^2$

ТЕМА 3. КИНЕМАТИКА
Практическое занятие № 9. Естественный способ задания движения точки.

Цель занятия: приобретение практических навыков решения задач по кинематике точки при естественном способе задания движения точки.

Задание: при естественном способе задания движения точки определить, в какой момент времени скорость точки достигнет определённой величины.

Дано: Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 0{,}5t^2 + 4t$.
Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет величины 10м/с.

Р Е Ш Е Н И Е

1. Определяем аналитическое выражение скорости через время t.

$$v = dv/dt = s' = (0{,}5t^2 + 4t)' = 2 \times 0{,}5t + 4 = t + 4$$

2. Определяем скорость в заданный момент времени

$$v\big|_{t=10} = 10 = t + 4, \quad \text{отсюда} \quad t = 6c$$

Ответ: $t = 6c$.

Дано: Скорость точки задана уравнением $v = 0{,}2t$.

Определить криволинейную координату S точки в момент времени $t = 10c$, если при $t_0 = 10c$ координата $s_0 = 0$.

Р Е Ш Е Н И Е

1.Определяем характер движения точки по траектории.

Для этого определяем аналитическое выражение ускорения от времени будет ли оно постоянным или переменным

$$a = v' = (0{,}2t)' = 0{,}2\text{м} \setminus \text{с}^2$$

-ускорение будет постоянная положительная величина, поэтому движение будет равноускоренным.

2. Закон равноускоренного движения имеет вид $s = s_0 + at^2/2$.

Отсюда криволинейная координата в момент времени $t = 10c$:

$$s\big|_{t=10} = 0 + 0{,}2t^2/2 = 0 + 0{,}2(10)^2/2 = 10\text{м}$$

Ответ: $s = 10\text{м}$.

Вопросы и задания:

Базовый уровень

1. Основная задача кинематики точки.
2. Способы задания движения точки.
3. Вектор скорости точки. Определение скорости тела при различных способах задания движения.
4. Вектор ускорения точки. Определение ускорения тела при различных способах задания движения.
5. Поступательное движение. Кинематические характеристики поступательного движения.
6. Вращательное движение. Угловая скорость точки и угловое ускорение.
7. Плоскопараллельное движение. Кинематические характеристики плоскопараллельного движения.
8. Мгновенный центр скоростей. Способы его определения.
9. Определение скоростей тела с помощью плана скоростей.

Повышенный уровень

1. Внутренние силы и их свойства.
2. Принцип Даламбера для точки. Относительное равновесие.
3. Принцип относительности в классической механике (Принцип Галилея – Ньютона).
4. Движение точки под действием упруго-линейной силы.
5. Свободные колебания точки. Период, частота и амплитуда колебаний.
6. Затухающие и вынужденные колебания точки.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература:

1 Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько, В. А. Волосухин, А. Н. Кабельков, О. А. Бурцева. - 2-е изд., испр. и доп. - Ростов н/Д: Феникс, 2015. - 302 с.: ил., табл. - (Высшее образование). - Гриф: Рек. НМС МО. - Библиогр.: с. 296. - ISBN 978-5-222-22787-9

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература:

1 Антонов, В. И. Теоретическая механика (статика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23750.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (кинематика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23749.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Интернет-ресурсы:

1 http://window.edu.ru/ – единое окно доступа к образовательным ресурсам

2 http://biblioclub.ru/ — ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

3 http://catalog.ncstu.ru/ — электронный каталог ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО

4 http://www.iprbookshop.ru — ЭБС.

5 https://openedu.ru – Открытое образование

ТЕМА 4. ДИНАМИКА

Практическое занятие 10. Прямая и обратная задача динамики точки.

Цель занятия: приобретение практических навыков решения задач по определению сил, действующих на тело (прямая задача) и по определению параметров движения по известным силам (обратная задача).

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы

Знать: Основные задачи динамики материальной точки и уравнения движения системы материальных точек. Колебания материальной точки и механической системы. Принцип Даламбера, метод кинетостатики, принцип возможных перемещений, общее уравнение динамики.

Уметь: определять динамические реакции опор вращающихся тел. Анализировать кинематические схемы механических элементов агрегатов и комплексов, определять их основные динамические характеристики.

