Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт

Кафедра информационных систем, электропривода и автоматики

АТОМАТИЗИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

Методические указания к проведению практических занятий
для направления подготовки 15.04.04 –
Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2016

Настоящие методические указания предназначены для студентов направления 15.04.04 – Автоматизация технологических процессов и производств. Они разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом и основной образовательной программой направления.

В методических указаниях изложены правила решения задач линейного программирования и транспортных задач, приведены списки контрольных вопросов, рекомендованных литературных источников и предложены варианты заданий для самостоятельного решения.

Составитель *канд. техн. наук, доцент Д.В. Болдырев*

Отв. редактор *канд. техн. наук, доцент А.А. Евдокимов*

Тема №1
ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ

Задачи линейного программирования[1] были первыми подробно изученными задачами поиска экстремума с ограничениями типа неравенств. До настоящего времени методы их решения остаются удобным средством оптимизации систем, на ресурсы которых накладываются ограничения.

Цель практических занятий – изучение основ линейного программирования, приобретение навыков решения линейных оптимизационных задач.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование – метод нахождения экстремума линейной функции конечного числа переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют конечному числу дополнительных условий (ограничений), имеющих вид линейных уравнений или линейных неравенств.

Целевая функция представляется в виде

$$\boldsymbol{Q(X) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n + d = C^T \cdot X + d \to extr,} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{X \in E^n}$ – вектор параметров целевой функции, $\boldsymbol{C \in E^n}$ – действительный вектор коэффициентов целевой функции, $\boldsymbol{d}$ – скаляр (его значение, строго говоря, не влияет на координаты экстре-

---

[1] Термин «линейное программирование» возник в результате неточного перевода английского «***linear programming***». Одно из значений слова «***programming***» – составление планов, планирование. Поэтому более правильным было бы использование перевода «планирование на основе линейных соотношений».

мума функции (1.1)).

Чтобы целевая функция имела экстремум (была ограниченной), на координаты вектора $\boldsymbol{X}$ должны быть наложены ограничения

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n \ge b_1, \\ \ldots \\ a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n \le b_i, \\ \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $m < n$ – число ограничений типа равенств или неравенств, $A \in E^{m\times n}$ – действительная матрица, $B \in E^{m}$ – действительный вектор. Частным случаем ограничений общего вида являются дополнительные условия

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

Точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, удовлетворяющая ограничениям (1.2) и (1.3), называется **допустимой**. Множество допустимых точек называется **допустимой областью**. Допустимая область образуется пересечением $m + n$ множеств точек, каждое из которых определяется условиями (1.2) и (1.3). Если после отбрасывания какого-либо условия размер допустимой области не изменяется, условие считается *лишним*.

Пример. *Классические задачи линейного программирования.*

Задача выбора оптимального рациона питания.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i,\ \ i = 1,\ldots,m,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

где n *– число продуктов,* m *– число питательных веществ,* x_j *и* c_j *– суточное потребление и цена единицы* j*-го продукта,* a_{ij} *– количество* i*-го питательного вещества в единице* j*-го продукта,* b_i *– суточная потребность в* i*-м питательном веществе.*

Задача оптимального планирования производства.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \;\; i = 1,...,m, \;\; x_j \ge 0, \;\; j = 1,...,n,$$

где n – число товаров, m – число ресурсов, x_j и c_j – объем производства и цена единицы j-го товара, a_{ij} – расход i-го ресурса на производство единицы j-го товара, b_i – объем i-го ресурса.

Транспортная задача минимизации расходов на перевозки.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \;\; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \;\; x_{ij} \ge 0, \;\; i = 1,...,m, \;\; j = 1,...,n,$$

где n – число пунктов реализации товаров, m – число складов, x_{ij} и c_{ij} – количество товара и тариф на его доставку с i-го склада в j-й пункт реализации, a_i – количество товара на i-м складе, b_j – потребность j-го пункта в товарах.

• • •

Задачу линейного программирования обычно приводят к **каноническому виду**, выполняя следующие преобразования.

1. Сведение задачи минимизации к **задаче максимизации**.

Пример. *Задачу* $Q(X) = C^T \cdot X + d \to min$ *можно преобразовать в задачу* $Q'(X) = -C^T \cdot X - d \to max$.

• • •

2. Переход к **неотрицательным переменным**.

Пример. *Любую переменную* x_j *можно заменить разностью* $x_j = u_j - v_j$, $u_j \ge 0$, $v_j \ge 0$.

• • •

3. Переход от ограничений-равенств к **неравенствам**.

Пример. *Равенство* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i$ *можно заменить парой неравенств* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le b_i$ *и* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \ge b_i$.

● ● ●

4. Переход от ограничений «снизу» к **ограничениям «сверху»**.

Пример. *Неравенство* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \ge b_i$ *можно заменить неравенством* $-a_{i1} \cdot x_1 - a_{i2} \cdot x_2 - \ldots - a_{in} \cdot x_n \le -b_i$.

● ● ●

5. Введение дополнительных неотрицательных фиктивных **«ослабляющих» переменных**.

Пример. *Неравенство* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le b_i$ *можно заменить равенством* $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n + x_{n+i} = b_i$.

● ● ●

После всех преобразований (1.2) становится системой равенств

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \ldots \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n + x_{n+i} = b_i, \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (1.4)$$

Коэффициент перед ослабляющей переменной x_j в j-м уравнении системы (1.4) всегда равен единице. Во всех остальных уравнениях он равен нулю.

В канонической форме задача линейного программирования представляется следующим образом

$$Q'(X) = (C')^T \cdot X' + d \to max, \quad X' \ge 0, \; C' \ge 0, \; A' \cdot X' = B,$$
$$X' = \left(X^T, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\right)^T, \; C' = \left(C^T \vdots \; 0\right)^T, \; A' = \left[A \; \vdots \; I\right], \quad (1.5)$$

где $X \in E^{n+m}$ и $C \in E^{n+m}$ – действительные векторы, $A \in E^{m\times(n+m)}$ – действительная матрица ранга m, $I \in E^{m\times m}$ – диагональная единичная матрица.

Пример. *Представление задачи линейного программирования в канонической форме.*

Целевая функция и система ограничений

$$Q(X) = 2 \cdot x_1 + x_2, \quad \begin{cases} x_1 \ge 2, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$$

Преобразование системы ограничений

$$\begin{cases} -x_1 \le -2, \\ x_1 \le 7, \\ -x_2 \le -1, \\ x_2 \le 4, \\ -x_1 - x_2 \le -4, \\ x_1 + x_2 \le 9, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_4 = 7, \\ -x_2 + x_5 = -1, \\ x_2 + x_6 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_7 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_8 = 9. \end{cases}$$

Компоненты канонической задачи линейного программирования

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

• • •

Решение задачи линейного программирования в канонической форме обладает нижеперечисленными свойствами.

- Оно удовлетворяет поставленным ограничениям (1.2).
- Не более $\boldsymbol{m}$ координат решения больше или равны нулю. Они считаются **базисными**.
- Не менее $\boldsymbol{n}$ координат решения равны нулю. Они считаются **свободными**.
- Векторы-столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующие базисным переменным, линейно независимы (т. е. образуют базис пространства $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{m}}$). Составленная из них невырожденная матрица называется базисной.

Допустимое решение, доставляющее максимум целевой функции, называется **оптимальным**. Допустимое решение, соответствующее нулевым значениям свободным переменным, называется **базисным**. Если оно имеет $\boldsymbol{m}$ положительных координат, оно считается **невырожденным**. Если среди координат решения есть нулевые, оно считается **вырожденным**.

Если существует какое-либо допустимое решение задачи линейного программирования, то существует и базисное допустимое решение. Если существует какое-либо оптимальное решение задачи линейного программирования, то существует и базисное оптимальное решение.

1.2 Графическое решение задачи линейного программирования

Графическое решение задачи линейного программирования применяется ограниченно (на практике – только для функций двух переменных). Однако оно оказывается полезным для демонстрации идей, лежащих в основе других методов, придавая им наглядность.

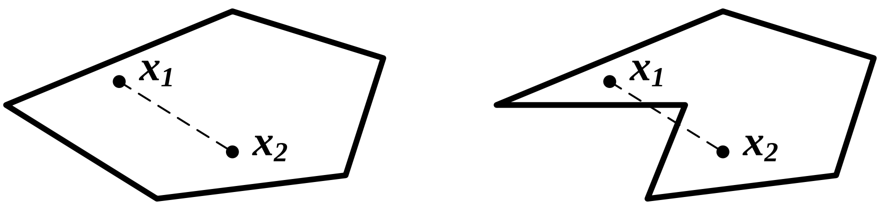
Геометрическое представление задачи линейного программирования следующее. В пространстве переменных $\boldsymbol{X}$ каждое условие (1.2) определяет полупространство, лежащее по одну сторону от гиперплоскости

$$\boldsymbol{a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 + \ldots + a_{jn} \cdot x_n \le b_j, \quad j = 1,\ldots,m.} \tag{1.4}$$

Пересечение таких полупространств образует **многогранник**, ограничивающий допустимую область решений $\boldsymbol{S}$. Она всегда является **выпуклой** (см. рисунок 1.1). Любые две ее точки $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ можно соединить отрезком, целиком принадлежащим $\boldsymbol{S}$, т. е. точка

$$\boldsymbol{x' = \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2, \; 0 \le \lambda \le 1} \tag{1.5}$$

будет принадлежать $\boldsymbol{S}$, если $\boldsymbol{x_1 \in S}$ и $\boldsymbol{x_2 \in S}$.



