

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
НЕВИННОМЫССКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ФИЛИАЛ) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ по дисциплине

«Математический анализ»

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Профиль подготовки	Информационные системы и технологии в бизнесе

Невинномысск, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции одной переменной».....	20
Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции нескольких переменных».	20
Практическое занятие по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной».....	28
Практическое занятие по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»	36
Практическое занятие по теме «Ряды».....	41
Основная литература.....	50
Дополнительная литература.....	51

Введение

Целью освоения дисциплины является формирование набора универсальных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02

Информационные системы и технологии, путем освоения возможностей:

- демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовностью применять аналитические и численные методы решения поставленных задач, использовать современные информационные технологии, проводить обработку информации с использованием прикладных программных средств сферы профессиональной деятельности;
- выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат;
- планировать и проводить физические и химические эксперименты, проводить обработку результатов и оценивать погрешности.

Для освоения дисциплины поставлены следующие задачи:

- обучение студентов основным математическим методам, необходимым для глубокого изучения общенаучных, общепрофессиональных, технических и специальных дисциплин;
- развитие логического и алгоритмического мышления, общего уровня математической культуры; - выработка навыков математического исследования прикладных вопросов, необходимых для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса;
- обучение навыкам выдвигать гипотезы и устанавливать границы их применения, применять методы математического анализа и моделирования теоретического и экспериментального исследования;
- привитие студентам умений самоорганизации и самостоятельного изучения учебной литературы по математике и ее приложениям.

Перед выполнением заданий студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в данных указаниях. В них же даются также некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров.

В процессе самостоятельного изучения материала студент может решить предложенный в методическом указании набор заданий. Это позволит студенту судить о степени усвоения соответствующего раздела курса, укажет на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление работы, поможет сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. В результате освоения дисциплины «Математический анализ» у студента должны быть сформированы следующие компетенции:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-1 выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее анализ и диагностику на основе системного подхода	Понимает методологию и основные методы математического моделирования, классификацию и условия применения моделей, основные методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем, инструментальные средства моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-2 осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации	Способен применять на практике математические модели, методы и средства проектирования и автоматизации систем на практике
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-3 определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения	Обеспечивает решение задач моделирования и проектирования информационных и автоматизированных систем;
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и инженерные методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	ИД-1 знаком с основами естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Понимает разделы: введение в математический анализ, теория пределов числовых последовательностей, теория пределов функций одной вещественной переменной; неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы

профессиональной деятельности		
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ИД-2 анализирует естественнонаучные и общеинженерные знания, методы	Умеет анализировать непрерывность функций одной вещественной переменной; использовать разделы: теория пределов, непрерывность, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных
ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ИД-3 применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	Владеет навыками использования дифференциального исчисления функций одной вещественной переменной, кратных интегралов, криволинейных и поверхностных интегралов

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции одной переменной».

Практическое занятие по теме «Математический анализ. Функции нескольких переменных».

Цель: Целью освоения тем «Математический анализ. Функции одной переменной» и «Математический анализ. Функции нескольких переменных» является формирование общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

- использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Математический анализ. Функции нескольких переменных» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

Пример 1. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3}; -1)$ (Рисунок 1).

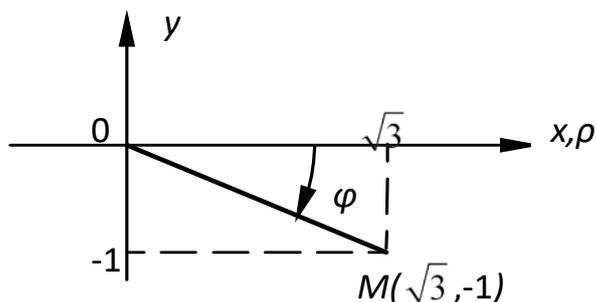


Рисунок 1

Решение. Используя формулы, находим полярный радиус и полярный угол точки M : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x = -\sqrt{3}/3$,
 $\varphi = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, так как точка M лежит в IV четверти.

Пример 2. Построить по точкам график функции $\rho = 2\sin \varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox – с полярной осью. Определить вид кривой.