Наименование формируемых компетенций

Код	Формулировка
ОК-7	способность к самоорганизации и самообразованию
ПК-5	способность принимать участие в работах по расчету и проектированию деталей и узлов машиностроительных конструкций в соответствии с техническими заданиями и использованием стандартных средств автоматизации проектирования

Теоретическая часть

Динамика – это раздел теоретической механики, изучающий зависимость между механическим движением тел и действующими на них силами.

Любое механическое движение тела рассматривается в динамике в связи с физическими факторами, определяющими характер этого движения. В этом отличие от кинематики, где движение рассматривается только с геометрической стороны.

Изучение динамики начинается обычно с изучения движения наиболее простого объекта – материальной точки.

Материальная точка – материальное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Поступательно движущееся тело можно рассматривать в динамике как движущуюся материальную точку, имеющую массу, равную массе этого тела.

Масса в динамике рассматривается как мера инертности.

Инертность – способность тел быстрее или медленнее менять свою скорость.

Совокупность взаимодействующих между собой материальных точек называется **механической системой** (Солнечная система).

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется, т.е. как неизменяемую систему.

Динамика решает две задачи:

Первая задача динамики – известно движение данной материальной точки или данной системы. Требуется определить силы, действующие на эту точку или эту систему.

Вторая задача динамики – обратная первой - известны силы, действующие на данную материальную точку или данную систему. Требуется определить движение этой точки или этой системы.

Эти задачи решаются с помощью закономерностей, установленных в статике и кинематике (способами сложения сил и приведения их систем к простейшему виду). Но для установления связи между движением материальных точек и факторами, определяющими его характер, этого оказалось недостаточно, поэтому в динамике пользуются еще рядом физических понятий – масса, количество движения, работа, энергия и т.д.

2. Законы динамики

Первый закон динамики (закон инерции)

Тела, свободные от внешних воздействий, сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно Земли, до тех пор, пока действующие на него силы не изменяют это состояние.

Понятия движения и покоя являются относительными из-за того, что, относя одно и то же движение к различным системам отсчета, можно наблюдать совершенно различные движения.

Так, тело, находящееся в покое на плывущем плоту, будет двигаться по отношению к берегам реки уже неравномерно при изменении направления и модуля скорости плота.

Все системы отсчета, для которых выполняется первый закон динамики, называются **инерциальными системами**, а движение, наблюдаемое по отношению к этой системе, называется **абсолютным**.

Пример такой системы – Солнечная система, которая принимается за неподвижную систему. Если поместить начало координат в центре Солнца, а координатные оси направить на любые три «неподвижные» звезды (в отличие от заметно движущихся планет), то получится система координат, называемая **гелиоцентрической**.

Для движений, отнесенных к гелиоцентрической системе координат, закон инерции выполняется с большой степенью точности, поэтому такая система является инерциальной.

Второй закон динамики (основной закон динамики)

Ускорение, сообщаемое материальной точке, приложенной к ней силой, прямо пропорционально модулю этой силы и обратно пропорционально массе тела.

Этот закон динамики устанавливает количественные связи между действиями тел друг на друга, инертными свойствами тел и возникающими движениями этих тел.

С направлением силы всегда совпадает направление ускорения, а не направление самого движения (направление скорости).

По определению Ньютона, массой тела называется количество вещества, содержащегося в этом теле. Масса тела равна отношению его силы тяжести к ускорению его свободного падения:

$$m = \frac{G}{q} \, . \qquad (1)$$

Так как ускорение свободного падения не зависит от размеров тела, то масса материальной точки определяется по силе тяжести той же зависимостью, что и масса любого тела.