а) *б)*

Рисунок 1.1 – Пример выпуклой (а) и невыпуклой (б) области

Точка, лежащая на пересечении $\boldsymbol{k}$ линейно независимых гиперплоскостей и являющаяся допустимой, называется **вершиной** допустимой области $\boldsymbol{S}$ в пространстве $\boldsymbol{E^n}$. Ее нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации (1.5) двух других точек $\boldsymbol{S}$. Вершина, образованная пересечением более чем $\boldsymbol{n}$ гиперплоскостей, называется *вырожденной*. Любая допустимая область, ограниченная $\boldsymbol{m}$ условиями (1.2) и $\boldsymbol{n}$ неравенствами (1.3), имеет конечное число вершин, которое не превышает $\boldsymbol{C_{n+m}^{m}}$. Любая точка допустимой области имеет, по меньшей мере, одно представление вида

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \overset{i}{\boldsymbol{x}}, \tag{1.6}$$

где $\overset{i}{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{S}$ – вершины выпуклого многогранника.

Форма допустимой области существенно зависит от характера ограничений (см. рисунок 1.2).

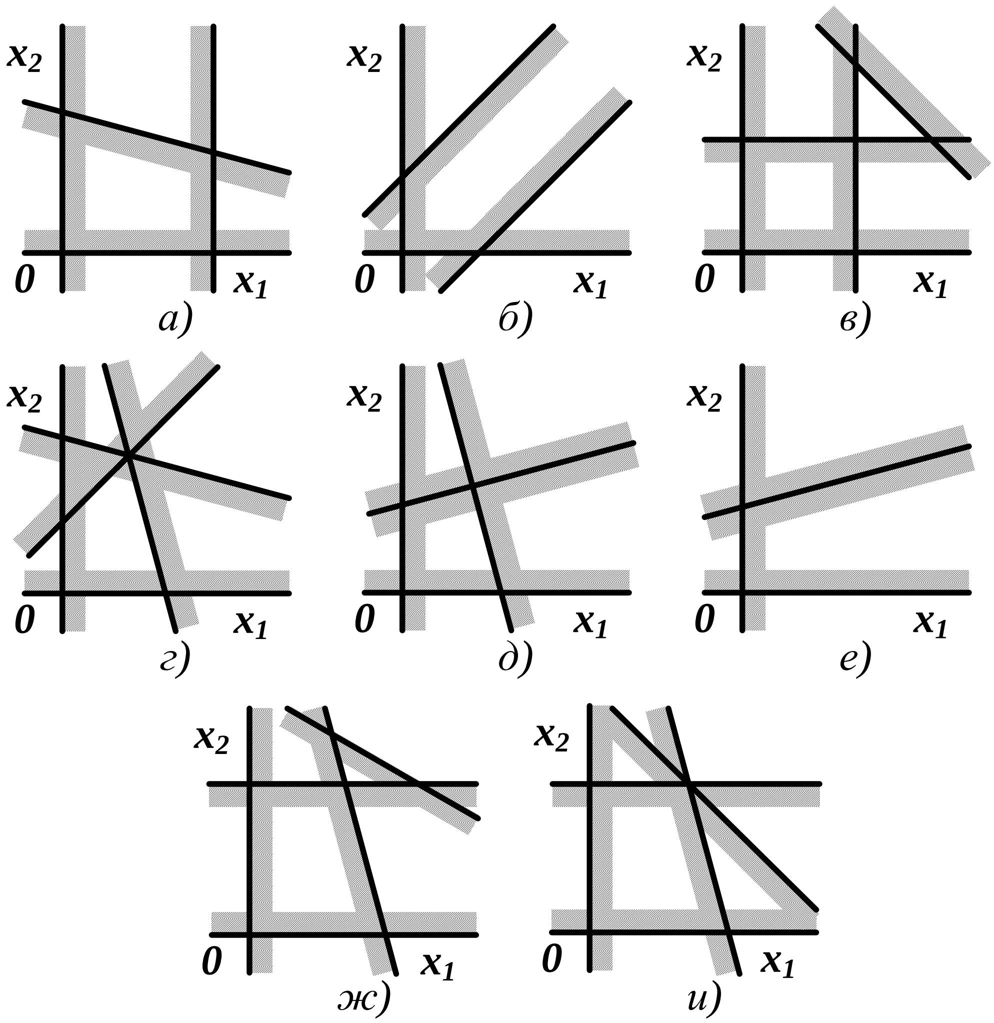


Рисунок 1.2 – Допустимая область: (а) ограниченная; (б) неограниченная; (в) пустая; (г) точка; (д) отрезок; (е) луч; (ж) имеющая лишнее ограничение; (и) имеющая вырожденную вершину

Линии уровня функции (1.1) представляют собой семейство параллельных гиперплоскостей

$$\boldsymbol{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_1 \cdot x_n = C^T \cdot X = const.} \tag{1.7}$$

Направление наискорейшего возрастания целевой функции определит ее вектор-градиент $\boldsymbol{grad\ Q(X) = C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T}$, перпендикулярный плоскостям (1.7).

Выберем из семейства (1.7) любую плоскость, которую будем смещать в направлении вектора ***C***, пока допустимая область не окажется в одном из порождаемом ею полупространств. Такая предельная плоскость называется *опорной*. Точки ее пересечения с ***S*** будут решением задачи линейного программирования.

Если допустимая область пуста, задача линейного программирования неразрешима. Если допустимая область не пуста и ограниченна, эта задача всегда разрешима, а экстремальное значение функции (1.1) достигается, по крайней мере, в одной из вершин ***S***. Если допустимая область неограниченна, задача линейного программирования может быть как разрешимой, так и неразрешимой (см. рисунок 1.3).

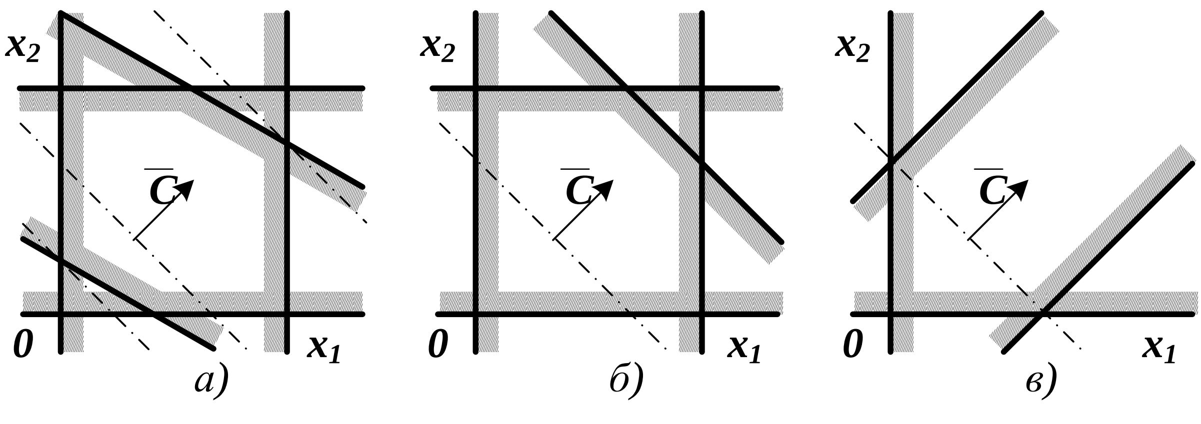


Рисунок 1.3 – Влияние ограничений на решение задачи линейного программирования: (а) имеются строгие минимум и максимум; (б) имеются строгий минимум и нестрогий максимум; (в) имеется строгий минимум и отсутствует максимум

Примечание. *Найденное решение всегда будет значением целевой функции на границе допустимой области, так как функции вида (1.1) не имеют безусловных экстремумов.*

• • •

Пример. *Графическое решение задачи линейного программирования (см. пример в п. 1.1).*

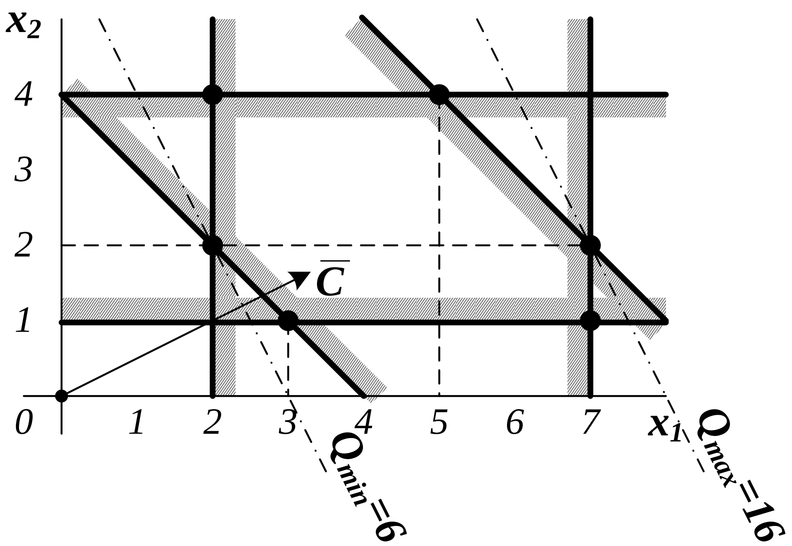


Рисунок 1.4 – Допустимая область решений задачи из п. 1.1

По положению опорных плоскостей можно определить координаты минимума $(2,2)$ *и максимума* $(7,2)$. *Для проверки выполнен расчет значений* $\mathbf{Q}(X)$ *во всех вершинах допустимой области.*

Таблица 1.1 – Расчет $\mathbf{Q}(X)$ *в вершинах допустимой области*

Вершина	$Q(X)$	**Вершина**	$Q(X)$	**Вершина**	$Q(X)$
$(2,2)$	**6**	$(7,1)$	**15**	$(5,4)$	**14**
$(3,1)$	**7**	$(7,2)$	**16**	$(2,4)$	**8**

Приближенные значения координат точек экстремума можно найти непосредственно из графика. Их точные значения можно *получить, решая систему уравнений прямых линий, на пересечении которых располагаются эти точки.*

• • •

1.3 Решение задачи линейного программирования симплекс-методом

Идея этого метода заключается в целенаправленном переборе вершин выпуклой допустимой области[2]. После выбора произвольной начальной вершины находятся все выходящие из нее ребра. Переход в новую вершину выполняется по тому ребру, в направлении которого целевая функция возрастает наибольшим образом (т. е. в направлении градиента $\boldsymbol{Q}$), после чего эти действия повторяются. Поиск прекращается после обнаружения вершины, любое движение из которой уменьшает целевую функцию. Ее координаты считаются решением задачи линейного программирования.