Решение. Так как полярный радиус не отрицателен, т.е. $\rho \geq 0$, то $\varphi \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \pi$; значит вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin \varphi$	0	0.38	0.71	0.92	1	0.92	0.71	0.38	0
$\rho = 2\sin \varphi$	0	0.76	1.24	1.84	2	1.84	1.42	0.76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k , откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k = \rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (Рисунок 2).

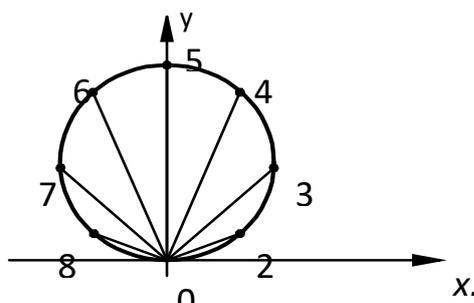


Рисунок 2

Найдем уравнение кривой $\rho = 2\sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y по формулам:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2y / \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2y.$$

Окончательно имеем $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, т.е. уравнение выражает окружность с центром в точке $(0; 1)$ и единичным радиусом.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{ctg}(x - 3)}{\ln(4 - x)}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе – бесконечно малую функцию:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \operatorname{ctg}(x - 3) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \ln(4 - x) = 0. \quad \text{Поэтому} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{ctg}(x - 3)}{\ln(4 - x)} = \infty.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 + 5x}{-4x^4 + 7}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида ∞/∞ . Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на x^4 . В результате получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 + 5x}{-4x^4 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + 5/x^3}{-4 + 7/x^4} = \frac{-12 + 0}{-4 + 0} = -3,$$

поскольку при $x \rightarrow \infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\ln(1 - x^2)}$.

Решение. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида $0/0$ используем метод замены бесконечно малых эквивалентными. Так как при $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x \sim 8x^2, \quad \ln(1 - x^2) \sim -x^2, \quad \text{то находим}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\ln(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{-x^2} = -8.$$

Пример 6. Найти первую производную функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(1 - t) \\ y = (t - 1)^2 \end{cases}.$$

Решение. Дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t : $x'_t = \frac{-1}{1-t}$,

$y'_t = 2(t-1)$. Искомая производная от y по x равна отношению производных от $y(t)$ и $x(t)$ по t :

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(t-1)}{\left[\frac{-1}{(1-t)} \right]} = 2(t-1)^2.$$

Пример 7. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = z\sqrt{x^3} - ye^z$.

Решение. Считая функцию u функцией только одной переменной x , а переменные y и z рассматривая как постоянные, находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{xz}$. Аналогично, считая u функцией только y , а затем только z , получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{x^3} - y$.

Вопросы и задания

Задание 1. Построить графики функций:

Номер вар.	Функции
1	$y = -3x^2 + 10x - 3$, $y = \ln(-x) + 1$, $y = \cos \frac{x}{2} - 1$, $y = x^2 + x $.
2	$y = -2x^2 + 5x - 1$, $y = \ln(x - 2)$, $y = \cos 2x + 2$, $y = x \cdot x - 1 $.
3	$y = -4x^2 + 17x - 4$, $y = \ln(x + 2)$, $y = \sin 2x + 1$, $y = x^2 - x $.
4	$y = -5x^2 + 26x - 5$, $y = \ln 3x + 2$, $y = \sin 2x - 2$, $y = x \cdot x $.
5	$y = 2x^2 + 3x - 2$, $y = \ln(2 - 2x)$, $y = -\cos 2x$, $y = x \cdot x + 1 $.
6	$y = 3x^2 + 8x - 3$, $y = \ln 2x + 3$, $y = -\sin 2x$, $y = x + 2 x + 1$.
7	$y = 4x^2 + 15x - 4$, $y = \ln x + 3$, $y = \cos \frac{x}{2} + 1$, $y = \frac{ x }{x^2}$.
8	$y = 5x^2 + 24x - 5$, $y = \ln(-3x) + 1$, $y = \sin \frac{x}{2} - 2$, $y = e^{ x }$.
9	$y = -2x^2 + 3x + 2$, $y = \ln(x - 4)$, $y = \sin \frac{x}{2} + 1$, $y = \ln x $.
10	$y = -3x^2 + 8x + 3$, $y = \ln(-x) + 2$, $y = \cos \frac{x}{2} - 2$, $y = \sin x $.
11	$y = 6x^2 - 5x + 1$, $y = -\ln x + 2$, $y = -\sin \frac{x}{2}$, $y = e^{ x+2 }$.
12	$y = -2x^2 + 7x - 3$, $y = -\ln x + 1$, $y = -\cos \frac{x}{2}$, $y = \ln x - 1 $.