Если на свободную материальную точку, сила тяжести которой равна **G**, подействовала сила **F**, сообщившая ей ускорение **a**, по закону модули ускорений, сообщаемых точке приложенными к ней силами, должны быть пропорциональны модулям этих сил.

$$\frac{F}{G} = \frac{a}{q},$$

$$F = \frac{G}{q} \cdot a,$$

$$F = ma. \qquad (2)$$

Значит, **модуль силы, приложенной к материальной точке, равен произведению массы точки на модуль ее ускорения**. Из последнего равенства следует, что чем больше масса данной точки, тем меньше ускорение точки, сообщаемое ей данной силой, т.е. тем медленнее изменяется скорость точки под действием приложенной к ней силы, тем меньше отклоняется ее движение от инерциального. Значит, различные точки обладают различной инертностью, мерой которой является масса. Масса тела полностью характеризует его инерцию только в том случае, когда тело совершает поступательное движение, т.е. когда ускорения всех точек тела одинаковы. За единицу массы принят 1кг, сила же выражается в Н. 1Н = 1кг /·1м/с^2 = 1кг·м/с^2. Итак, Ньютон – это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Вектор силы, приложенной к материальной точке, равен произведению массы точки на вектор ее ускорения:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}.$$

Это уравнение является полной математической формулировкой основного закона динамики и называется **основным уравнением динамики точки**.

Под ускорением точки, входящим в основное уравнение динамики, понимают абсолютное ускорение точки, т.е. ее ускорение относительно системы отсчета, принимаемой за инерциальную.

Третий закон динамики

(закон равенства действия и противодействия)

Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой (соединяющей данные точки) в противоположные стороны.

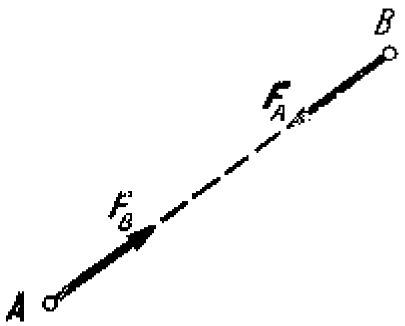


Рис. 1

Если материальная точка А действует на материальную точку В с силой **F_A**, то точка В действует на точку А с силой **F_B= - F_A** (рис. 1). Пусть масса точки А равна m_1 и ускорение, сообщаемое ей силой **F_B**, равно **a_1**, масса точки В равна m_2 и ускорение, сообщаемое ей силой **F_A**, равно **a_2**. По основному уравнению динамики

$$F_B = m_1 \cdot a_1$$

$$F_A = m_2 \cdot a_2.$$

Согласно же третьему закону динамики

$F_A = F_B$ или **F_A = - F_B**

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (2)$$

Модули ускорений, сообщаемых друг другу двумя материальными точками, обратно пропорциональны массам этих точек. Направлены они по одной прямой, но в противоположных направлениях. Эти силы не уравновешивают друг друга, т.к. приложены к разным точкам (или телам).

Четвертый закон динамики

(закон независимости действия сил)

Ускорение, получаемое материальной точкой при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы эта точка под действием каждой из данных сил в отдельности.

Пусть на точку, масса которой равна m, одновременно действуют силы **F_1, F_2, F_3, ..., F_n,** сообщая ей при этом ускорение, **a** (рис. 9.2).

Ускорения, которые получила бы эта точка при раздельном действии на нее каждой из данных сил, обозначим через $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$. Согласно данному закону, установленному на основании многочисленных опытов Галилеем, будем иметь:

$\mathbf{a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$ (3)

Если мы умножим обе части данного равенства на скалярный множитель **т** (на массу точки), то получим:

$m\mathbf{a} = m\mathbf{a_1} + m\mathbf{a_2} + m\mathbf{a_3} + \ldots + m\mathbf{a_n}$.

Согласно основному уравнению динамики

$m\mathbf{a_1} = \mathbf{F_1}$, $m\mathbf{a_2} = \mathbf{F}_2$, $m\mathbf{a_3} = \mathbf{F_3}$, … $m\mathbf{a_n} = \mathbf{F_n}$.

Отсюда получаем

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \ldots + \mathbf{F_n}$. (4)

Обозначив через **F** равнодействующую системы сил, приложенных к данной точке, равную их геометрической сумме, будем иметь

$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \ldots + \mathbf{F_n} = \Sigma F_k = R$, (5)

тогда $m\mathbf{a} = \mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F_k}$. (9.6).