Так как целевая функция – линейная, а допустимая область – выпуклый многогранник, то вычислительный процесс завершается за конечное число шагов порядка $\boldsymbol{n}$ (при простом переборе вершин это значение может иметь порядок $\boldsymbol{2^n}$).

Примечание. *В исключительных случаях при наличии вырожденных вершин обход допустимой области может повторяться.*

Для использования симплекс-метода задача линейного программирования должна быть представлена в канонической форме (1.5). При поиске решения исходят из того, что соблюдаются следующие условия.

- Уравнения системы ограничений *линейно независимы* (линейно зависимые ограничения должны быть отброшены).

---

[2] Простейший выпуклый многогранник для заданного числа измерений называется **симплексом**.

- Система ограничений *совместна*, т. е. среди ограничений нет противоречивых (в этом случае $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$; если $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, эта система имеет единственное решение, что исключает оптимизацию; если $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n}$, формулировка задачи некорректна).

Пусть ставится невырожденная задача линейного программирования, для которой известно одно из ее допустимых базисных решений $\tilde{\boldsymbol{X}}$. Ровно $\boldsymbol{n}$ координат вектора $\tilde{\boldsymbol{X}}$ будут нулевыми или *свободными*, а $\boldsymbol{m}$ – положительными или *базисными*. Не нарушая общности, ими можно считать последние $\boldsymbol{m}$ координат. Их можно выразить через свободные переменные с помощью соотношений

$$x_{n+i} = \mu_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \cdot x_j, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.8}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{z}$ – некоторые параметры (их можно вычислить, например, методом исключения Гаусса). Так как равенства (1.8) должны выполняться при $\boldsymbol{X} = \tilde{\boldsymbol{X}}$ (когда свободные координаты нулевые), то можно записать

$$x_{n+i} = \tilde{x}_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \cdot x_j, \quad i = 1,\dots,m. \tag{1.9}$$

С учетом (1.9) для любой точки, удовлетворяющей системе ограничений, целевую функцию можно записать

$$\begin{aligned} Q(X) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} \cdot \left[\tilde{x}_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \cdot x_j \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} \cdot \tilde{x}_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} c_{n+i} \cdot z_{ij} - c_j \right] \cdot x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_{n+i} \cdot \tilde{x}_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot x_j . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Значения $\boldsymbol{\sigma_j}$ называют **оценками замещения**, а $\boldsymbol{z_{ij}}$ – **коэффициентами замещения**.

Если все оценки замещения неположительные, то при увеличении любой свободной переменной $\boldsymbol{Q(X)}$ не может уменьшиться. *Решение будет считаться оптимальным, если все* $\boldsymbol{\sigma_j}$ *больше нуля.*

Значения целевой функции, базисных переменных, коэффициентов и оценок замещения сводят в симплекс-таблицу, которая является расширением системы уравнений (1.9).

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} Q(\tilde{X}) & \sigma_1 & \dots & \sigma_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{x}_{n+1} & z_{11} & \dots & z_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{x}_{n+2} & z_{21} & \dots & z_{2n} & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{n+m} & z_{m1} & \dots & z_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Рисунок 1.5 – Внешний вид исходной симплекс-таблицы

Примечание. *До начала решения задачи линейного программирования столбцы, соответствующие базисным переменным, образуют единичную подматрицу. В процессе решения их расположение может меняться. Оценки замещения для базисных переменных всегда равны нулю.*

Алгоритм регулярного перебора допустимых базисных решений предусматривает выполнение следующих операций.

1. Выбор начального допустимого базисного решения. Если размерность задачи сознательно увеличена за счет введения ослабляющих переменных, то одной из вершин допустимой области всегда будет точка с координатами

$$\tilde{x}_i = 0, \; i = 1,\dots,n; \quad \tilde{x}_{n+i} = b_i, \; i = 1,\dots,m, \tag{1.11}$$

как это следует из системы (1.4). Оценки замещения z_{ij} в столбцах от 1 до n будут при этом равны a_{ij}.

2. Выбор ведущего столбца симплекс-таблицы. Для этого анализируются оценки замещения. *Если все они неотрицательны, найденная вершина считается оптимальной, и поиск прекращается*. В противном случае в качестве ведущего выбирается k-й столбец с минимальным значением σ_k.

3. Выбор ведущей строки симплекс-таблицы. Для этого анализируется ведущий столбец. *Если среди его коэффициентов замещения нет строго положительных, задача не имеет конечного решения.* В противном случае в качестве ведущей выбирается строка s, для которой

$$\frac{\tilde{x}_s}{z_{sk}} = \min_{\left\{\substack{i \\ z_{ik}>0}\right\}} \frac{\tilde{x}_i}{z_{ik}}. \tag{1.12}$$

4. Изменение базиса. На этом этапе из него выводится переменная $s + n$ и вводится переменная k. Это достигается путем пересчета симплекс-таблицы, новые значения элементов которой вычисляются по правилам

$$\bar{z}_{i,j} = \begin{cases} z_{ij} - \dfrac{z_{ik} \cdot z_{sj}}{z_{sk}}, & i \neq s, \\ \dfrac{z_{ij}}{z_{ik}}, & i = s, \end{cases} \tag{1.13}$$
$$i = 0,\dots,m, \quad j = 0,\dots,n,$$

где $\bar{z}_{i0}$ соответствует значениям базисных переменных, $\bar{z}_{0j}$ – значениям оценок замещения, а $\bar{z}_{00}$ – значению $Q(X)$.

Примечание. *Порядок индексирования оценок замещения удобно запоминать с помощью т. н. «правила треугольников», соответствующего схеме исключения Гаусса (см. рисунок 1.6).*

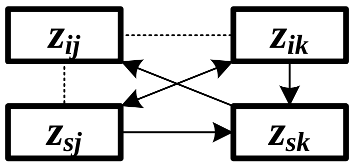


Рисунок 1.6 – Правила индексирования оценок замещения при пересчете симплекс-таблицы

После пересчета симплекс-таблицы шаги ***2-4*** повторяются. Для невырожденной задачи за конечное число шагов (т. к. число базисов конечно) симплекс-метод гарантированно или найдет ограниченное решение, или установит его отсутствие. Алгоритм применим и для решения вырожденных задач, однако формальная смена базисов может привести к его *зацикливанию* (это во многом зависит от выбора ведущих строки и столбца).

Пример. *Решение задачи линейного программирования (см. пример в п. 1.1) симплекс-методом.*

Таблица 1.1 – Симплекс-таблица на шаге 1

Q = 0		**Переменные**								$\tilde{x}_i \,/\, z_{ik}$
		1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	
		Оценки замещения								
		–2	***–1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	
Базисы	***–2***	***–1***	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	—
	7	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***7***
	–1	***0***	***–1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	—
	4	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	—
	–4	***–1***	***–1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	—
	9	***1***	–	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***1***	***9***
		Коэффициенты замещения								

Шаг 1. *Ведущими становятся первый столбец с минимальной оценкой замещения и вторая строка с минимальным отношением базисной переменной к коэффициенту замещения (строки с номерами 1, 3, 4, и 5 не рассматриваются, так как для них в ведущем столбце располагаются значения, меньшие или равные нулю). В базис вводится первая переменная, исключается из него – четвертая.*

Шаг 2. *Ведущими становятся второй столбец шестая строка. В базис вводится вторая переменная, исключается из него – восьмая.*

Шаг 3. *Все оценки замещения положительны. Решением задачи будут значения* $\mathbf{x_1 = 7}$ *и* $\mathbf{x_2 = 2}$. *Остальные базисные переменные на целевую функцию не влияют.*

Таблица 1.2 – Симплекс-таблица на шаге 2

Q = 14		Переменные								$\tilde{x}_i / z_{ik}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	
		Оценки замещения								
		0	–1	0	2	0	0	0	0	
Базисы	5	0	0	1	1	0	0	0	0	—
	7	1	0	0	1	0	0	0	0	—
	–1	0	–1	0	0	1	0	0	0	—
	4	0	1	0	0	0	1	0	0	4
	3	0	–1	0	1	0	0	1	0	—
	2	0	1	0	–1	0	0	0	1	2
		Коэффициенты замещения								

Таблица 1.3 – Симплекс-таблица на шаге 3

Q = 16		Переменные								$\tilde{x}_i / z_{ik}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	
		Оценки замещения								
		0	0	0	1	0	0	0	1	
Базисы	5	0	0	1	1	0	0	0	0	—
	7	1	0	0	1	0	0	0	0	—
	1	0	0	0	–1	1	0	0	1	—
	2	0	0	0	1	0	1	0	–1	—
	5	0	0	0	0	0	0	1	1	—
	2	0	1	0	–1	0	0	0	1	—
		Коэффициенты замещения								

• • •

2 СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

В процессе работы на практических занятиях и самостоятельно студент должен научиться:

- формулировать задачу линейного программирования в общепринятых терминах;
- решать задачу линейного программирования графически;
- решать задачу линейного программирования численно с по-

мощью процедуры симплекс-метода.