13	$y = -2x^2 + 11x - 5, y = -\ln(x-1), y = \sin(2x - \frac{\pi}{4}), y = x^2 - x .$
14	$y = 3x^2 - 7x + 2, y = 2\ln x + 2, y = -\sin(x + \frac{\pi}{3}), y = \frac{1}{ x+2 }.$
15	$y = -3x^2 + 13x - 4, y = -\ln x - 2, y = -\cos(x - \frac{\pi}{3}), y = x x + 4.$
16	$y = -3x^2 + 13x - 4, y = -\ln x - 2, y = \frac{-x+2}{2x-2}, y = x x + 4.$
17	$y = 3x^2 - 7x + 2, y = -e^{-x} + 2, y = -\sin(x + \frac{\pi}{3}), y = \frac{1}{ x+2 }.$
18	$y = -2x^2 + 11x - 5, y = \frac{3x-4}{x+2}, y = -e^{x+2}, y = -\ln(x-1).$
19	$y = -2x^2 + 7x - 3, y = \cos\frac{x}{2}, y = \frac{3x+3}{x+1}, y = \ln x-1 .$
20	$y = 6x^2 - 5x + 1, y = -\sin\frac{x}{2}, y = -e^x + 1, y = e^{ x+2 }.$

Задание 2. Исследовать на непрерывность функции и построить их графики.

Вариант	Функции
1	1) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$; 2) $y = \frac{ x - 4 }{x - 4}$; 3) $y = \begin{cases} x^2 & -\infty < x \leq -2 \\ -x + 2 & 0 < x \leq 0 \\ 3x & 0 < x < \infty \end{cases}$
2	1) $y = \frac{x^2 - 10x + 9}{x - 9}$; 2) $y = \frac{ x + 0,8 }{x + 0,8}$; 3) $y = \begin{cases} 2x + 5 & -\infty < x \leq 0 \\ 2x + 3 & 0 < x < 2 \\ 7 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$
3	1) $y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$; 2) $y = \frac{ 2x + 5 }{2x + 5}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 + 1 & -\infty < x \leq 0 \\ x + 1 & 0 < x < 2 \\ 4 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$
4	1) $y = \frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1}$; 2) $y = \frac{ x - \sqrt{2} }{x - \sqrt{2}}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 & -\infty < x \leq -2 \\ 4x + 4 & -2 < x \leq 0 \\ 5 & 0 < x < \infty \end{cases}$
5	1) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$; 2) $y = \frac{ x + 6 }{x + 6}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 + 2 & -\infty < x \leq -1 \\ 3x + 2 & -1 < x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < \infty \end{cases}$
6	1) $y = \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 2}$; 2) $y = \frac{ x + 3 }{x + 3}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 & -\infty < x \leq 0 \\ 2x + 1 & 0 < x \leq 1 \\ 3 & 1 < x < \infty \end{cases}$
7	1) $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$; 2) $y = \frac{ x + 5 }{x + 5}$; 3) $y = \begin{cases} -3x + 1 & -\infty < x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2x & 1 < x < \infty \end{cases}$
8	1) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$; 2) $y = \frac{ x - 6 }{x - 6}$; 3) $y = \begin{cases} 2x + 2 & -\infty < x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$
9	1) $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$; 2) $y = \frac{ x - 7 }{x - 7}$; 3) $y = \begin{cases} 4x + 1 & -\infty < x < 0 \\ (x + 1)^2 & 0 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$
10	1) $y = \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6}$; 2) $y = \frac{ x - 8 }{x - 8}$; 3) $y = \begin{cases} x^2 + 1 & -\infty < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x < \infty \end{cases}$