Последнее равенство внешне ничем не отличается от основного уравнения динамики. Следовательно, **основное уравнение динамики остается в силе и в том случае, когда на точку одновременно действует несколько сил. Под приложенной к точке силой F нужно понимать в этом случае равнодействующую всех сил, действующих на точку**.

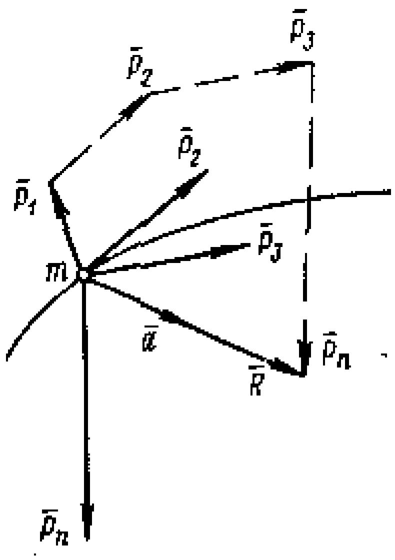


Рис. 2

3. Основное уравнение динамики движения точки в декартовых координатах

Из кинематики известно, что движение точки в **прямоугольных декартовых координатах** задается уравнениями:

$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$ (7)

Задачи динамики точки состоят в том, чтобы, зная движение точки, т. е. уравнения (9.7), определить действующую на точку силу или, наоборот, зная действующие на точку силы, определить закон ее движения, т. е. уравнения (9.7). Следовательно, для решения задач динамики точки надо иметь уравнения, связывающие координаты x, y, z этой точки и действующую на нее силу (или силы). Эти уравнения и дает второй закон динамики.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_n}$ по отношению к инерциальной системе отсчета Oxyz. Проектируя обе части равенства $m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F_k}$ (8)

на оси x, y, z и учитывая, что $a_x = d^2x/dt^2$ и т. д., получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}, \qquad (9)$$

или, обозначая вторые производные по времени двумя точками,

$$mx'' = \sum F_{kx}, \quad my'' = \sum F_{ky}, \quad mz'' = \sum F_{kz}. \qquad (10)$$

Это и будут искомые уравнения, т. е. **основное уравнение динамики точки в прямоугольных декартовых координатах**. Так как действующие силы могут зависеть от времени t, от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z, и от скорости, т. е. от

$V_X = X'$, $V_Y = Y'$, $V_Z = Z'$, то в общем случае правая часть каждого из уравнений (9.10) может быть функцией всех этих переменных, т. е. t, x, y, z, x′, y′, z′ одновременно.

9.4. Основное уравнение динамики движения точки

при естественном способе задания

Спроектируем обе части равенства (8) на касательную Mτ, к траектории точки, главную нормаль Mn, направленную в сторону вогнутости траектории (рис. 3); на нем Oxyz - оси, по отношению к которым движется точка). Тогда, учитывая, что $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, $a_b = 0$,

получим

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau},\ m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn} \qquad (9.11)$$

Уравнения (11), где v = ds/dt, представляют собой **уравнение динамики при криволинейном движении точки**.

ТЕМА 4. ДИНАМИКА

Практическое занятие 10. Прямая и обратная задача динамики точки.

Цель занятия: приобретение практических навыков решения задач по определению сил, действующих на тело (прямая задача) и по определению параметров движения по известным силам (обратная задача).

Задание: Определить угол, под которым к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением.

Дано: деталь массой m кг скользит вниз по лотку. Под каким углом α к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением a = 2м\с^2. Угол выразить в градусах (рисунок 4.1).

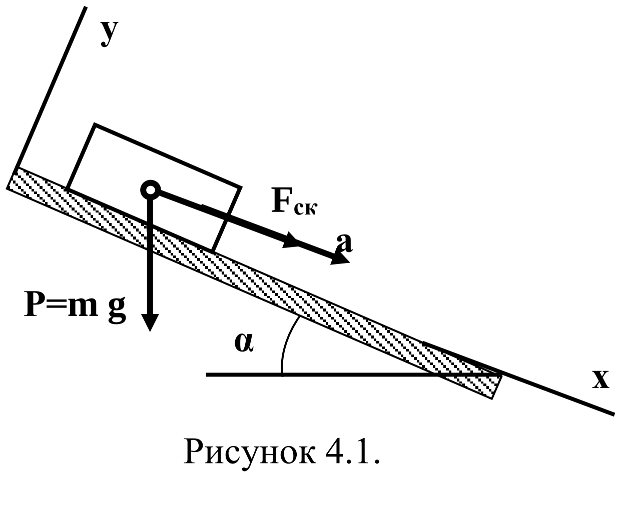


Рисунок 4.1.