Варианты заданий для самостоятельного решения приведены в приложении ***А***.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

1. Что понимается под линейным программированием?
2. Что считается допустимой точкой и допустимой областью решения задачи линейного программирования?
3. Как задача линейного программирования приводится к каноническому виду? Какими свойствами обладает решение задачи линейного программирования в каноническом виде?
4. Как геометрически интерпретируется задача линейного программирования? Какие виды допустимых областей решений существуют?
5. Как графически решается задача линейного программирования? Каковы условия существования такого решения?
6. В чем заключается сущность симплекс-метода решения задачи линейного программирования? Какие условия должны соблюдаться для его использования?
7. Как составляется симплекс-таблица? Каковы ее элементы?
8. Каков алгоритм симплекс-метода решения задачи линейного программирования?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

Предприятие выпускает зимнюю обувь модели ***А*** и летнюю обувь модели ***В***. Известны ограничения на объем выпуска – наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов предприятия (см. таблицу 1).

Таблица 1

<table>
<tr><th rowspan="2">!Цех</th><th colspan="2">Необходимый фонд рабочего времени, чел.-ч./пара</th><th rowspan="2">Общий фонд рабочего времени, чел-ч./месяц</th></tr>
<tr><th>Модель A</th><th>Модель B</th></tr>
<tr><td>Переработка сырья</td><td>2,5</td><td>5</td><td>3500</td></tr>
<tr><td>Раскрой и упаковка</td><td>4</td><td>2</td><td>3200</td></tr>
<tr><td>Производство</td><td>5</td><td>5</td><td>4500</td></tr>
</table>

Известна сезонность спроса в месяц на обувь каждой модели и обязательства по ежемесячным поставкам обуви каждого вида, оговоренные контрактами с заказчиками (см. таблицу 2).

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Сезон</th><th colspan="2">Максимальный спрос, количество пар</th><th colspan="2">Постоянные поставки, количество</th></tr>
<tr><th>Модель A</th><th>Модель B</th><th>Модель A</th><th>Модель B</th></tr>
<tr><td>Летний</td><td>200</td><td>1200</td><td>100</td><td>500</td></tr>
<tr><td>Осенний</td><td>500</td><td>800</td><td>200</td><td>400</td></tr>
<tr><td>Зимний</td><td>1300</td><td>300</td><td>500</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Весенний</td><td>600</td><td>600</td><td>300</td><td>300</td></tr>
</table>

Доход в сезон $\boldsymbol{S}$ от производства одной пары зимней обуви модели $\boldsymbol{A}$ составляет $\boldsymbol{m}$ рублей, а от производства одной пары обуви модели $\boldsymbol{B}$ – $\boldsymbol{n}$ рублей. Необходимо разработать план производства на месяц, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 2

Предприятие выпускает изделия модели $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Известны нормы затрат ресурсов на одно изделие каждой модели и общее количество имеющихся ресурсов (см. таблицу 3).

Таблица 3

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов в день
	Модель ***A***	Модель ***B***	
Фонд рабочего времени, чел.-ч./день	2	1	100
Сырье вида I, кг	1	2	100
Сырье вида II, кг	1	1	60

Максимальный спрос на модель ***A*** равен $\boldsymbol{\alpha}$ изделий в день, а на модель ***B*** – $\boldsymbol{\beta}$ изделий в день. Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный ***S*** изделий любой модели.

Доход от производства одного экземпляра модели ***A*** составляет ***m*** рублей, а от производства одного экземпляра модели ***B*** – ***n*** рублей. Необходимо разработать дневной план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 3

Предприятие специализируется на производстве обычного и тонирующего лаков. Для производства ***1*** л обычного лака необходимо затратить ***3*** минуты, а для производства ***1*** л тонирующего лака – ***6*** минут.

Резерв фонда рабочего времени составляет ***700*** чел.-ч./день. Размер ежемесячного запаса необходимых реактивов равен ***160*** л, их расход на ***1*** л обычного и тонирующего лаков составляет ***10*** мл и ***20*** мл соответственно. Технологические возможности предприятия позволяют выпускать не более ***9000*** л лака в день.

В соответствии с контрактом предприятие должно поставить ***5000*** л обычного лака и ***10000*** л тонирующего лака за каждую рабочую неделю, состоящую из ***5*** дней. Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства, равный S л/день. Максимальный спрос на обычный лак составляет α л/день, а на тонирующий лак – β л/день.

Доход от производства ***1*** л обычного лака составляет m рублей, а от производства ***1*** л тонирующего лака – n рублей. Необходимо разработать дневной план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 4

Предприятие специализируется на производстве одежды для зимнего и летнего сезонов (модели A и B). Известны расходы ресурсов на одно изделие и их месячные запасы (см. таблицу 4).

Таблица 4

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Модель A	Модель B	
Фонд рабочего времени, чел.-ч/день	6	6	3600
Шерсть, кг	0,4	0,2	200
Силон, кг	0,4	0,8	400

Производственные мощности предприятия позволяют производить α изделий в месяц. Известна сезонность спроса в месяц на каждую модель и обязательства по поставкам (см. таблицу 5).

Таблица 5

Вид ресурса	Нормы затрат ресурсов на одно изделие в месяц		Ежемесячные поставки	
	Модель A	Модель B	Модель A	Модель B
Летний	300	600	100	100

Осенний	400	500	100	200
Зимний	800	300	300	100
Весенний	500	400	200	100

Доход в сезон ***S*** от производства одного изделия модели ***A*** составляет ***m*** рублей, а от производства одного изделия модели ***B*** – ***n*** рублей. Необходимо разработать месячный план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 5

Предприятие выпускает два вида химикатов – ***A*** и ***B***, используя при этом четыре вида сырья Q_1, Q_2, Q_3, и Q_4. Известны нормы расхода сырья на производство ***1*** кг каждого продукта, ежедневный запас каждого вида сырья и его стоимость (см. таблицу 6).

Таблица 6

Показатель	Сырье, кг			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Продукт ***A***	0,1	0,1	0,1	0,2
Продукт ***B***	0,4	0,2	0,1	0,1
Стоимость ***1*** кг сырья, руб.	35	40	25	30
Ежедневный запас сырья, кг	200	120	90	160

Издержки производства составляют ***1*** рубль за ***1*** кг продукта ***A*** и ***1,5*** рубля за ***1*** кг продукта ***B***. Существует профсоюзное соглашение, по которому общее число производимых в течение дня химикатов должно составлять не менее ***S*** кг. Химический продукт ***B*** можно использовать в различных целях, поэтому спрос на него превышает производственные мощности. Химический продукт ***A*** предназначен только для специального применения, поэтому максимальный ежедневный спрос на него не превышает ***750*** кг.

Доход от производства одного килограмма химиката ***A*** составляет

m рублей, а от производства одного килограмма химиката B – n рублей. Необходимо разработать дневной план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 6

Предприятие по производству запасных частей для автомобилей выпускает два сходных друг с другом изделия – A и B. Известны нормы ресурсов, необходимых для выпуска единицы каждого изделия, недельные запасы ресурсов и издержки, связанные с их использованием (см. таблицу 7).

Таблица 7

Процессы	Изделия		Издержки, руб.	Недельный запас ресурсов
	A	B		
Сырье, кг	1	2	4	1200
Сборка, ч	2	1	3	1600
Отжиг, ч.	1	4	3	2000
Упаковка, ч.	1	1	4	900

Предприятие должно поставлять α шт. товара A и β шт. товара B в неделю. Ограничений на возможные объемы продаж нет.

Доход от производства одного изделия A составляет m рублей, а от производства одного изделия B – n рублей. Необходимо разработать недельный план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Вариант 7

Предприятие выпускает два продукта питания – A и B. Известны фонд рабочего времени, число человеко-часов, необходимое для производства 1 т каждого продукта, и стоимость одного человеко-часа на каждом виде производства (см. таблицу 8).

Таблица 8

Производство	Затраты времени, чел./час		Стоимость чел./час/день, руб.	Фонд рабочего времени, чел./час/мес.
	Продукт ***A***	Продукт ***B***		
Выработка	10	20	10	1000
Стерилизация	10	5	15	500
Упаковка	5	5	20	300

Предприятие должно поставлять ***10*** т продукта ***A*** и ***20*** т продукта ***B*** в месяц. Существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в месяц, равный ***40*** т продуктов обоих видов. Максимальный ежемесячный спрос на продукт ***A*** составляет $\boldsymbol{\alpha}$ т, на продукт ***B*** – $\boldsymbol{\beta}$ т.

Предприятие должно поставлять $\boldsymbol{\alpha}$ шт. товара ***A*** и $\boldsymbol{\beta}$ шт. товара ***B*** в неделю. Ограничений на возможные объемы продаж нет.