11	1) $y = \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4}$; 2) $y = \frac{ x - 9 }{x - 9}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 + 2 & -\infty < x \leq 0 \\ x + 2 & 0 < x \leq 2 \\ 5 & 2 < x < \infty \end{cases}$
12	1) $y = \frac{x^2 + 8x + 12}{x + 6}$; 2) $y = \frac{ x - 10 }{x - 10}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 & -\infty < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & 3 < x < \infty \end{cases}$
13	1) $y = \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6}$; 2) $y = \frac{ 2x - 1 }{2x - 1}$; 3) $y = \begin{cases} -x^2 & -\infty < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 3 \\ 2x + 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases}$
14	1) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$; 2) $y = \frac{ 3x - 1 }{3x - 1}$; 3) $y = \begin{cases} 3x + 5 & -\infty < x \leq 0 \\ (x - 5)^2 & 0 < x \leq 5 \\ 1 & 5 < x < \infty \end{cases}$
15	1) $y = \frac{x^2 - 10x + 16}{x - 2}$; 2) $y = \frac{ x - 3 }{x - 3}$; 3) $y = \begin{cases} 2x + 1 & -\infty < x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 2 & 1 < x < \infty \end{cases}$
16	1) $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$; 2) $y = \frac{ x - \sqrt{3} }{x - \sqrt{3}}$; 3) $y = \begin{cases} 4x + 5 & -\infty < x \leq 0 \\ 5 & 0 < x < 2 \\ x + 1 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$
17	1) $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$; 2) $y = \frac{ 4x + 1 }{4x + 1}$; 3) $y = \begin{cases} 4x - 1 & -\infty < x < 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x < \infty \end{cases}$
18	1) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$; 2) $y = \frac{ 5x - 1 }{5x - 1}$; 3) $y = \begin{cases} 2x + 3 & -\infty < x < 0 \\ (x - 3)^2 & 0 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$
19	1) $y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}$; 2) $y = \frac{ 6x + 1 }{6x + 1}$; 3) $y = \begin{cases} 2x + 2 & -\infty < x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$
20	1) $y = \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 5}$; 2) $y = \frac{ 2x + 3 }{2x + 3}$; 3) $y = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 2x^2 & 0 \leq x < 3 \\ 5x + 1 & 3 \leq x < \infty \end{cases}$

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Номер вар.	Функция, отрезок
1	$f(x) = x^3 - 12x + 7, \quad [0, 3].$
2	$f(x) = x^5 - (5/3)x^3 + 2, \quad [0, 2].$
3	$f(x) = (\sqrt{3}/2)x + \cos x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
4	$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [-3, 1].$
5	$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [1/2, 2].$
6	$f(x) = x^4 + 4x, \quad [-2, 2].$
7	$f(x) = (\sqrt{3}/2)x - \sin x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$
8	$f(x) = 81x - x^4, \quad [-1, 4].$
9	$f(x) = 3 - 2x^2, \quad [-1, 3].$
10	$f(x) = x - \sin x, \quad [-\pi, \pi].$
11	$f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}, \quad [-5, 5].$
12	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$
13	$f(x) = \frac{x-3}{x^2+16}, \quad [-5, 5].$
14	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \quad \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$
15	$f(x) = \frac{x+3}{x^2+7}, \quad [-3, 7].$
16	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \quad \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right].$
17	$f(x) = \frac{x-5}{x^2+11}, \quad [-3, 7].$
18	$f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \quad \left[-2\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$
19	$f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}, \quad [-4, 6].$
20	$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x, \quad \left[-2\pi, -\frac{3}{2}\pi\right].$

Практическое занятие по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной».

Цель: Целью освоения тем «Интегральное исчисление функции одной переменной»

является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Интегральное исчисление функции одной переменной» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретические основы

1. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

$$1^0. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad u = u(x) - \text{дифференцируемая функция}$$

$$2^0. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

$$3^0. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$4^0. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$5^0. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$6^0. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$7^0. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$8^0. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$9^0. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$10^0. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$$

$$11^0. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + b} \right| + C.$$

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\begin{aligned} \int f(ax)dx &= \frac{1}{a} F(ax) + C; \\ \int f(x+b)dx &= F(x+b) + C, \end{aligned} \tag{1}$$

где a и b – некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)), \tag{2}$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$.

3) Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых затруднений. За u , как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к её упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P(x) \cdot \ln(x)$, $P(x) \cdot \arcsin x$, $P(x) \cdot \arctg x$, где $P(x)$ - многочлен от x .

2. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) \leq 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например, $b = \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x = b$), то по определению полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (6)$$

и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (7)$$

Интегралы в левых частях равенств (6) и (7) называются несобственными интегралами. Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел в правой части равенств (6) и (7).

Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

4. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox . Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Теорема 1. Если 1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Oy области $S: \{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, т.е. существует двойной интеграл

$$\iint_S f(x, y) dS, \quad 2) \text{ существует повторный интеграл } \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \text{ то}$$

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (1)$$

Теорема 2. Если :1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Ox области $S: \{c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, т.е. существует двойной интеграл

$$\iint_S f(x, y) dS, \quad 2) \text{ существует повторный интеграл } \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx, \text{ то}$$

$$\iint_S f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2)$$

Теорема 3. Пусть $x = x(u, v), y = y(u, v)$ есть дифференцируемое преобразование области P из плоскости O_1uv на область S из плоскости Oxy . Тогда справедливо равенство

$$\iint_S f(x, y) dS = \iint_P f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| dudv. \quad (3)$$

Переход в двойном интеграле к полярным координатам

Формулы

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (4)$$

преобразуют полярные координаты ρ, φ точки в декартовы координаты этой точки и переводят область $P_0: \{0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq \rho < \infty\}$ на всю плоскость Oxy .

Обратное преобразование декартовых координат в полярные осуществляется по

$$\text{формулам: } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{arcctg } x/y + \pi \cdot \delta(y), \quad \delta(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y > 0, \\ 1, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Фиксируя в последних формулах ρ и φ , получим координатные линии из разных семейств: окружность с центром в точке $O(0;0)$ и луч, исходящий из точки $O(0;0)$.

Пример 1. Найти

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$$

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, то, используя формулы (1), получим:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{2(2x-3)} + C.$$

Проверка: $\left(-\frac{1}{2(2x-3)} + C\right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-3}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}.$

Пример 2. Найти $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то по формуле (2) находим:

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x \cdot \cos 2x dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = \cos 2x dx$; тогда $du = dx$, $v = (1/2) \sin 2x$. используя формулу (3), имеем:

$$\int x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$.

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x} = t$, откуда $dx = 2t dt$.

Найдем пределы интегрирования по переменной t : при $x = 4$ имеем $t = 2$, а при $x = 9$ имеем $t = 3$. Переходя в сходном интеграле к новой переменной t и применяя формулу Ньютона-Лейбница (5), получаем:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1} 2t dt = (t^2 - 4t + 4 \ln|t+1|) \Big|_2^3 = (9 - 12 + 4 \ln 4) - (4 - 8 + 4 \ln 3) = 2.15.$$

Пример 5. Вычислить плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y_1 = \sin x + 2, \quad y_2 = -1, \quad x = 0, \quad x = \pi \quad (\text{Рисунок 1})$$

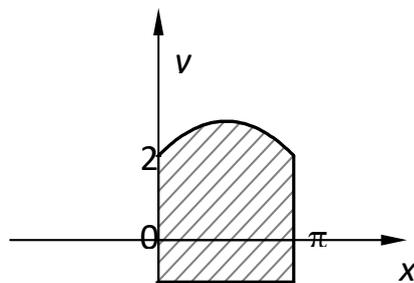


Рисунок 1

Решение. $S = \int_0^{\pi} (y_1 - y_2) dx = \int_0^{\pi} (\sin x + 2 + 1) = 2 + 3\pi$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции;

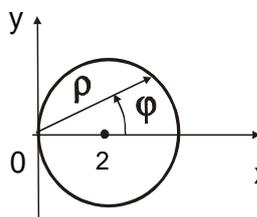
$f(x) = 1/\sin^2 x$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x = 0$. Согласно

определению (7), получаем: $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (tg x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} tg \varepsilon = 1,$

т.е. этот несобственный интеграл сходится.

Пример 6. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_S (y+2) dx dy$, S – множество точек,

удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \leq 4x$.



∇ Границей области является линия $x^2 + y^2 = 4x$ или

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке

$C(2;0)$ (рисунок 2).