Р Е Ш Е Н И Е

1. В данном случае неподвижной системой отсчета является наклонная плоскость лотка, поэтому движение детали измеряем относительно этой плоскости, следовательно вектор ускорения a направлен параллельно этой же плоскости, направим в этом направлении осьX.

2. Как видно из рисунка 4.1 в указанном направлении действует только скатывающая сила

$$F_{ск} = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

3. Составляем уравнение движения груза в проекции на ось X ,(тогда $a_x = a$):

$$ma_x = F_{ск} = \frac{mg}{\sin\alpha}$$, отсюда $$\sin\alpha = \frac{a}{g}$$.

4. Подставляя численные значения исходных данных определяем синус угла наклона лотка, а по нему и сам угол

$$\sin\alpha = 2/9{,}81 = 0{,}203; \quad \alpha = 11{,}8^0$$.

Ответ: $\alpha = 11{,}8^0$

ТЕМА 4. ДИНАМИКА

Практическое занятие № 8. Методы кинетостатики.

Цель занятия: приобретение практических навыков решения задач по определению сил инерции с применением основных методов кинетостатики.

Задание: Найти силу инерции груза и точку ее приложения.

Дано:

Лебедка поднимает груз М весом 2 кН. Груз М поднимается равноускоренно с ускорением а = 0,5 м/с^2 . Найти силу инерции груза и точку ее приложения (рисунок 4.2).

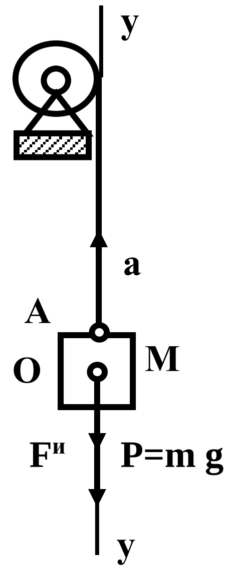


Рисунок 4.2

Р Е Ш Е Н И Е

1. Рассмотрим груз М как материальную точку (центр тяжести груза) движущуюся равноускорено, выберем систему отсчета – ось координат Y направим вверх и определим направление вектора ускорения – он будет направлен вертикально вверх.

2. Определяем величину и направление силы инерции материальной точки М движущейся прямолинейно - она будет равна ее проекции на ось Y и направлена в сторону противоположную направлению вектора ускорения ***a*,** т.е. вниз

$$F_{M}^{и} = F_{MX}^{и} = -\frac{P}{g}a = \frac{2000}{9{,}81}\times 0{,}5 = 102\ Н..$$

3. Сила инерции будет приложена к тросу лебедки (точка А), т.к. он является **связью, наложенной на груз** (а нам известно, что силы инерции всегда приложены к связям).

Ответ: $F_{M}^{и} = 102\ Н.$

ТЕМА 4.ДИНАМИКА

Практическое занятие № 12. Работа и мощность постоянной силы.

Цель занятия: приобрести навыки практического решения задач по определению работы постоянной силы, мощности и КПД.

Задание: Определить сумму работ сил, приложенных к грузу на угловом перемещении.

Дано:

При свободном качании груз весом Р = 10 Н подвешенный на нерастяжимой, невесомой нити длиной *l* = 1,5 м отклоняется от положения равновесия на угол $\varphi = \pi / 6$ рад.

Вычислить сумму работ сил приложенных к грузу на этом угловом перемещении φ (рисунок 4.3).

Р Е Ш Е Н И Е

1.Выберем систему координат XOY с центром в точке О (рисунок 4.3), изобразим все силы приложенные к телу: Р – сила тяжести, Т – сила натяжения нити.