Доход от производства одной тонны продукта ***A*** составляет ***m*** рублей, а от производства одной тонны продукта ***B*** – ***n*** рублей. Необходимо разработать месячный план производства, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Таблица 9 – Исходные данные для решения задач

Вариант	Задача	***m***	***n***	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	***S***
1	1	160	220	400	300	Летний
2	2	15	10	45	40	40
3	3	2	2	6000	6000	5000
4	4	45	60	70	—	Летний
5	5	37	74	—	—	500
6	6	37	77	100	100	—
7	7	450	575	50	30	—
8	1	180	200	300	400	Осенний
9	2	10	20	50	30	20

10	3	2	1	7000	5000	4000
11	4	60	45	80	—	Зимний
12	5	57	44	—	—	400
13	6	42	57	200	100	—
14	7	550	475	40	40	—
15	1	160	220	250	300	Весенний
16	2	10	15	30	50	10
17	3	1	2	4000	8000	2000
18	4	60	60	60	—	Осенний
19	5	43	39	—	—	300
20	6	40	40	100	200	—
21	7	500	520	40	30	—
22	1	200	150	300	150	Зимний
23	2	15	25	30	45	40
24	3	2	3	6000	5000	5000
25	4	45	75	50	—	Осенний
26	5	38	41	—	—	500
27	6	37	47	300	100	—
28	7	490	520	25	35	—
29	1	200	200	150	200	Летний
30	2	15	15	30	60	20

Тема №2
ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК

Транспортные задачи – классические задачи линейного программирования. До настоящего времени методы их решения остаются удобным средством оптимального распределения ресурсов систем при наличии ограничений. Транспортные задачи имеют многочисленные приложения. В их терминах могут формулироваться многие другие задачи, прямого отношения к перевозкам грузов не имеющие. Цель практических занятий – приобретение навыков решения задач оптимального планирования.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Постановка транспортной задачи

Экономическая формулировка транспортной задачи следующая. Пусть имеется $\boldsymbol{m}$ поставщиков однородного груза с его запасами в $\boldsymbol{a_i}$, ($\boldsymbol{i = 1,...,m}$) единиц. Пусть имеется $\boldsymbol{n}$ потребителей этого груза, запросы которых равных $\boldsymbol{b_j}$, ($\boldsymbol{j = 1,...,n}$ единиц). Выделяют два вида транспортных задач:

- **сбалансированные задачи**, в которых общий запас груза равен суммарному запросу потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{1.1}$$

- задачи **с нарушенным балансом**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.3}$$

Примечание. *В дальнейшем будут рассматриваться только сбалансированные задачи.*

Введем **матрицу плана** перевозок $\boldsymbol{X}$, каждый элемент которой определяет количество груза, перевозимого от $\boldsymbol{i}$-го поставщика $\boldsymbol{j}$-му потребителю. В условиях сбалансированности и неотрицательности поставок можно составить систему ограничений

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n, \\ \qquad\qquad x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Любой план $\boldsymbol{X}$, удовлетворяющий системе (1.4), называется *допустимым*.

Примечание. *С помощью линейных преобразований можно доказать, что первые две группы уравнений системы (1.4) содержат ровно* $\boldsymbol{m + n - 1}$ *независимых уравнений. Лишнее уравнение может быть исключено.*

Введем **матрицу тарифов** перевозок $\boldsymbol{C}$, каждый элемент которой определяет стоимость перевозки единицы груза от $\boldsymbol{i}$-го поставщика $\boldsymbol{j}$-му потребителю. Тогда можно представить транспортную задачу в виде таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Таблица оптимального планирования

$Q(X)$	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1j} c_{1j}	…	x_{1n} c_{1n}
a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2j} c_{2j}	…	x_{2n} c_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mj} c_{mj}	…	x_{mn} c_{mn}

Ячейки таблицы планирования, в которых $x_{ij} > 0$, называются *базисными*. Их число равно числу независимых уравнений системы (1.4). Ячейки, в которых $x_{ij} = 0$, называются *свободными*.

Требуется найти *оптимальный* план перевозок, обеспечивающий при соблюдении ограничений (1.4) их минимальную суммарную стоимость, т. е.

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min. \qquad (1.5)$$

Стратегия решения транспортной задачи следующая.

1. Составляется первоначальный допустимый план перевозок.

2. Полученный план исследуется на оптимальность.

3. При необходимости план улучшается так, чтобы суммарная стоимость перевозок уменьшилась, после чего повторяется шаг ***2***.

1.2 Составление начального плана перевозок

Начальный план должен быть допустимым, хотя и не обязательно оптимальным. Значения x_{ij} в таблице планирования назначаются, исходя из условия

$$x_{ij} = min(\bar{a}_i, \bar{b}_j), \qquad (1.6)$$

где $\bar{a}_i$ – остаточные запасы груза у i-го поставщика, $\bar{b}_j$ – неудовлетворенные запросы j-го потребителя. Необходимо стремиться к максимальному удовлетворению запросов потребителей или максимальному исчерпанию возможностей поставщиков.

Если начальный план составляется **методом северо-западного угла**, то формирование матрицы X начинается с элемента x_{11} по направлению «сверху вниз и слева направо». Детали поясняются на примере.

Пример. *Составление допустимого начального плана перевозок методом северо-западного угла.*

30600	*170*	*110*	*100*	*120*	*200*
300	***170*** *70*	***110*** *50*	***20*** *15*	*80*	*70*
150	*80*	*90*	***80*** *40*	***70*** *60*	*85*
250	*50*	*10*	*90*	***50*** *10*	***200*** *25*

Матрица плана формируется в последовательности: $\boldsymbol{x_{11} = 170}$, $\boldsymbol{x_{12} = 110}$, $\boldsymbol{x_{13} = 20}$, $\boldsymbol{x_{23} = 80}$, $\boldsymbol{x_{24} = 70}$, $\boldsymbol{x_{34} = 50}$, $\boldsymbol{x_{35} = 200}$.

• • •

Полученный таким способом начальный допустимый план перевозок не учитывает их стоимость. Поэтому в общем случае он далек от оптимального.

По идее **метода наименьшего элемента** предпочтение при планировании отдается перевозкам с минимальными тарифами (если одинаковую стоимость имеют несколько перевозок, из них выбирают любую). Детали поясняются на примере.

Пример. *Составление допустимого начального плана перевозок методом наименьшего элемента.*

30300	*170*	*110*	*100*	*120*	*200*
300	***20*** *70*	*50*	***100*** *15*	*80*	***180*** *70*
150	***150*** *80*	*90*	*40*	*60*	*85*
250	*50*	***110*** *10*	*90*	***120*** *10*	***20*** *25*

Матрица плана формируется в последовательности: $\boldsymbol{x_{34} = 120}$, $\boldsymbol{x_{32} = 110}$, $\boldsymbol{x_{13} = 100}$, $\boldsymbol{x_{35} = 20}$, $\boldsymbol{x_{15} = 180}$, $\boldsymbol{x_{11} = 20}$, $\boldsymbol{x_{12} = 150}$.

• • •

Полученный таким способом начальный допустимый план перевозок обычно близок к оптимальному.

Лучший начальный план позволяет получить **метод добротностей**. *Добротностью* $\boldsymbol{i}$-й строки или $\boldsymbol{j}$-го столбца считается произведение $\boldsymbol{a_i}$ или $\boldsymbol{b_j}$ на сумму двух минимальных элементов соответственно строки или столбца «зануленной» матрицы тарифов перевозок $\boldsymbol{C^{(0)}}$. Матрица считается *зануленной*, если каждая ее строка и каждый ее столбец содержат хотя бы один ноль. Она формируется в следующем порядке:

- из каждого элемента строки исходной матрицы вычитается ее минимальный элемент;
- из каждого элемента столбца полученной матрицы вычитается его минимальный элемент.

Очевидно, что изменение порядка преобразования приводит к получению другой зануленной матрицы (см. рисунок 1.1).

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а)

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

б)

Рисунок 1.1 – Формирование зануленной матрицы: а) по принципу «строки – столбцы»; б) по принципу «столбцы – строки»

Метод добротностей подобен методу наименьшего элемента. Все ненулевые элементы матрицы плана должны располагаться на позициях нулевых элементов матрицы $\boldsymbol{C^{(0)}}$. Приоритет имеют ячейки, находящиеся в строке или в столбце с максимальной добротностью. Если на каком-либо этапе планирования обнаруживается, что среди незанятых ячеек строки или столбца $\boldsymbol{C}^{(0)}$ нет нулевых, операцию зануления повторяют. Детали поясняются на примере.

Пример. *Составление допустимого начального плана перевозок методом добротностей для задачи из предыдущих примеров. На каждом этапе ресурсы поставщиков и запросы потребителей уменьшаются на вновь вводимое значение матрицы плана.*

Зануление матрицы тарифов по принципу «строки – столбцы» (справа и снизу показаны добротности строк и столбцов).

	170	*110*	*100*	*120*	*200*	
300	*15*	*35*	*0*	*65*	*40*	***4500***
150	*0*	*50*	*0*	*20*	*30*	***0***
250	*0*	*0*	*80*	*0*	*0*	***0***
	0	***3850***	***0***	***2400***	***6000***	

Первый этап планирования. *Запросы* ***4****-го потребителя полностью удовлетворяются по минимально возможному тарифу.*

	170	*110*	*100*	—	*200*	
300	*15*	*35*	*0*	*65*	*40*	***4500***
150	*0*	*50*	*0*	*20*	*30*	***0***
130	*0*	*0*	*80*	***120*** *0*	*0*	***0***
	0	***3850***	***0***	**—**	***6000***	

Второй этап планирования. *Ресурсы* ***3****-го поставщика полностью исчерпываются по минимально возможному тарифу.*

	170	*110*	*100*	*—*	*70*
300	*15*	*35*	*0*	*65*	*40*
150	*0*	*50*	*0*	*20*	*30*
—	*0*	*0*	*80*	***120*** *0*	***130*** *0*

Третий этап планирования. *Незанятая часть матрицы* $\mathbf{C^{(0)}}$ *зануляется по* **2**-*му и* **5**-*му столбцам.*

	170	*110*	*100*	*—*	*70*	
300	*15*	*0*	*0*	*65*	*10*	***0***
150	*0*	*15*	*0*	*20*	*0*	***0***
—	*0*	*0*	*80*	***120*** *0*	***130*** *0*	**—**
	2550	***1650***	***0***	**—**	***700***	

Ресурсы **2**-*го поставщика полностью исчерпываются по минимально возможному тарифу.*

	20	*110*	*100*	*—*	*70*
300	*15*	*0*	*0*	*65*	*10*
—	***150*** *0*	*15*	*0*	*20*	*0*
—	*0*	*0*	*80*	***120*** *0*	***130*** *0*

Последний этап планирования. *Получение окончательного варианта допустимого начального плана перевозок (показана исходная матрица тарифов).*

29750	170	110	100	120	200
300	**20** 70	**110** 50	**100** 15	80	**70** 70
150	**150** 80	90	40	60	85
250	50	10	90	**120** 10	**130** 25

• • •

Для транспортных задач небольшой размерности использование метода добротностей позволяет, как правило, сразу получить оптимальный (или очень близкий к оптимальному) план.