Наличие в уравнении границы комбинации $x^2 + y^2$ наводит на мысль, что для

вычисления двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам ρ, φ по

формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Уравнение границы

$x^2 + y^2 - 4x = 0$ переходит в уравнение $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 4\rho \cos \varphi = 0$ или

$\rho(\rho - 4 \cos \varphi) = 0$. Отсюда $\rho=0$ (соответствует полюсу O) и $\rho = 4 \cos \varphi$ – уравнение

окружности. Так как всегда $\rho \geq 0$ (по смыслу ρ), то из $\rho = 4 \cos \varphi$ следует $\cos \varphi \geq 0$,

отсюда получаем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Итак, в полярных координатах область интегрирования

есть $P: \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi \right\}$. Тогда по формуле (5)

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (y+2) dx dy = \iint_P (\rho \sin \varphi + 2) \rho d\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} (\rho^2 \sin \varphi + 2\rho) d\rho = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \cdot \sin \varphi + \rho^2 \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=4 \cos \varphi} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{64}{3} \cos^3 \varphi \sin \varphi + 16 \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= -\frac{64}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d \cos \varphi + 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = -\frac{16}{3} \cdot \cos^4 \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \end{aligned}$$

$$+8\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8 \cdot \#$$

Вопросы и задания

Задание 1.

Найти неопределенные интегралы.

Номер вар.	Интегралы
1	а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[8]{1-e^x}}$; б) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3} dx$; в) $\int (5x-2) \ln x dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$
2	а) $\int x\sqrt{3-x^2} dx$; б) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6} dx$; в) $\int x \cdot \cos^2(2x) dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.
3	а) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3} dx$; в) $\int x \cdot \arcsin x dx$; г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$
4	а) $\int \sin 2x \sqrt{2-\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12} dx$; в) $\int \ln(3+x^2) dx$; г) $\int \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x+1}}$
5	а) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$; б) $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12} dx$; в) $\int (2-x) \sin x dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$.
6	а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$; б) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2} dx$; в) $\int (1-\ln x) dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt{x^3}} dx$.
7	а) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4} dx$; в) $\int (3x+4) \cos x dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx$.
8	а) $\int \frac{x^2}{8+x} dx$; б) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6} dx$; в) $\int \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(4x) dx$; г) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$.
9	а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 3} dx$; б) $\int \frac{4x-27}{2x^2-x-6} dx$; в) $\int x \ln^2 x dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

10	a) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} dx$; б) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8} dx$; в) $\int x^2 \sin 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}$.
11	a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$; в) $\int \frac{x-101}{x^3+2x^2+101x} dx$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
12	a) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x) dx$; в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.
13	a) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2 \cos x}}$; б) $\int x 3^x dx$; в) $\int \frac{x^3+3x+3}{x^4+3x^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$.
14	a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}$; б) $\int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.
15	a) $\int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}$; б) $\int x^2 \sin 4x dx$; в) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{x^4 + 2x^2} dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$.
16	a) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \operatorname{arcsin} \frac{1}{x} dx$; в) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x} dx$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt{x^3}} dx$.
17	a) $\int \frac{(x + \operatorname{arctg} x) dx}{1+x^2}$; б) $\int x \ln(x^2+1) dx$; в) $\int \frac{x^3-3}{x^4+3x^2} dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx$.
18	a) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x(1+x)}}$; б) $\int x \sin x \cos x dx$; в) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^4+2x^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$.
19	a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$; в) $\int \frac{4x^2+3x+50}{x^3+2x^2+50x} dx$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.
20	a) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx$; б) $\int x \ln^2 x dx$; в) $\int \frac{x^3+3x^2+5}{x^4+5x^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}$.

Задание 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж области.

Номер вар.	Уравнения линий
------------	-----------------

1	$y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$
2	$y = x\sqrt{9 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 3).$
3	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$
4	$y = \sin x \cos^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2).$
5	$y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$
6	$y = x^2\sqrt{4 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2).$
7	$y = \cos x \sin^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2).$
8	$y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$
9	$y = \arccos x, y = 0, x = 0.$
10	$y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$
11	$y = x\sqrt{36 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 6).$
12	$x = \arccos y, x = 0, y = 0.$
13	$y = \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$
14	$y = x^2\sqrt{8 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$
15	$y = x\sqrt{4 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2).$
16	$x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2.$
17	$x = (y - 2)^3, x = 4y - 8.$
18	$y = \cos^5 x \sin 2x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2).$
19	$y = x^2\sqrt{16 - x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 4).$
20	$x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$

Практическое занятие по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель: Целью освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, содержащее независимую переменную x , неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется уравнением в общем виде.