2. Вычисляем работу каждой из сил на угловом перемещении груза Р:

- работа силы тяжести:

$$A_p = -P \times h = -P(l - l\cos\varphi) = -Pl(1 - \cos\varphi).$$

Знак минус означает, что направление силы противоположно направлению перемещения.

Работа силы натяжения нити A_T равна нулю, т.к. при движении груза по дуге S сила Т все время направлена перпендикулярно вектору скорости, т.е. перпендикулярна направлению движения.

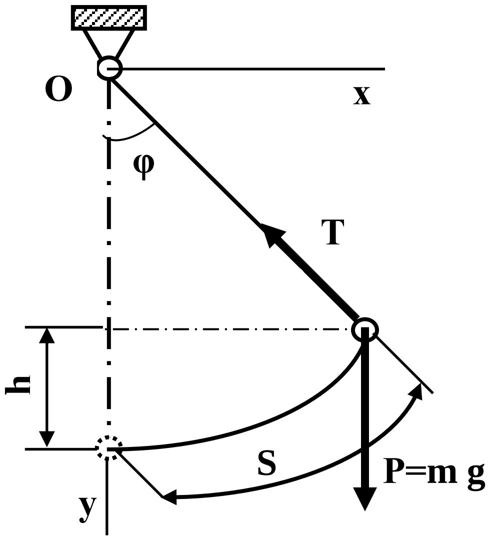


Рисунок 4.3

3. Сумма работ сил

$$A = A_p + A_т = A_p = -P\ell \cdot (1 - \cos\varphi) = -10 \cdot 1{,}5 \cdot (1 - \cos\pi/6) =$$

$$= -10 \cdot 1{,}5 \cdot (1 - \sqrt{3}/2) = -2 \text{ Нм} = -2 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = -2$ Дж .

Вопросы и задания:

Базовый уровень

1. Динамика точки. Первая и вторая задача динамики точки.
2. Первый закон динамики.
3. Второй закон динамики точки.
4. Количество движения материальной точки. Импульс силы.
5. Теорема об изменении количества движения точки.
6. Работа силы тяжести. Работа силы упругости. Работа силы трения.
7. Кинетическая энергия тела. Потенциальная энергия тела.
8. Теорема об изменении кинетической энергии тела.
9. Сложное движение точки. Теорема сложения скоростей.

Повышенный уровень

1. Закон сохранения количества движения.
2. Дифференциальное уравнение вращательного движения.
3. Работа и мощность силы. Силовое поле.
4. Потенциальная энергия силы тяжести и упруго-линейной силы.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература:

1 Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько, В. А. Волосухин, А. Н. Кабельков, О. А. Бурцева. - 2-е изд., испр. и доп. - Ростов н/Д: Феникс, 2015. - 302 с.: ил., табл. - (Высшее образование). - Гриф: Рек. НМС МО. - Библиогр.: с. 296. - ISBN 978-5-222-22787-9

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (динамика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 140 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23748.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература:

1 Антонов, В. И. Теоретическая механика (статика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23750.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2 Антонов, В. И. Теоретическая механика (кинематика): конспект лекций и содержание практических занятий / В. И. Антонов. — М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 84 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электроннобиблиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/23749.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Интернет-ресурсы:

1 http://window.edu.ru/ – единое окно доступа к образовательным ресурсам

2 http://biblioclub.ru/ — ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

3 http://catalog.ncstu.ru/ — электронный каталог ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО

4 http://www.iprbookshop.ru — ЭБС.

5 https://openedu.ru – Открытое образование

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ
по дисциплине «Теоретическая механика»
для студентов очной формы обучения
направления подготовки
15.03.02 Технологические машины и оборудование

Составители *Г.В. Кукинова, канд. техн. наук, доцент.*

Отв. редактор *А.Л. Проскурнин, канд. хим.наук, доцент.*

Редактор Л.Д. Бородастова

Подписано в печать Формат 60 × 84 1/16
Уч.-изд. л. 1,2 п.л. Усл. печ. л. 0,5 п.л. Тираж 50 экз.

Северо-Кавказский федеральный университет
Невинномысский технологический институт (филиал)
357108, г. Невинномысск, ул. Гагарина, 1