Примечание. *Возможно вырождение начального плана перевозок, когда в результате определения* $\boldsymbol{x_{ij}}$ *одновременно исчерпываются ресурсы* $\boldsymbol{i}$*-го поставщика и удовлетворяются запросы* $\boldsymbol{j}$*-го потребителя, и из плана одновременно исключаются строка и столбец. В этом случае рекомендуется в одну из клеток выбывающих строки или столбца (желательно с наименьшей стоимостью) поставить т. н.* ***базисный нуль****. Общее количество базисных переменных при этом остается равным* $\boldsymbol{m + n - 1}$.

1.3 Улучшение плана перевозок

Имеется несколько методов улучшения начального плана перевозок. Одним из самых популярных является **метод потенциалов**. *Потенциалами* строк и столбцов матрицы считаются числа α_i, ($i = 1,...,m$) и β_j, ($j = 1,...,n$), поставленные в соответствие ресурсам a_i и запросам b_j. Алгоритм метода включает следующие шаги.

1. Составление начального плана перевозок.

2. Составление системы потенциалов для базисных ячеек таблицы планирования

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}. \tag{1.7}$$

Систему (1.7) образуют $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Для однозначного определения потенциалов значением одного из них задаются (например, принимают его равным 0).

3. Расчет относительных оценок для свободных ячеек таблицы планирования

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \left(\alpha_i + \beta_j\right). \tag{1.8}$$

4. Анализ относительных оценок для свободных ячеек таблицы планирования.

Если все значения Δ_{ij} неотрицательны, *план считается оптимальным*, стоимость перевозок рассчитывается, и решение прекращается. В противном случае определяется свободная ячейка (p,q), для которой отрицательная относительная оценка минимальна. Она должна вводиться в базис вместо одной из базисных ячеек.

5. Улучшение плана перевозок в пользу ячейки (p,q).

Для перераспределения плана работ строится *контур* – замкнутый многоугольник, обладающий следующими свойствами:

- число вершин контура всегда четно;
- одна из вершин контура – свободная ячейка (p,q), а остальные вершины – базисные ячейки плана;
- все углы контура прямые, и каждый отрезок, ограниченный двумя вершинами, целиком принадлежит одному столбцу или одной строке таблицы планирования;
- отрезки контура могут проходить через ячейки таблицы планирования, не являвшиеся вершинами контура;
- контур может иметь вид самопересекающейся замкнутой ломаной линии, но точки ее пересечения не могут быть вершинами контура;
- вершины контура, начиная с (p,q), попеременно отмечаются знаками «+» и «–».

После этого находится наименьшее из значений x_{ij} для «отрицательных» вершин контура. На эту величину содержимое «положительных» вершин увеличивают, а «отрицательных» – уменьшают. Остальные ячейки таблицы планирования не изменяются.

Шаги ***2-5*** алгоритма повторяются до получения оптимального плана перевозок.

Примечание. *Если наименьшее из значений* $\boldsymbol{x_{ij}}$ *соответствует нескольким «отрицательным» вершинам, то при пересчете плана все они, кроме одной, становятся* ***базисными нулями*** *(т. е. исключению из базиса подлежит только одна вершина). Число базисных клеток при этом остается равным* $\boldsymbol{m + n - 1}$.

Если наименьшее из значений $\boldsymbol{x_{ij}}$ *для «отрицательных» вершин равно нулю, то при пересчете плана вводимая в базис вершина должна становиться* ***базисным нулем***.

Пример. *Решение транспортной задачи из п. 1.2 методом потенциалов. Используется начальный план, составленный методом минимального элемента.*

Оценка начального плана. *Определяются потенциалы и относительные оценки (значение* $\boldsymbol{\beta_5}$ *принимается равным нулю).*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 70, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 15, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 70, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 80, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 10, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 10, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 25, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 70, \\ \alpha_2 &= 80, \\ \alpha_3 &= 25, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 0, \\ \beta_2 &= -15, \\ \beta_3 &= -55, \\ \beta_4 &= -15, \\ \beta_5 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta_{12} &= -5, \\ \Delta_{14} &= 25, \\ \Delta_{22} &= 25, \\ \Delta_{23} &= 15, \\ \Delta_{24} &= -5, \\ \Delta_{25} &= 5, \\ \Delta_{31} &= 25, \\ \Delta_{33} &= 120. \end{aligned}$$

Среди относительных оценок есть отрицательные. План должен быть улучшен.

Улучшение плана. *Контур перераспределения работ показан ниже (белым цветом помечены «отрицательные» вершины, черным –*

«положительные»). Наименьшая нагрузка в «отрицательных» вершинах контура равна ***120****.*

30300	*170*	*110*	*100*	*120*	*200*
300	***20*** *70*	*50*	***100*** *15*	*80*	***180*** *70*
150	***150*** *80*	*90*	*40*	*60*	*85*
250	*50*	***110*** *10*	*90*	***120*** *10*	***20*** *25*

Из базиса выводится ячейка $(3{,}4)$, а *вводится в него ячейка* $(2{,}4)$. *Ячейка* $(1{,}2)$ *заменяется базисным нулем. Объем работ во всех вершинах контура изменяется на* ***120*** *с соответствующим знаком. Новый план показан ниже. Стоимость его уменьшилась.*

29700	*170*	*110*	*100*	*120*	*200*
300	***140*** *70*	*50*	***100*** *15*	*80*	***60*** *70*
150	***30*** *80*	*90*	*40*	***120*** *60*	*85*
250	*50*	***110*** *10*	*90*	*10*	***140*** *25*

Оценка плана. *Определяются новые потенциалы и относительные оценки (значение* β_5 *принимается равным нулю).*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 70, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 15, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 70, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 80, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 60, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 10, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 25, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 70, \\ \alpha_2 &= 80, \\ \alpha_3 &= 25, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 0, \\ \beta_2 &= -15, \\ \beta_3 &= -55, \\ \beta_4 &= -20, \\ \beta_5 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta_{12} &= -5, \\ \Delta_{14} &= 30, \\ \Delta_{22} &= 25, \\ \Delta_{23} &= 15, \\ \Delta_{25} &= 5, \\ \Delta_{31} &= 25, \\ \Delta_{33} &= 120, \\ \Delta_{34} &= 5. \end{aligned}$$

Среди относительных оценок есть отрицательные. План должен быть улучшен.

Улучшение плана. *Контур перераспределения работ показан ниже Наименьшая нагрузка в его «отрицательных» вершинах равна* **60**.

29700	170	110	100	120	200
300	**140** 70	50	**100** 15	80	**60** 70
150	**30** 80	90	40	**120** 60	85
250	50	**110** 10	90	10	**140** 25

Улучшение плана. *Из базиса выводится ячейка* $(1{,}5)$, *а водится в него ячейка* $(1{,}2)$. *Объем работ во всех вершинах контура изменяется на* **60** *с соответствующим знаком. Новый план показан ниже. Стоимость его уменьшилась.*

29400	170	110	100	120	200
300	**140** 70	**60** 50	**100** 15	80	70
150	**30** 80	90	40	**120** 60	85
250	50	**50** 10	90	10	**200** 25

Оценка плана. *Определяются новые потенциалы и относительные оценки (значение* β_5 *принимается равным нулю).*

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1=70, \\ \alpha_1+\beta_2=50, \\ \alpha_1+\beta_3=15, \\ \alpha_2+\beta_1=80, \\ \alpha_2+\beta_4=60, \\ \alpha_3+\beta_2=10, \\ \alpha_3+\beta_5=25, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1=65, \\ \alpha_2=75, \\ \alpha_3=25, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \beta_1=5, \\ \beta_2=-15, \\ \beta_3=-50, \\ \beta_4=-15, \\ \beta_5=0, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta_{14}=30, \\ \Delta_{15}=5, \\ \Delta_{22}=30, \\ \Delta_{23}=15, \\ \Delta_{25}=10, \\ \Delta_{31}=20, \\ \Delta_{33}=115, \\ \Delta_{34}=0. \end{array}$$

Среди относительных оценок нет отрицательных. План перевозок является оптимальным.

• • •

2 СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

В процессе работы на практических занятиях и самостоятельно студент должен научиться:

- формулировать задачу оптимального распределения ресурсов систем при наличии ограничений;
- составлять допустимые начальные планы распределения ресурсов систем;
- оптимизировать созданные планы.