Определение 2. Порядком уравнения называется порядок старшей производной,

входящей в уравнение.

Определение 3. Уравнение, разрешенное относительно старшей входящей в него производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

называется уравнением n -го порядка в нормальной форме.

Определение 4. Решением уравнения (1.1) (или (1.2)) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения на плоскости Oxy называется интегральной кривой.

Однородное уравнение (ЛОДУ)

Линейным уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x); \quad (5.1)$$

$p_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) называются коэффициентами ДУ, $f(x)$ – правой частью (5.1).

Определение 1. Если при всех рассматриваемых значениях x функция $f(x)$, то уравнение (5.1) называется однородным (ЛОДУ); в противном случае оно называется неоднородным (ЛНДУ).

Теорема 1. Если коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b) , то для любых начальных условий (4.1) задача Коши имеет решение и оно единственно.

Всякое решение уравнения (5.1) является частным решением, так что особых решений оно не имеет.

Однородное линейное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (5.2)$$

(всегда) имеет нулевое решение $y \equiv 0$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$y = y' = \dots = y^{(n-1)} = 0$ при $x = 0$ и оно единственно.

Теорема 2. Общее решение ЛОДУ есть линейная комбинация решений y_1, y_2, \dots, y_n его фундаментальной системы:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (5.3)$$

Определение 2. Фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (5.2) называется n его любых линейно-независимых частных решений y_1, y_2, \dots, y_n .

Замечание. Для любого ЛОДУ существует бесконечное число фундаментальных систем решений.

Определение 3. Система из n функций y_1, y_2, \dots, y_n называется линейно-независимой (на (a, b)) системой, если тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad (5.4)$$

выполняется лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Теорема 3. Чтобы система решений y_1, y_2, \dots, y_n была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b) .

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Решение. Приводим уравнение к виду (3.1). Имеем: $x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1$;

$$x^2 y^2 dy = (y - 1) dx. \text{ Делим обе части уравнения на } x^2 (y - 1): \frac{y^2}{y - 1} dy = \frac{dx}{x^2} -$$

приходим к уравнению с разделенными переменными. Интегрируем обе части уравнения

$$\text{(применяем формулу (3.3))}: \int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{dx}{x^2} + \tilde{N}; \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C. \text{ При}$$

делении на $x^2 (y - 1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ – решение уравнения, а $x = 0$ – нет.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $(1 + x^2) y'' + xy' - y + 1 = 0$, зная, что соответствующее ЛОДУ имеет частное решение $y_1(x) = x$.

Решение. 1. Найдем общее решение ЛОДУ $(1 + x^2) y'' + xy' - y = 0$. Найдем y_2 :

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{x dx}{1+x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -x \int \frac{\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+x^2}.$$

Общее решение ЛОДУ: $y_{o.o} = C_1 x + C_2 \sqrt{1+x^2}$.

2. Найдем общее решение ЛНДУ. а) очевидно, что $y=1$ есть частное решение и по формуле (5.7) общее решение ЛНДУ: $y = C_1x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1$. б) найдем общее решение по методу вариации произвольных постоянных. Составляем систему (5.9), приведя исходное уравнение к виду (5.1):

$$\tilde{N}'_1x + \tilde{N}'_2 \cdot \sqrt{1+x^2} = 0; C'_1 + C'_2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Решим систему алгебраически: $C'_1 = -1, C'_2 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Интегрируя, найдем: $C_1(x) = -x + C_1,$

$C_2(x) = \sqrt{1+x^2} + C_2$ и общее решение ЛНДУ

$$y = (-x + C_1)x + (\sqrt{1+x^2} + C_2)\sqrt{1+x^2} = C_1x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1.$$

Задание 1

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения I порядка.
- 2) Найти частное решение дифференциального уравнения II порядка, удовлетворяющее начальным условиям.