Варианты заданий для самостоятельного решения приведены в приложении ***А***.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

9. Каково экономическое содержание транспортной задачи? Что принимается в качестве целевой функции? В чем смысл ограничений?
10. Какова стратегия решения транспортной задачи?
11. Как строится таблица оптимального планирования?
12. Какими методами составляются допустимые начальные планы перевозок?
13. Как решается транспортная задача методом потенциалов? Каково условие оптимальности решения?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

Коэффициенты		***B***				
		180	*140*	*190*	*120*	*170*
A	*300*	*12*	*21*	*9*	*10*	*16*

	280	*14*	*15*	*11*	*12*	*21*
	220	*19*	*26*	*12*	*17*	*20*

Вариант 2

Коэффициенты		***B***				
		180	*120*	*90*	*100*	*110*
A	*250*	*12*	*8*	*21*	*10*	*15*
	200	*10*	*4*	*15*	*12*	*20*
	150	*19*	*16*	*26*	*17*	*20*

Вариант 3

Коэффициенты		***B***				
		200	*170*	*230*	*220*	*180*
A	*400*	*12*	*9*	*5*	*11*	*17*
	250	*14*	*5*	*12*	*14*	*22*
	350	*20*	*17*	*11*	*18*	*21*

Вариант 4

Коэффициенты		***B***				
		160	*70*	*90*	*80*	*100*
A	*150*	*8*	*20*	*7*	*11*	*16*
	200	*4*	*14*	*12*	*15*	*17*
	150	*15*	*22*	*11*	*12*	*19*

Вариант 5

Коэффициенты		***B***				
		170	*120*	*190*	*140*	*180*
A	*280*	*28*	*12*	*7*	*18*	*7*
	300	*35*	*14*	*12*	*15*	*3*
	220	*30*	*16*	*11*	*25*	*15*

Вариант 6

Коэффициенты		*B*				
		180	*120*	*100*	*90*	*110*
A	*150*	*14*	*6*	*4*	*9*	*4*
	250	*17*	*10*	*9*	*11*	*5*
	200	*15*	*11*	*6*	*12*	*8*

Вариант 7

Коэффициенты		*B*				
		300	*160*	*220*	*180*	*140*
A	*250*	*3*	*20*	*9*	*14*	*35*
	400	*14*	*10*	*12*	*20*	*46*
	350	*25*	*11*	*16*	*48*	*19*

Вариант 8

Коэффициенты		*B*				
		100	*70*	*130*	*110*	*90*
A	*150*	*9*	*15*	*35*	*20*	*7*
	150	*15*	*25*	*12*	*11*	*6*
	200	*16*	*10*	*40*	*15*	*25*

Вариант 9

Коэффициенты		*B*				
		190	*140*	*180*	*120*	*170*
A	*280*	*7*	*3*	*9*	*15*	*35*
	220	*3*	*10*	*12*	*20*	*46*
	300	*15*	*11*	*16*	*48*	*19*

Вариант 10

Коэффициенты		*B*				
		120	*180*	*110*	*100*	*90*
A	*200*	*9*	*6*	*17*	*11*	*8*
	250	*12*	*4*	*9*	*5*	*7*

	150	*6*	*7*	*14*	*10*	*6*

Вариант 11

Коэффициенты		***B***				
		170	*220*	*230*	*170*	*210*
A	*350*	*5*	*12*	*18*	*17*	*8*
	400	*6*	*10*	*15*	*6*	*3*
	250	*24*	*21*	*9*	*3*	*17*

Вариант 12

Коэффициенты		***B***				
		120	*110*	*190*	*190*	*90*
A	*250*	*12*	*7*	*16*	*4*	*11*
	250	*20*	*9*	*6*	*10*	*9*
	200	*2*	*4*	*7*	*3*	*6*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пантелеев, А.С. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : Учеб. пособие. / А. В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М. : Высш. шк., 2002. – 544 с. : ил. – (Прикладная математика для ВТУЗов). – ISBN 5-06-004137-9.

2. Методы оптимизации [Текст] : Учеб. для вузов. / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин ; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 440 с. – (Математика в техническом университете. Вып. IV). – ISBN 5-7038-1770-6 (Вып. IV) ; ISBN 5-7038-1270-4.

3. Эддоус, М., Стэнсфилд, Р. Методы принятия решения. [Текст] : Учеб. пособие. / Эддоус М., Стэнсфилд Р. – М. : Аудит, 1997 ; М. : ЮНИТИ, 1997. – 590 с. – ISBN 0-85121-832-6 (англ.) ; ISBN 5-85177-0279 (русск.).

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Невинномысский технологический институт

Кафедра информационных систем, электропривода и автоматики

АТОМАТИЗИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

Методические указания самостоятельной работе
для направления подготовки 15.04.04 –
Автоматизация технологических процессов и производств

Невинномысск 2016

Настоящие методические указания предназначены для студентов направления 15.04.04 – Автоматизация технологических процессов и производств. Они разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом и основной образовательной программой направления.

В методических указаниях сформулированы основные требования к контрольной работе, предложено ее примерное содержание, кратко изложены основные теоретические сведения и приведен список рекомендуемых источников.

Составители *канд. техн. наук, доцент Д.В. Болдырев*
канд. техн. наук, доцент В.М. Рейдер

Отв. редактор *канд. техн. наук А.А. Евдокимов*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее удачных примеров использования математических методов и информационных технологий для решения задач управления и планирования являются так называемые системы сетевого планирования и управления (СПУ).

При выполнении домашнего задания студенту предлагается разработать и исследовать сетевую модель управления комплексом взаимосвязанных работ.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Базовые понятия

Сущность сетевого планирования и управления заключается в следующем.

Процедура решения какой-либо задачи разбивается на множество отдельных этапов. Для перехода от одного этапа к другому необходимо выполнить работу. **Работа** – процесс, требующий затрат ресурсов (материальных, временных, трудовых или финансовых).

Начало или завершение этапа определяется наступлением определенного события. **Событие** – результат выполнения всех предшествующих работ, позволяющий начать все последующие работы. Событие, не имеющее предшествующих работ, считается *исходным*. Событие, завершающее все работы, считается *конечным*.

Последовательность работ от исходного до конечного события называется **путем**. Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим*. Если сократить (увеличить) работу, лежащую на критическом пути, то сократится (увеличится) общее время выполнения комплекса работ.

Отображение логической последовательности взаимосвязанных и взаимозависимых работ называется **сетевой моделью**. Визуальное представление сетевой модели называется **сетевым графиком**.

Схематически сетевой график работ изображается в виде ориентированного графа, показанного на рисунке 3.1. Вершины графа соответствуют событиям, дуги – работам. События нумеруются цифрами, работы – парами цифр. Время наступления ***i***-го события обозначают ***t(i)***. Длительность работы ***i-j*** обозначают ***t(i, j)***.

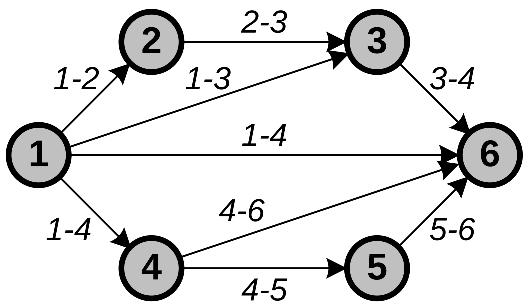


Рисунок 3.1 – Изображение сетевого графика работ

Расчетные параметры сетевого графика определяют оптимальные сроки начала и окончания каждой работы.

Ранний (или ожидаемый) срок $t_P(i)$ свершения ***i***-го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию

$$t_P(i) = \max_{L_{\Pi i}} \{t(L_{\Pi i})\}, \tag{1.1}$$

где $L_{\Pi i}$ – любой путь от исходного до ***i***-го события.

Если событие ***i*** имеет несколько предшествующих путей и, следовательно, несколько предшествующих событий ***j***, то ранний срок его свершения находится по формуле

$$t_P(i) = \max_{i,j} \{t_P(j) + t(j,i)\}. \tag{1.2}$$

Поздний (или предельный) срок $t_\Pi(i)$ свершения ***i***-го события определяется продолжительностью максимального пути, следующего за этим событием

$$t_\Pi(i) = t_{KP} - \max_{L_{Ci}} \{t(L_{Ci})\}, \tag{1.3}$$

где L_{Ci} – любой путь от ***i***-го до конечного события.

Если событие ***i*** имеет несколько последующих путей и, следовательно, несколько последующих событий ***j***, то поздний срок свершения события ***i*** находится по формуле

$$t_П(i) = \min_{i,j}\{t_П(j) - t(i,j)\}. \qquad (1.4)$$

Резерв времени *R(i)* *i*-го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения

$$R(i) = t_П(i) - t_Р(i). \qquad (1.5)$$

Время $t_{РН}(i, j)$ раннего начала работы ***i-j*** совпадает с ранним сроком наступления начального события ***i***, т. е.

$$t_{РН}(i,j) = t_Р(i). \qquad (1.6)$$

Время $t_{РО}(i, j)$ раннего окончания этой же работы определяется по формуле

$$t_{РО}(i,j) = t_{РН}(i,j) + t(i,j). \qquad (1.7)$$

Время $t_{ПО}(i, j)$ позднего окончания работы ***i-j*** совпадает с поздним сроком наступления конечного события ***j***, т. е.

$$t_{ПО}(i,j) = t_П(j). \qquad (1.8)$$

Время $t_{ПН}(i, j)$ позднего начала этой же работы определяется по формуле

$$t_{ПН}(i,j) = t_{ПО}(i,j) - t(i,j). \qquad (1.9)$$

Полный резерв времени $R_П(i, j)$ работы ***i-j*** показывает, насколько можно увеличить время ее выполнения при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Он определяется по формуле

$$R_П(i,j) = t_П(j) - t_Р(i) - t(i,j). \qquad (1.10)$$

Частный резерв времени первого вида *$R_1(i, j)$* работы ***i-j*** показывает, насколько можно увеличить время ее выполнения при условии, что поздний срок ее начального события не изменится. Он определяется по формуле

$$R_1(i,j)=t_П(j)-t_П(i)-t(i,j). \qquad (1.11)$$

Частный резерв времени второго вида *$R_2(i, j)$* работы ***i-j*** показывает, насколько можно увеличить время ее выполнения при условии, что ранний срок ее конечного события не изменится. Он определяется по формуле

$$R_2(i,j)=t_P(j)-t_P(i)-t(i,j). \qquad (1.12)$$

Данный резерв времени называется также **свободным**, так как при выполнении данной работы им можно располагать, считая, что все предшествующие работы заканчиваются, а все последующие работы начинаются в свои ранние сроки.

Независимый резерв времени *$R_Н(i, j)$* работы ***i-j*** – часть полного резерва времени, которым при выполнении данной работы можно располагать, считая, что все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки. Он определяется по формуле

$$R_Н(i,j)=t_P(j)-t_П(i)-t(i,j). \qquad (1.13)$$

Работы, лежащие на критическом пути, не имеют резерва времени. Поэтому они должны выполняться в строго установленные сроки.

Резерв времени пути *$R(L)$* определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути

$$R(L)=t_{КР}-t(L). \qquad (1.14)$$

1.2 Правила построения сетевых графиков

Все события сети должны кодироваться числами натурального ряда без пропусков. Номер последующему события должен быть больше номера предшествующего события. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно конечное событие.

Работа должна связывать событие с меньшим номером с событием с большим номером. Любые два события могут быть непосредственно связаны не более чем одной работой. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т. е. путей, соединяющих события с ними же самими (по направлению стрелок).

В сетевом графике не должно быть «тупиков», из которых не выходит ни одна работа (за исключением конечного события) и «хвостов», которым не предшествует хотя бы одна работа (за исключением исходного события).

2 ТРЕБОВАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

2.1 Общие требования

Контрольная работа выполняется студентом по индивидуальному заданию, варианты которого приведены в приложении А.

При выполнении контрольной работы студент должен решить задачу сетевого планирования и управления с помощью электронных таблиц ***MS Excel***, которая подразделяется на подзадачи:

- построение сетевой модели комплекса работ;
- расчет временных параметров сетевого графика;
- определение критического пути в некоторой последовательности взаимосвязанных работ.

Правильность функционирования сетевой модели должна быть подтверждена результатами машинного эксперимента путем изменения длительности некоторых работ.

Домашнее задание должно содержать:

- титульный лист;
- задание;
- основную часть;
- список использованных источников.

Контрольная работа оформляется в соответствии с требованиями к научно-технической документации [8]. Список использованных источников оформляется по правилам, приведенным в [9].

Разработанное студентом программное обеспечение представляется в электронной форме. Защита контрольной работы должна сопровождаться демонстрацией его работоспособности.

2.2 Решение задач сетевого планирования в MS Excel

Результаты расчета параметров сетевого графика оформляются в виде таблицы. Базовые значения задаются явно. Для получения расчетных значений необходимо использовать соответствующие формулы.

Изображение сетевого графика создается с использованием инструментов панели «Рисование». Изображения узлов сети необходимо располагать рядом с ячейками, в которых размещаются расчетные значения максимальной длины пути от начального события до текущего. Узлы, лежащие на критическом пути, должны быть выделены.

Пример решения задачи сетевого планирования приведен в приложении ***Б***.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Эддоус, М., Стэнсфилд, Р. Методы принятия решения. [Текст] : Учеб. пособие. / Эддоус М., Стэнсфилд Р. – М. : Аудит, 1997 ; М. : ЮНИТИ, 1997. – 590 с. – ISBN 0-85121-832-6 (англ.) ; ISBN 5-85177-0279 (русск.).

2. Шикин, Е.В., Чхартишвили, А.Г. Математические методы и модели в управлении [Текст] : Учеб. пособие. / Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. – 2-е изд., испр. – М. : Дело, 2002. – 440 с. – (Сер. «Наука управления»). – ISBN 5-7749-0164-5.

3. Переверзев, М.Н., Логвинов, С.И., Логвинов, С.С. Организация производства на промышленных предприятиях [Текст] : Учеб. пособие. / Переверзев М.Н., Логвинов С.И., Логвинов С.С. – М. : ИНФРА-М, 2006. – 332 с. – (Высшее образование). – ISBN 5-16-002676-2.

4. Кривцов, А.М., Шеховцев, В.В. Сетевое планирование и управление [Текст] / Кривцов А.М., Шеховцев В.В. – 2-е изд., доп. т перераб. – М. : Экономика, 1978. – 191 с. : ил.

5. Современные офисные приложения [Электронный ресурс] / О.В. Спиридонов. – Интернет-Университет Информационных технологий. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: http//www.INTUIT.ru, свободный.

6. Работа в Microsoft Excel XP [Электронный ресурс] / О.В. Спиридонов. – Интернет-Университет Информационных технологий. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: http//www.INTUIT.ru, свободный.

7. Работа в Microsoft Excel 2007 [Электронный ресурс] / О.В. Спиридонов. – Интернет-Университет Информационных технологий. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа: http//www.INTUIT.ru, свободный.

8. Методические указания к оформлению научно-технической документации [Текст] / Д.В. Болдырев, Л.Г. Гордиенко. – Невинно-

мысск : изд-во НТИ (филиала) ФГАОУ ВПО «СКФУ», 2013. – 45 с.

9. ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления [Текст]. – Взамен ГОСТ 7.1-84, ГОСТ 7.16-79, ГОСТ 7.18-79, ГОСТ 7.34-81, ГОСТ 7.40-82 ; введ. 2004-07-01. – Минск : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации ; М. : Изд-во стандартов, 2003. – 62 с. – (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность
1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1
1-3	4	1-3	6	1-3	4	1-3	6	1-3	4	1-3	6
2-4	3	1-4	5	2-3	3	2-3	5	1-4	3	2-4	5
2-5	6	2-5	4	2-5	6	2-5	4	2-5	6	2-5	4
3-4	2	3-5	3	3-4	2	3-4	3	3-5	2	3-4	3
3-6	1	3-6	2	3-5	1	3-5	2	3-6	1	3-6	2
4-5	3	4-5	6	4-5	3	4-5	6	4-5	3	4-5	6
4-8	2	4-8	4	4-8	2	4-8	4	5-6	2	4-7	4
5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-7	4	5-6	4
5-7	5	5-7	2	5-8	5	5-7	2	6-7	5	5-7	2
6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-8	3	6-7	3
7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1

Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12	
Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность	Работа	Длительность
1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1
1-3	4	1-3	6	2-3	2	1-3	6	1-3	4	2-3	2
2-3	3	1-4	7	2-4	3	2-3	1	1-4	3	2-4	5
2-5	6	2-5	4	2-5	6	2-5	6	2-5	6	2-5	1
3-4	2	3-5	1	3-4	2	3-4	3	3-4	2	3-4	3
3-6	1	3-6	2	3-6	1	3-5	2	3-6	1	3-6	2
4-5	3	4-6	5	4-5	3	4-5	1	4-5	3	4-5	6
4-8	2	4-8	3	4-8	2	4-6	3	5-6	2	4-7	5
5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-7	4	5-6	4
5-7	5	5-7	8	5-8	5	6-7	2	6-7	5	5-7	2
6-7	3	6-7	3	6-7	1	6-8	3	6-8	3	6-7	3
7-8	6	7-8	2	7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1

Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18	
Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность
1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1	1-2	2	1-2	1
1-3	4	1-3	6	1-3	4	1-3	6	1-3	4	1-3	6
2-3	3	1-4	5	2-4	3	2-3	5	1-4	3	2-4	5
2-5	6	2-5	4	2-5	4	2-5	6	2-5	6	2-5	4
3-4	2	3-5	3	3-4	2	3-4	3	3-4	2	3-4	3
3-6	1	3-6	2	3-5	1	3-5	2	3-6	1	3-6	2
4-5	3	4-6	6	4-5	3	4-5	6	4-5	3	4-5	6
4-8	2	4-8	4	4-8	5	4-6	5	5-6	2	4-7	7
5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-7	4	5-6	4
5-7	5	5-7	2	5-8	5	5-7	2	6-7	5	5-7	2
6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-8	3	6-7	3
7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1

Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24	
Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность	Работа	Длитель-ность
1-2	2	1-2	1	1-2	5	1-2	1	1-2	2	1-2	1
1-3	4	1-3	6	1-3	3	1-3	6	1-3	4	1-3	6
2-4	3	2-4	5	2-3	7	2-4	5	1-4	3	2-4	5
2-5	6	2-5	4	2-5	1	2-5	7	2-5	6	2-5	4
3-4	2	3-5	3	3-4	6	3-5	3	3-5	4	3-4	3
3-6	1	3-6	2	3-5	1	3-7	2	3-8	5	3-6	2
4-5	3	4-5	6	4-5	3	4-5	5	4-5	4	4-6	2
4-8	2	4-8	4	4-8	4	4-8	3	5-6	2	4-7	3
5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-6	4	5-7	4	5-6	4
5-7	5	5-7	2	5-8	5	5-7	2	6-7	5	5-7	2
6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-7	3	6-8	3	6-7	3
7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1	7-8	6	7-8	1

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример решения задачи сетевого планирования в MS Excel

Параметры событий

№	$t_P(i)$	$t_П(i)$	$R(i)$
1	0	0	0
2	2	2	0
3	4	7	3
4	10	10	0
5	7	9	2
6	16	16	0

Параметры работ

№	$t(i, j)$	$t_{РН}(i, j)$	$t_{РО}(i, j)$	$t_{ПН}(i, j)$	$t_{ПО}(i, j)$	$R_П(i, j)$	$R_1(i, j)$	$R_2(i, j)$	$R_С(i, j)$
1-2	2	0	2	0	2	0	0	0	0
1-3	4	0	4	3	7	3	3	0	0
2-4	8	2	10	2	10	0	0	0	0
2-5	5	2	7	4	9	2	2	0	0
3-4	3	4	7	7	10	3	0	3	0
4-6	6	10	16	10	16	0	0	0	0
5-6	7	7	14	9	16	2	0	2	0