№

вар-та Задания

1	1)	; 2)
2	1)	; 2)
3	1)	; 2)
4	1)	; 2)
5	1)	; 2)
6	1)	; 2)
7	1)	; 2)
8	1)	; 2)
9	1)	; 2)
10	1)	; 2)

Практическое занятие по теме «Ряды»

Цель: Целью освоения темы «Ряды» является формирование набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлениям подготовки 09.03.02 путем освоения возможностей:

- осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
- использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения темы «Ряды» студентом приобретаются следующие знания и умения:

Знать: основные методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности, теоретические и экспериментальные данные моделирования в профессиональной деятельности

Уметь: интерпретировать, структурировать и оформлять информацию результатов исследований и экспериментов из профессиональной области в доступном для других виде. Обеспечивать применение навыков работы с компьютерными программами для дистанционного образования в области математики, навыков самоорганизации учебного процесса для решения сложных задач математики, предполагающими самостоятельный выбор метода решения

Владеть: навыками решения задач, связанных с математическим моделированием и анализом, навыками решения задач, связанных с профессиональной деятельностью

Теоретическая часть

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S , то ряд называется **сходящимся**, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S.$$

Если частичная сумма S_n ряда (1.1) при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется **расходящимся**.

Если ряд *сходящийся*, то значение S_n^* при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S .

Разность $r_n = S - S_n^*$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток

стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Пример 1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (1.2)$$

называется *геометрическим* ($a \neq 0$).

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых n членов $S_n^* = \frac{a - aq^n}{1 - q}$. Очевидно: это n -ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

$$|q| = 1; \quad q = 1.$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a + a + a + \dots + a = a \cdot n = S_n^*,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot n = \infty, \text{ ряд расходится;}$$

$$q = -1$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a - a + a - a + \dots,$$

$$S_n^* = \begin{cases} a & \text{при } n \text{ нечетном } (n = 2k + 1), \\ 0 & \text{при } n \text{ четном } (n = 2k). \end{cases}$$

S_n^* не имеет предела, ряд расходится.

$$|q| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \text{конечное число, ряд сходится.}$$

$$|q| > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty - \text{ряд расходится.}$$

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Вопросы и задания

Задачи 21-30

В задачах № 11-0 найти область сходимости степенного ряда.

В задачах № 11-20 исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

$$11. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\sin n}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}.$$

$$12. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\sin n^3}{n^3 + 1}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{5^{n+1}}; \quad \text{в) } \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{2n+1}.$$

$$13. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{2^n + 1}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^2 + 1}.$$

$$14. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin n}}{\sqrt{n^3 + 3n}}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{\pi^n}; \quad \text{в) } \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

$$15. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\cos n}{n^5 + 3n}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2n}}.$$

$$16. \text{ а) } \sum_2^{\infty} \frac{\cos^3 n}{(n+1) \ln^2(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt{n^2 + 3n}}.$$

$$17. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin n}}{n \sqrt[3]{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$18. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\cos^3 n}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n^2+1}.$$

$$19. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

$$20. \text{ а) } \sum_1^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n+3^n}; \quad \text{б) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{(2n-1)!}; \quad \text{в) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2n - 1}}.$$

Основная литература:

1. Степаненко, Е. В. Математика. Основной курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 252 с. — 978- 5-8265-1412-2. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/63859.html>
2. Высшая математика. Том 2. Начало математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, И. А. Волынская, О. Е. Карпухина [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 104 с. — ISBN 978-5-94211-711-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71688.html>
3. Высшая математика. Том 3. Элементы высшей алгебры. Интегральное исчисление функций одной переменной и его приложения : учебник / А. П. Господариков, В. В. Ивакин, М. А. Керейчук [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 102 с. — ISBN 978-5-94211-712-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71689.html>
4. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — СПб. : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 с. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/71690.html>

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Математика : Учебник. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
2. Математика в примерах и задачах : Учеб. пособие / Под ред. Л.Н. Журбенко. — М. : ИНФРА-М, 2012.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учеб. пособие для бакалавров. — М. : ЮРАЙТ, 2013.
4. Данко П.Е. Высшая математика в примерах и задачах : В 2-х ч. — М. : ОНИКС, 2008.
5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Б. Карбачинская, Е. С. Лебедева, Е. Е. Харитоновна, М. М. Чернецов ; под ред. М. М. Чернецов. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/49604.html>